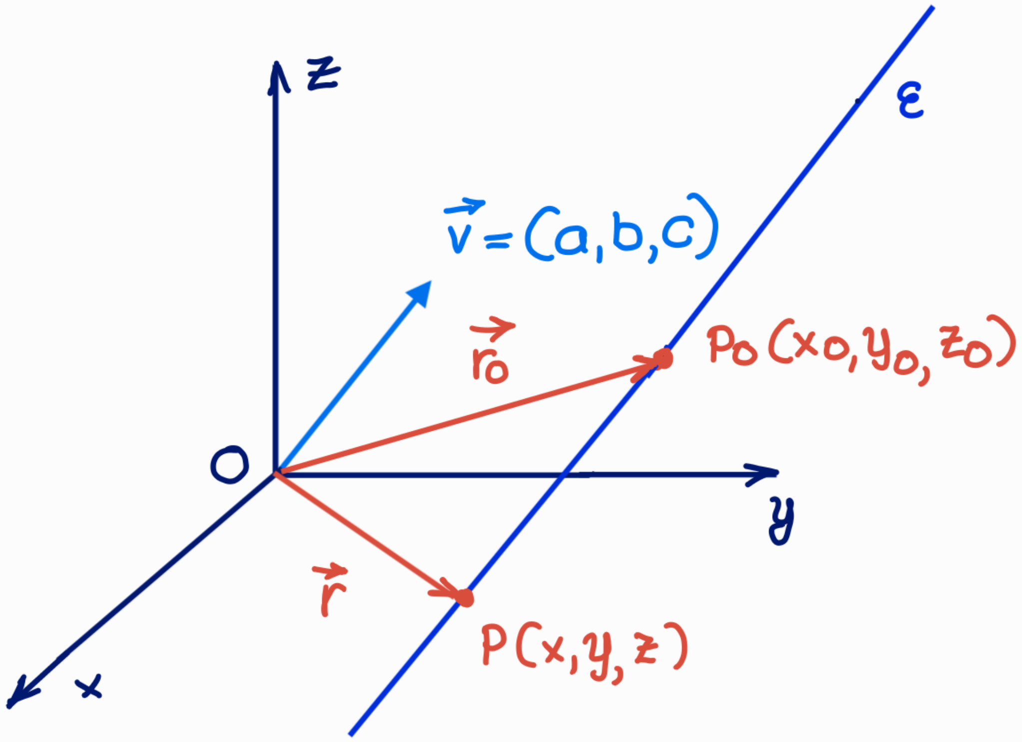
Η ευθεία στον χώρο

Α ' Μαχίμων - Α' Μηχανικών 2024 - 2025

Εξισώσεις Ευθείας στον χώρο

1. Εξισώσεις ευθείας, η οποία διέρχεται από γνωστό σημείο και είναι παράλληλη σε γνωστό διάνυσμα.



Γνωρίζουμε το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0) \Longrightarrow \vec{OP_0} = \vec{r_0} =$

$\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0) = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$, $P_0 \in \varepsilon$

$\vec{v} = (a,b,c) \Rightarrow \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{v} \parallel \varepsilon$

α. Διανυσματική εξίσωση ευθείας

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}}$$ όπου $t \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = (a,b,c)$ ✓
$\vec{r} = (x,y,z)$
$\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ ✓

$\vec{r_0}$ είναι σταθερό γιατί είναι το γνωστό $P_0(x_0,y_0,z_0)$
$\vec{v}$ 〃 〃 $\vec{v} = (a,b,c) \parallel \varepsilon$,

όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης οποιουδήποτε σημείου της ευθείας, έστω ε, $P(x,y,z)$

β. Παραμετρική εξίσωση ευθείας

Από την διανυσματική εξίσωση της ευθείας:

$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$, αν θέσουμε όπου

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{r_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$

$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, τότε προκύπτει:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$$\Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + t(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$$

$$\Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0 + ta)\vec{i} + (y_0 + tb)\vec{j} + (z_0 + tc)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{aligned}}$$

Παραμετρικές εξισώσεις $t \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα:

Να γραφούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας ε, η οποία διέρχεται από το σημείο $P_0(3,-1,2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v}=(5,2,-3)$

$$\varepsilon: \left|\ \boxed{\begin{array}{l} x = 3+5t \\ y = -1+2t \\ z = 2-3t \end{array}}\right.,\quad t\in\mathbb{R}$$ παραμετρικές

και η διανυσματική: $\vec{r}=(3,-1,2)+t(5,2,-3)$

γ. Αναλυτική εξίσωση ευθείας:

Από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0+ta \\ y = y_0+tb \\ z = z_0+tc \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \ \Rightarrow\ \boxed{t=\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}$$

$a,b,c\neq 0$

- $$\frac{x-3}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{2}=t \Rightarrow \begin{array}{l} x=3+0t \\ y=-2+t \\ z=4+2t \end{array}$$

είναι το ίδιο, $x=3$, $y+2=\dfrac{z-4}{2}$ με την παραπάνω εξίσωση

Παράδειγμα:

Δίνεται η αναλυτική εξίσωση ευθείας δ:

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{4-y}{5}$, $z=-1$. Να γραφούν η διανυσματική και οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας δ.

Λύση:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{-(y-4)}{5}=\frac{z+1}{0}\Rightarrow$$

$$z=-1$$
$$z=-1+0t$$
$$z+1=0t$$
$$\rightarrow t=\frac{z+1}{0}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z-(-1)}{0}\text{, οπότε}$$

• Παραμετρικές $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z-(-1)}{0}=t\Rightarrow$

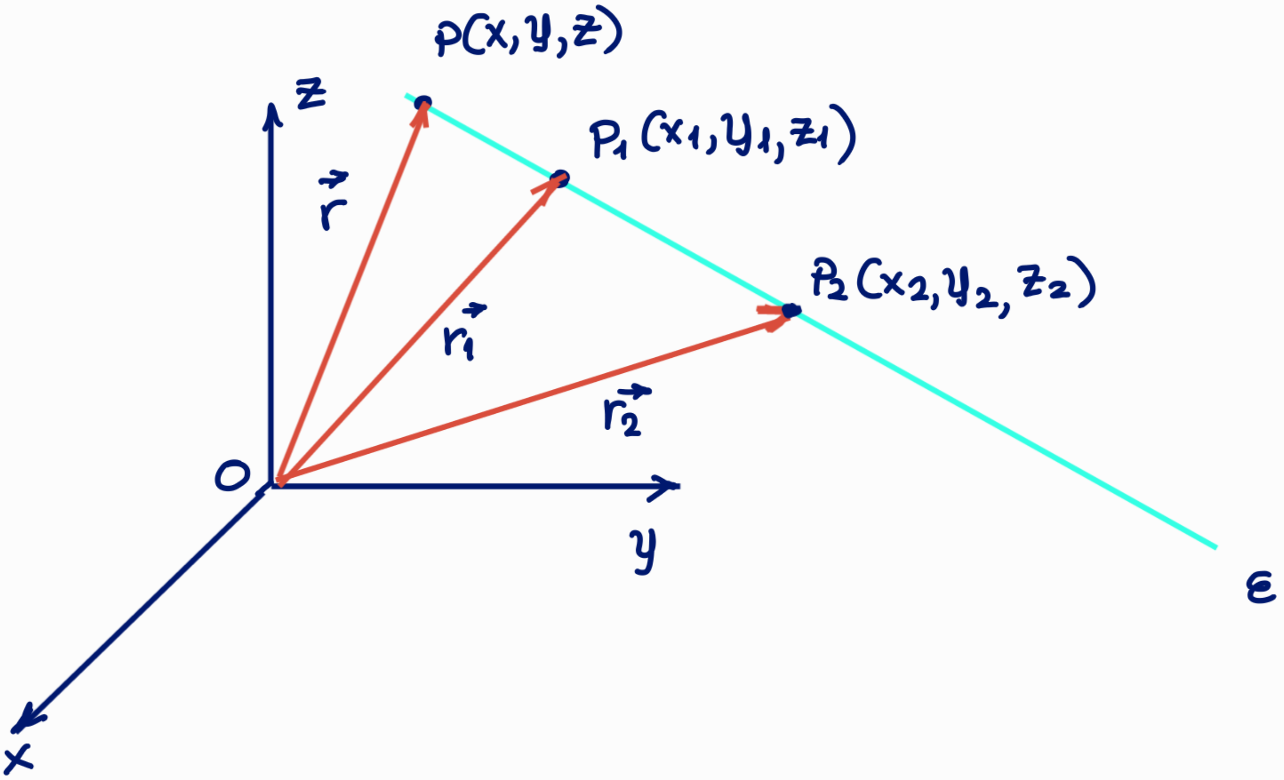
$$\delta:\ \begin{cases} x-1=2t \\ y-4=-5t \\ z-(-1)=0t \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=4-5t \\ z=-1+0t \end{cases}\Rightarrow$$

η δ διέρχεται από το σημείο $(1,4,-1)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(2,-5,0)$

• Διανυσματική $\vec{r} = \vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} + t(2\vec{i} - 5\vec{j} + 0\vec{k})$

ή $\boxed{\vec{r} = (1,4,-1) + t(2,-5,0), \quad t \in \mathbb{R}}$

2. Εξισώσεις ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$



Γνωστά τα 2 σημεία P_1 και P_2, οπότε και τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{r_1}$ και $\vec{r_2}$

α. Διανυσματική εξίσωση ευθείας:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r_1} + t(\vec{r_2} - \vec{r_1})}, t \in \mathbb{R}$$

$P_1(x_1, y_1, z_1) \longrightarrow \vec{r_1} = (x_1 - 0, y_1 - 0, z_1 - 0)$

$\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$

Από την διανυσματική εξίσωση προκύπτουν οι παραμετρικές και η αναλυτική εξίσωση. Υπενθυμίζουμε ότι όλες οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες και η μία προκύπτει από την άλλη.

Αντικαθιστώντας:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\vec{r_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$ στην διανυσματική εξίσωση
$$\vec{r_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

παίρνουμε:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + t\left[(x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k}\right] \Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \left[x_1 + t(x_2-x_1)\right]\vec{i} + \left[y_1 + t(y_2-y_1)\right]\vec{j} + \left[z_1 + t(z_2-z_1)\right]\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned}}$$

Παραμετρικές εξισώσεις

$t \in \mathbb{R}$

Αν στις παραμετρικές εξισώσεις λύσουμε, ως προς t, προκύπτει

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

$x_2 - x_1 \neq 0$, $y_2 - y_1 \neq 0$, $z_2 - z_1 \neq 0$, άρα

γ. Αναλυτική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία :

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

$P_2(x_2, y_2, z_2)$

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν: η διανυσματική, οι παραμετρικές και η αναλυτική εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $P_0(1, -2, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (4, -3, -1)$

Λύση:

- Διανυσματική εξίσωση : $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$

$\vec{r}(t) = (1, -2, 2) + t(4, -3, -1)$

- Παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= -2 - 3t \\ z &= 2 - 1t \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} t &= \frac{x-1}{4} \\ t &= \frac{y+2}{-3} \\ t &= \frac{z-2}{-1} \end{aligned}$$

- Αναλυτική εξίσωση:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{-1} \quad ή \quad \frac{x-1}{4} = \frac{-y-2}{3} = 2-z$$

2. Να βρεθούν η διανυσματική, οι παραμετρικές και η αναλυτική εξίσωση της ευθείας δ που διέρχεται από τα σημεία $A(1,0,1)$ και $B(-1,1,1)$

Λύση:

- Διανυσματική: $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r_1} + t(\vec{r_2} - \vec{r_1})$

$\vec{r_1} = (1-0,\ 0-0,\ 1-0) = (1, 0, 1)$ $\quad \vec{r_1} = \overrightarrow{OP_1}$

$\vec{r_2} = (-1-0,\ 1-0,\ 1-0) = (-1, 1, 1)$ $\quad O(0,0,0)$

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (1,0,1) + t\left[(-1-1),(1-0),(1-1)\right]$$

$$\vec{r}(t) = (1,0,1) + t(-2,1,0)$$

ή $\vec{r}(t) = \vec{i} + \vec{k} + t(-2\vec{i} + \vec{j})$

$$\vec{r}(t) = (1-2t)\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (1-2t)\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$$

- Παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{array}{l|l} x = 1+t(-1-1) & x = 1-2t \\ y = 0+t(1-0) & \Rightarrow y = 0+t \\ z = 1+t(1-1) & z = 1+0t \end{array}$$

$\vec{r} = (1,0,1) + t(-2,1,0)$

- Αναλυτική εξίσωση

$$\Rightarrow \quad t = \frac{x-1}{-2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{0} \Rightarrow \frac{x-1}{-2} = y, \ z = 1$$

3. Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών

$$\varepsilon: \vec{r}(t) = \underset{x}{(6+3t)}\vec{i} + \underset{y}{(1+t)}\vec{j} + \underset{z}{(6+4t)}\vec{k}$$

$$\delta: \vec{r}(\lambda) = \underset{x}{(1+2\lambda)}\vec{i} + \underset{y}{(3-3\lambda)}\vec{j} + \underset{z}{(4-2\lambda)}\vec{k}$$

$t, \lambda \in \mathbb{R}$

Το σημείο τομής ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις:

$$\begin{array}{ll} x & 6+3t = 1+2\lambda \\ y & 1+t = 3-3\lambda \\ z & 6+4t = 4-2\lambda \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3t-2\lambda=-5 \\ t+3\lambda=2 \\ 4t+2\lambda=-2 \end{array}$$

, οπότε οι τιμές t και λ που θα προκύψουν από τις 2 πρώτες εξισώσεις πρέπει να επαληθεύουν και την τρίτη εξίσωση

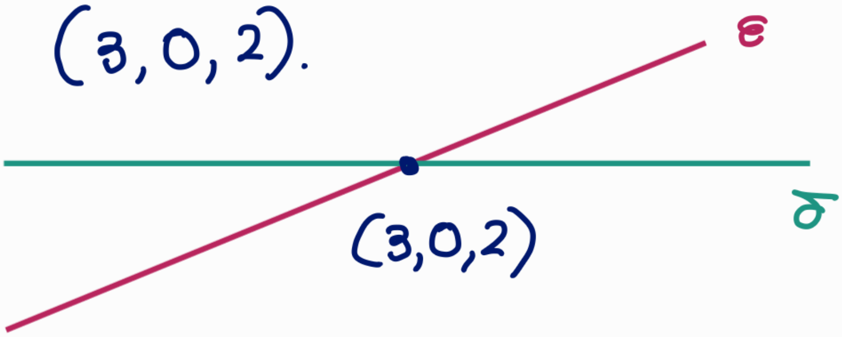
$$\begin{array}{l} 3t-2\lambda=-5 \\ t+3\lambda=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3t-2\lambda=-5 \\ -3t-9\lambda=-6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -11\lambda=-11 \\ \lambda=1 \end{array}$$

και $t=-1$, οι οποίες τιμές ικανοποιούν και την εξίσωση $4t+2\lambda=-2$

Συνεπώς το σημείο τομής έχει συντεταγμένες για $t=-1$

$x = 6+3t = 3$
$y = 1+t = 0$
$z = 6+4t = 2$

$(3,0,2)$.



Να βρεθούν οι παραμετρικές και η διανυσματική εξίσωση της ευθείας $\varepsilon: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{5}$, $z=4$

Λύση

Μας δίνεται η αναλυτική εξίσωση της ευθείας
Την ξαναγράφουμε ως εξής

$$\varepsilon: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-4}{0} = t \quad , t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \varepsilon: \begin{cases} x = 3-t \\ y = -2+5t \\ z = 4+0t \end{cases}$$ παραμετρικές εξισώσεις

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (3-t)\vec{i} + (-2+5t)\vec{j} + 4t\vec{k}$$

Διανυσματική εξίσωση της ευθείας ε