Προαπαιτούμενα για τη γραμμική άλγεβρα: Διανύσματα και εφαρμογές

Γ. Κατσουλέας

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

gkatsouleas@hna.gr

26 Σεπτεμβρίου 2023

Περιεχόμενα

Διανύσματα

Ορισμός. *Διάνυσμα* (vector) καλείται μία διατεταγμένη, πεπερασμένη λίστα αριθμών. Συνήθως συμβολίζονται σε μορφή στήλης ως

$$\begin{bmatrix} -1.1 \\ 0.0 \\ 3.6 \\ -7.2 \end{bmatrix} \quad \text{είτε ως} \quad \begin{pmatrix} -1.1 \\ 0.0 \\ 3.6 \\ -7.2 \end{pmatrix},$$

είτε οριζοντίως, χρησιμοποιώντας διαχωριστικά κόμματα, ως γραμμή

$$(-1.1, 0.0, 3.6, -7.2).$$

Οι επιμέρους αριθμοί της λίστας αναφέρονται ως *στοιχεία* (elements, entries, coefficients, components) του διανύσματος.
Το πλήθος των στοιχείων ενός διανύσματος καλείται *διάσταση* (size, length, dimension).

Συμβολισμός. Συνήθως, γράφουμε

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

όπου $n \in \mathbb{N}^*$ η διάσταση του διανύσματος.
Για παράδειγμα, για το προηγούμενο διάνυσμα έχουμε

$$x = (-1.1, 0.0, 3.6, -7.2) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{και } x_3 = 3.6.$$

Ένα διάνυσμα διάστασης 1 ταυτίζεται με τον αντίστοιχο αριθμό. Δηλαδή, δε διακρίνουμε μεταξύ του διανύσματος $[1.3] \in \mathbb{R}^1$ και του αριθμού $1.3 \in \mathbb{R}$.

Διανύσματα

Ορισμός. *Διάνυσμα* (vector) καλείται μία διατεταγμένη, πεπερασμένη λίστα αριθμών. Συνήθως συμβολίζονται σε μορφή στήλης ως

$$\begin{bmatrix} -1.1 \\ 0.0 \\ 3.6 \\ -7.2 \end{bmatrix} \quad \text{είτε ως} \quad \begin{pmatrix} -1.1 \\ 0.0 \\ 3.6 \\ -7.2 \end{pmatrix},$$

είτε οριζοντίως, χρησιμοποιώντας διαχωριστικά κόμματα, ως γραμμή

$$(-1.1, 0.0, 3.6, -7.2).$$

Οι επιμέρους αριθμοί της λίστας αναφέρονται ως *στοιχεία* (elements, entries, coefficients, components) του διανύσματος.
Το πλήθος των στοιχείων ενός διανύσματος καλείται *διάσταση* (size, length, dimension).

Συμβολισμός. Συνήθως, γράφουμε

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

όπου $n \in \mathbb{N}^*$ η διάσταση του διανύσματος.
Για παράδειγμα, για το προηγούμενο διάνυσμα έχουμε

$$x = (-1.1, 0.0, 3.6, -7.2) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{και } x_3 = 3.6.$$

Ένα διάνυσμα διάστασης 1 ταυτίζεται με τον αντίστοιχο αριθμό. Δηλαδή, δε διακρίνουμε μεταξύ του διανύσματος $[1.3] \in \mathbb{R}^1$ και του αριθμού $1.3 \in \mathbb{R}$.

Ορισμός. Δύο διανύσματα $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ και $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ είναι *ίσα* (συμβ. $a = b$) όταν έχουν την ίδια διάσταση και τα στοιχεία τους σε αντίστοιχες θέσεις συμπίπτουν:

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n.$$

Πλειάδες διανυσμάτων και στοιχεία αυτών

Παράδειγμα. Τα *συνήθη μοναδιαία διανύσματα* έχουν όλα πλην ενός τα στοιχεία τους μηδενικά. Το μοναδικό μη μηδενικό τους στοιχεία είναι ίσο με 1.
Το i–στό μοναδιαίο διάνυσμα (διάστασης n) έχει ως μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο το i–στό του στοιχείο και συμβολίζεται $e_i \in \mathbb{R}^n$. Για παράδειγμα, τα διανύσματα

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

είναι τα τρία συνήθη μοναδιαία διανύσματα διάστασης 3.
Παρατηρήστε ότι ο συμβολισμός e_i εδώ αντιστοιχεί στο i–στό σύνηθες μοναδιαίο διάνυσμα και όχι στο i–στό στοιχείο κάποιου διανύσματος e.
Το i–στό στοιχείο του διανύσματος $e_i \in \mathbb{R}^n$ περιγράφεται ως

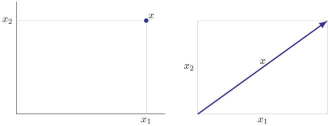
$$(e_i)_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i, \end{cases}$$

για $i, j = 1, \ldots, n$.
Στην αριστερή πλευρά, ο συμβολισμός e_i αντιστοιχεί στο i–στό σύνηθες μοναδιαίο διάνυσμα, ενώ ο συμβολισμός $(e_i)_j$ αντιστοιχεί σε αριθμό, το j–στό στοιχείο του διανύσματος αυτού. Η διάσταση του διανύματος e_i συνήθως καθορίζεται από τα συμφραζόμενα.

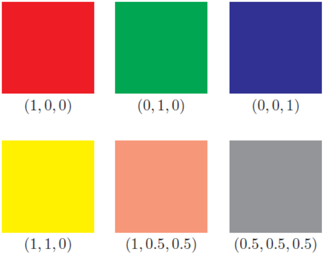
Χρήση διανυσμάτων σε εφαρμογές

Χρήση διανυσμάτων σε εφαρμογές

1. Θέση και μετατόπιση. Ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ μπορεί να αναπαριστά μία θέση σε κάποιο επίπεδο (2-διάστατο χώρο). Τα στοιχεία του διανύσματος στην περίπτωση αυτή, αντιστοιχούν στις στις συντεταγμένες της θέσης. Επίσης, μπορεί να αναπαριστά την μετατόπιση κάποιου αντικειμένου στο επίπεδο αυτό, στην οποία περίπτωση απεικονίζεται ως βέλος.



   Αντίστοιχη λειτουργία μπορεί να έχει ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ σε σχέση με κάποια θέση/μετατόπιση στον 3-διάστατο χώρο.
   Επίσης, μπορεί να αντιστοιχεί στην ταχύτητα ή την επιτάχυνση (σε κάποια δεδομένη στιγμή) ενός σημείου που κινείται σε κάποιο επίπεδο ή 3-διάστατο χώρο.
2. Χρώμα. Ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να αντιπροσωπεύει ένα χρώμα, με τα στοιχεία του να δίνουν τις τιμές έντασης κόκκινου, πράσινου και μπλε (ΡΓΒ) (συχνά μεταξύ 0 και 1). Το διάνυσμα (0, 0, 0) αντιπροσωπεύει το μαύρο χρώμα κλπ.



Χρήση διανυσμάτων σε εφαρμογές (2)

3. Ποσότητες. Ένα διάνυσμα $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να αντιπροσωπεύει τις ποσότητες n διαφορετικών πόρων/προϊόντων που κατέχονται (ή παράγονται ή απαιτούνται) από κάποιο άτομο/εταιρεία.

   Αρνητικές εγγραφές υποδηλώνουν την ποσότητα του αντίστοιχου πόρου που οφείλεται (ή καταναλώνεται κλπ.).

4. Χαρτοφυλάκιο. Ένα $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να αντιπροσωπεύει ένα χαρτοφυλάκιο μετοχών ή μια επένδυση σε n διαφορετικό περιουσιακά στοιχεία, με το στοιχείο s_i να δίνει το πλήθος των μετοχών της εταιρίας–i/την ποσότητα του i-στού περιουσιακού στοιχείου που κατέχει ο επενδυτής.

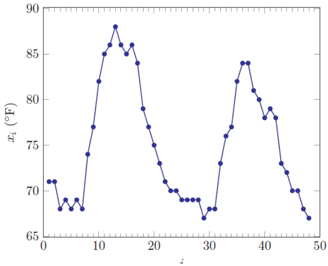
   Το διάνυσμα (100, 50, 20) αντιπροσωπεύει ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από 100 μετοχές της 1ης εταιρείας, 50 μετοχές της 2ης και 20 μετοχές της 3ης. Οι αρνητικές θέσεις (δηλαδή οι μετοχές που οφείλονται σε άλλους επενδυτές) αντιπροσωπεύονται από αρνητικές καταχωρήσεις στις αντίστοιχες θέσεις ενός διανύσματος χαρτοφυλακίου.

5. Παρατηρήσεις σε κάποιον πληθυσμό/δείγμα. Για παράδειγμα, ένας $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να αποθηκεύει την αρτηριακή πίεση ενός δείγματος n ασθενών, με b_i να είναι η αρτηριακή πίεση του ασθενούς i, για $i = 1, \ldots, n$.

6. Συναρτήσεις μάζας πιθανότητας. Τα στοιχεία ενός διανύσματος $\mathbf{p} = (p_1, \ldots p_n) \in \mathbb{R}^n$ μπορούν να ερμηνευθούν ως οι τιμές πιθανότητας για τα μεμονωμένα ενδεχόμενα σε κάποιο χώρο πιθανότητας με n δυνητικά αποτελέσματα. Στην περίπτωση αυτή, απαιτείται $p_i \geq 0$ και $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός τίμιου ζαριού, $\mathbf{p} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

7. Συντελεστές στάθμισης. Τα στοιχεία ενός διανύσματος $\mathbf{w} = (w_1, \ldots w_n) \in \mathbb{R}^n$ μπορούν να ερμηνευθούν ως οι αναλογίες των n συστατικών για την παρασκευή κάποιου μίγματος. Πάλι, απαιτείται $w_i \geq 0$ και $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$.

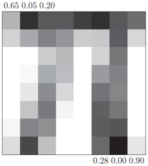
8. Χρονοσειρά. Ένα διάνυσμα μπορεί να αναπαριστά μια χρονοσειρά ή ένα σήμα, δηλαδή την τιμή κάποιας ποσότητας σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Για παράδειγμα, το ηχητικό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως διάνυσμα του οποίου οι καταχωρήσεις δίνουν την τιμή της ακουστικής πίεση σε ίσους χρόνους (συνήθως 48000 ή 44100 ανά δευτερόλεπτο). Ένα διάνυσμα επίσης μπορεί να περιγράφει την ωριαία βροχόπτωση (ή θερμοκρασία ή βαρομετρική πίεση) σε κάποια τοποθεσία για κάποια χρονική περίοδο.
   Ακόλουθως, οπτική αναπαράσταση δεδομένων θερμοκρασίας με ωριαία δειγματοληψία σε χρονικό διάστημα δύο ημερών ($t \in \mathbb{R}^{48}$).



   Αρνητικές εγγραφές υποδηλώνουν την ποσότητα του αντίστοιχου πόρου που οφείλεται (ή καταναλώνεται κλπ.).
9. Ταμειακές ροές. Μία σειρά ταμειακών ροών προς και από κάποια εταιρεία μπορεί να περιγραφεί από ένα διάνυσμα, τα θετικά στοιχεία του οποίου αντιπροσωπεύουν εισπράξεις και τα αρνητικά πληρωμές από την εταιρεία. Για παράδειγμα, με στοιχεία που περιγράφουν τις ταμειακές ροές ανά τρίμηνο, το διάνυσμα $(1000, -10, -10, -10, -1010)$ αντιπροσωπεύει ένα μονοετές δάνειο ονομαστικής αξίας €1000, με πληρωμές τοκών 1% κάθε τρίμηνο, και αποπληρωμή του κεφαλαίου και του τελευταίου τόκου στο τέλος του έτους.

10. Εικόνες και βίντεο. Μια μονόχρωμη (ασπρόμαυρη) εικόνα είναι ένας πίνακας από $M \times N$ pixel (M γραμμές και N στήλες από τετράγωνα εικονοστοιχεία). Κάθε ένα από τα $M \cdot N$ εικονοστοιχεία έχει ομοιόμορφο επίπεδο κλίμακας του γκρι (ένταση/intensity), με την τιμή 0 να αντιστοιχεί στο μαύρο και το 1 να αντιστοιχεί σε έντονο λευκό.
Συνεπώς, μια εικόνα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^{MN}$, τα στοιχεία του οποίου δίνουν τα επίπεδα κλίμακας του γκρι στις θέσεις των εικονοστοιχείων, διατεταγμένα κατά σύμβαση ως προς τις γραμμές ή ως προς τις στήλες.
Ως παράδειγμα χαμηλής ανάλυσης, η ακόλουθη εικόνα 8×8, διατάσσοντας τα εικονοστοιχεία της ως προς τις γραμμές, περιγράφεται από το διάνυσμα

$$x = (0.65,\ 0.05,\ 0.20,\ \ldots,\ 0.28,\ 0.00,\ 0.90) \in \mathbb{R}^{\mathbf{64}}.$$

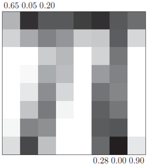


Διάνυσμα για έγχρωμη εικόνα;

Χρήση διανυσμάτων σε εφαρμογές (4)

10. Εικόνες και βίντεο. Μια μονόχρωμη (ασπρόμαυρη) εικόνα είναι ένας πίνακας από $M \times N$ pixel (M γραμμές και N στήλες από τετράγωνα εικονοστοιχεία). Κάθε ένα από τα $M \cdot N$ εικονοστοιχεία έχει ομοιόμορφο επίπεδο κλίμακας του γκρι (ένταση/intensity), με την τιμή 0 να αντιστοιχεί στο μαύρο και το 1 να αντιστοιχεί σε έντονο λευκό.
    Συνεπώς, μια εικόνα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^{MN}$, τα στοιχεία του οποίου δίνουν τα επίπεδα κλίμακας του γκρι στις θέσεις των εικονοστοιχείων, διατεταγμένα κατά σύμβαση ως προς τις γραμμές ή ως προς τις στήλες.
    Ως παράδειγμα χαμηλής ανάλυσης, η ακόλουθη εικόνα 8×8, διατάσσοντας τα εικονοστοιχεία της ως προς τις γραμμές, περιγράφεται από το διάνυσμα

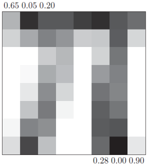
$$x = (0.65,\ 0.05,\ 0.20, \dots, 0.28,\ 0.00,\ 0.90) \in \mathbb{R}^{64}.$$



Διάνυσμα για έγχρωμη εικόνα; Μια έγχρωμη εικόνα $M \times N$ pixel περιγράφεται από ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^{3MN}$, τα στοιχεία του οποίου δίνουν τις τιμές R, G, B για κάθε pixel, με κάποια συμφωνημένη σειρά.
Διάνυσμα για ασπρόμαυρο βίντεο;

10. Εικόνες και βίντεο. Μια μονόχρωμη (ασπρόμαυρη) εικόνα είναι ένας πίνακας από $M \times N$ pixel (M γραμμές και N στήλες από τετράγωνα εικονοστοιχεία). Κάθε ένα από τα $M \cdot N$ εικονοστοιχεία έχει ομοιόμορφο επίπεδο κλίμακας του γκρι (ένταση/intensity), με την τιμή 0 να αντιστοιχεί στο μαύρο και το 1 να αντιστοιχεί σε έντονο λευκό.
Συνεπώς, μια εικόνα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^{MN}$, τα στοιχεία του οποίου δίνουν τα επίπεδα κλίμακας του γκρι στις θέσεις των εικονοστοιχείων, διατεταγμένα κατά σύμβαση ως προς τις γραμμές ή ως προς τις στήλες.
Ως παράδειγμα χαμηλής ανάλυσης, η ακόλουθη εικόνα 8×8, διατάσσοντας τα εικονοστοιχεία της ως προς τις γραμμές, περιγράφεται από το διάνυσμα

$$x = (0.65,\ 0.05,\ 0.20, \dots, 0.28,\ 0.00,\ 0.90) \in \mathbb{R}^{\mathbf{64}}.$$



Διάνυσμα για έγχρωμη εικόνα; Μια έγχρωμη εικόνα $M \times N$ pixel περιγράφεται από ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^{\mathbf{3}MN}$, τα στοιχεία του οποίου δίνουν τις τιμές R, G, B για κάθε pixel, με κάποια συμφωνημένη σειρά.
Διάνυσμα για ασπρόμαυρο βίντεο; Ένα απρόμαυρο βίντεο, δηλαδή μια ακολουθία μήκους K εικόνων με $M \times N$ εικονοστοιχεία η καθεμιά, μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^{KMN}$ (και πάλι, με κάποια συγκεκριμένη σειρά).

Χρήση διανυσμάτων σε εφαρμογές (5)

11. Ανάλυση κειμένου. Ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να αντιπροσωπεύει τον αριθμό των φορών κάθε λέξη ενός λεξικού που περιλαμβάνει n λέξεις εμφανίζεται σε κάποιο έγγραφο. Για παράδειγμα, το διάνυσμα $(25, 2, 0)$ σημαίνει ότι η πρώτη λέξη λεξικού εμφανίζεται 25 φορές, η δεύτερη δύο φορές και η τρίτη καθόλου.
12. Αγορές πελατών. Ένα διάνυσμα $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την καταγραφή των αγορών ενός συγκεκριμένου πελάτη από κάποια επιχείρηση σε κάποιο χρονικό διάστημα, με x_i την ποσότητα (ή την αξία σε ευρώ) του προϊόντος-i που έχει αγοράσει ο πελάτης, για $i = 1, \ldots, n$.
13. Περιγραφή υποσυνόλων. Ένα διάνυσμα $o = (o_1, \ldots, o_n) \in \{0, 1\}^n$ κωδικοποιεί ένα υποσύνολο μιας συλλογής n αντικειμένων, όπου

$$o_i = \begin{cases} 1, \text{το αντικείμενο } i \text{ περιέχεται στο υποσύνολο} \\ 0, \text{το αντικείμενο } i \text{ δεν περιέχεται στο υποσύνολο.} \end{cases}$$

    Τέτοια δυαδικά διανύσματα (κάθε στοιχείο τους είναι είτε 0 είτε 1) αναφέρονται και ως Boolean (προς τιμήν του George Boole).
14. Χαρακτηριστικά ή ιδιότητες. Σε πολλές εφαρμογές, ένα διάνυσμα (διάνυσμα χαρακτηριστικών) συγκεντρώνει n διαφορετικές ποσότητες που αφορούν κάποιο/άτομο αντικείμενο.
    Για παράδειγμα, ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^6$ θα μπορούσε να δώσει την ηλικία, το ύψος, το βάρος, την αρτηριακή πίεση, τη θερμοκρασία και το φύλο κάποιου ασθενή που εισήχθη σε νοσοκομείο. (Η τελευταία καταχώρηση του διανύσματος θα μπορούσε να κωδικοποιηθεί ως $x_6 = 0$ για το αρσενικό, $x_6 = 1$ για το θηλυκό.) Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι ποσότητες που αντιπροσωπεύονται από τα στοιχεία του διανύσματος είναι αρκετά διαφορετικές, με διαφορετικές φυσικές μονάδες.
15. Κωδικολέξεις.

Πρόσθεση/αφαίρεση διανυσμάτων

Ορισμός. Δύο διανύσματα *της ίδιας διάστασης* μπορούν να αθροιστούν κατά στοιχείο, σχηματίζοντας το λεγόμενο *άθροισμά* τους.
Η πρόσθεση διανυσμάτων υποδηλώνεται με τη χρήση του συμβόλου $+$. (Συνεπώς, το σύμβολο $+$ έχει διττή σημασία: υποδήλωνει τη συνήθη πρόσθεση αριθμών, όταν αριστερά και δεξιά του βρίσκονται αριθμοί, και διανυσματική πρόσθεση, όταν αριστερά και δεξιά του εμφανίζονται διανύσματα.) Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Συμβολισμός. Για $\mathsf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathsf{x} + \mathsf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ιδιότητες. Για οποιαδήποτε $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

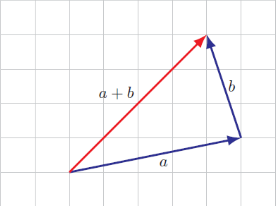
1. Αντιμεταθετική ιδιότητα. $\mathsf{x} + \mathsf{y} = \mathsf{y} + \mathsf{x}$
2. Προσεταιριστική ιδιότητα. $(\mathsf{x} + \mathsf{y}) + \mathsf{z} = \mathsf{x} + (\mathsf{y} + \mathsf{z}) \equiv \mathsf{x} + \mathsf{y} + \mathsf{z}$
3. Μηδενικό στοιχείο. Υπάρχει διάνυσμα $0 = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ φορές}}\right) \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο, ώστε $\mathsf{x} + 0 = 0 + \mathsf{x} = \mathsf{x}$.
4. Αντίθετο στοιχείο. Υπάρχει διάνυσμα $(-\mathsf{x}) = (-x_1, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο, ώστε $\mathsf{x} + (-\mathsf{x}) = (-\mathsf{x}) + \mathsf{x} = 0$.

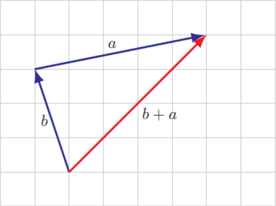
Ορισμός. Η διαφορά διανυσμάτων ορίζεται ως η πρόσθεση του αντιθέτου. Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Εφαρμογές διανυσματικής πρόσθεσης

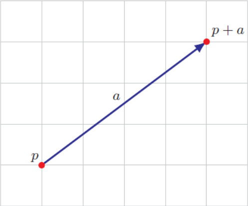
1. Μετατοπίσεις. Όταν τα διανύσματα a και b αντιπροσωπεύουν μετατοπίσεις (στον $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$), το άθροισμα a + b είναι η καθαρή μετατόπιση βρέθηκε μετατοπίζοντας πρώτα κατά a και μετά κατά b:





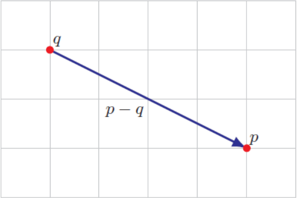
Σημειώστε ότι φτάνουμε στο ίδιο διάνυσμα αν πρώτα μετατοπίσουμε κατά b και μετά κατά a.

Επίσης, όταν το διάνυσμα p αντιπροσωπεύει μια θέση και το διάνυσμα α αντιπροσωπεύει μια μετατόπιση, τότε p + α είναι η θέση του σημείου p, μετατοπισμένη κατά α:



Εφαρμογές διανυσματικής πρόσθεσης (2)

2. Μετατοπίσεις μεταξύ δύο σημείων. Αν τα διανύσματα p και q αντιπροσωπεύουν τις θέσεις δύο σημείων στον διδιάστατο ή τρισδιάστατο χώρο, τότε $p - q$ είναι το διάνυσμα μετατόπισης από το p στο q:

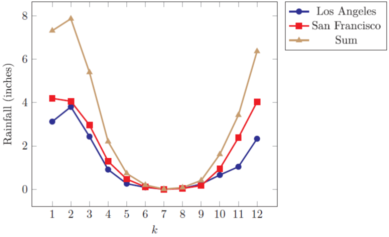


3. Απαρίθμηση λέξεων. Αν τα διανύσματα α και b είναι διανύσματα πλήθους λέξεων (χρησιμοποιώντας το ίδιο λεξικό) για δύο έγγραφα, το άθροισμα $\alpha + b$ είναι το διάνυσμα καταμέτρησης λέξεων ενός νέου εγγράφου που δημιουργήθηκε συνδυάζοντας τα δύο αρχικά (με οποιαδήποτε σειρά). Το διάνυσμα διαφοράς αριθμού λέξεων $\alpha - b$ δίνει πόσες φορές επιπλέον εμφανίζεται κάθε λέξη στο πρώτο έγγραφο, σε σχέση με το δεύτερο.
4. Απαρίθμηση υλικών. Τιμολόγιο υλικών. Ας υποθέσουμε τα διανύσματα $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{R}^n$ δίνουν τις ποσότητες n διαφορετικών πόρων που απαιτούνται για την εκτέλεση m εργασιών. Τότε, το άθροισμα $q_1 + \cdots + q_m \in \mathbb{R}^n$ δίνει το συνολικό πλήθος πόρων που απαιτούνται για την εκτέλεση και των m εργασιών.

Εφαρμογές διανυσματικής πρόσθεσης (3)

5. Εκκαθάριση αγοράς. Έστω ότι το διάνυσμα $\mathrm{q}_i \in \mathbb{R}^n$ αναπαριστά n αγαθά τα οποία παράγονται (όταν το αντίστοιχο στοιχείο είναι θετικό) ή καταναλώνονται (όταν είναι αρνητικό) από την μονάδα-i, όπου $i = 1, \dots, N$. Δηλαδή, η τιμή $(q_{\mathbf{5}})_{\mathbf{4}} = -3.2$ σημαίνει ότι η 5η μονάδα καταναλώνει 3.2 μονάδες του 4ου αγαθού.
   Το άθροισμα $\mathrm{s} = \mathrm{q}_{\mathbf{1}} + \cdots + \mathrm{q}_N \in \mathbb{R}^n$ περιγράφει το καθαρό πλεόνασμα (ή έλλειμμα) αγαθών. Για $\mathrm{s} = 0$, έχουμε κλειστή αγορά, δηλαδή η συνολική ποσότητα που παράγεται από τις μονάδες ισοσκελίζει την συνολική ποσότητα που κατανλώθηκε. Με άλλα λόγια, οι ποσότητες των n αγαθών *ανταλλάχθηκαν* μεταξύ των μονάδων.
6. Μίξη ηχητικών σημάτων. Όταν a και b είναι διανύσματα που αντιπροσωπεύουν ηχητικά σήματα για την ίδια χρονική περίοδο, το άθροισμα $\mathrm{a} + \mathrm{b}$ είναι ένα ηχητικό σήμα που γίνεται αντιληπτό ότι περιέχει και τα δύο ηχητικά σήματα συνδυασμένα σε ένα.
   Αν το a αντιπροσωπεύει ηχογράφηση μιας φωνής και και b την ηχογράφηση της συνοδείας (ίδιας διάρκειας), το ηχητικό σήμα $\mathrm{a} + \mathrm{b}$ περιέχει και τη φωνητική ηχογράφηση και, ταυτόχρονα, τη μουσική συνοδεία.
7. Διαφορές χαρακτηριστικών. Αν f και $\mathrm{g} \in \mathbb{R}^n$ δίνουν τιμές n χαρακτηριστικών για δύο άτομα, το διάνυσμα διαφοράς $\mathrm{d} = \mathrm{f} - \mathrm{g}$ δίνει τη διαφορά στις τιμές των αντίστοιχων χαρακτηριστικών για τα δύο άτομα.
   Για παράδειγμα, η τιμή $d_{\mathbf{7}} = 0$ σημαίνει ότι τα δύο άτομα έχουν την ίδια τιμή για το 7ο χαρακτηριστικό. Αντίστοιχα, η τιμή $d_{\mathbf{3}} = 1.67$ σημαίνει ότι η τιμή του 3ου χαρακτηριστικού του πρώτου ατόμου υπερβαίνει την τιμή του 3ου χαρακτηριστικού του δευτέρου κατά 1.67.

8. Χρονοσειρές. Εάν a και b αντιπροσωπεύουν χρονοσειρές της ίδιας ποσότητας, όπως το ημερήσιο κέρδος σε δύο διαφορετικά καταστήματα, τότε το $a + b$ αντιπροσωπεύει μια χρονοσειρά που είναι το συνολικό ημερήσιο κέρδος στα δύο καταστήματα.
   Ένα παράδειγμα, με μέση μηναία βροχόπτωση σε δύο πόλεις:



9. Διαπραγμάτευση χαρτοφυλακίου. Έστω ότι $s \in \mathbb{R}^n$ δίνει τα πλήθη (ή τις αγοραίες αξίες) των μετοχών σε n περιουσιακά στοιχεία σε κάποιο χαρτοφυλάκιο και $b \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα συναλλαγών που δίνει τα πλήθη των μετοχών σε που αγοράζονται (όταν $b_i > 0$) ή πουλώνται (όταν $b_i < 0$). Μετά το τέλος της διαπραγμάτευσης, το χαρτοφυλάκιό μας δίνεται από το άθροισμα $s + s$.

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός διανυσμάτων (πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα)

Ορισμός. Ο *βαθμωτός πολλαπλασιασμός* ενός διανύσματος με κάποιο βαθμωτό (αριθμό) γίνεται κατά στοιχείο. Δηλαδή,

$$(-2)\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -18 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός συνήθως γράφεται με τον αριθμό να προηγείται του διανύσματος (όπως παραπάνω), αλλά φυσικά είναι δυνατό να γραφεί και αντιστρόφως:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}(1.5) = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 13.5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Τυπικά, για $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Επίσης, γράφουμε (ενδεικτικά):

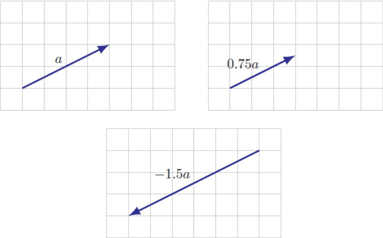
- $x/2$, όπου x κάποιο διάνυσμα, εννοώντας $(1/2)x$.
- Το βαθμωτό γινόμενο $(-1)x$ γράφεται απλούστερα ως $-x$.

Ιδιότητες. Για οποιαδήποτε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x, y \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

1. Αντιμεταθετική ιδιότητα. $\lambda x = x\lambda$
2. Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
3. Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση αριθμών. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
4. Προσεταιριστική ιδιότητα. $\lambda(\mu x) = (\lambda \cdot \mu)x$.
5. $1 \cdot x = x$ και $0 \cdot x = 0$ (όπου στο αριστερό μέλος το 0 υποδηλώνει τον αριθμό, ενώ στο δεξί το μηδενικό διάνυσμα ίδιας διάστασης με το x).

Εφαρμογές βαθμωτού πολλαπλασιασμού

1. Μετατοπίσεις. Όταν ένα διάνυσμα α αντιπροσωπεύει μια μετατόπιση και $\lambda > 0$, τότε $\lambda\alpha$ είναι μια μετατόπιση προς την ίδια κατεύθυνση του α, το μέγεθος της οποίας σταθμίζεται κατά λ. Οταν $\lambda < 0$, τότε $\lambda\alpha$ αντιπροσωπεύει μια μετατόπιση προς την αντίθετη κατεύθυνση του α, το μέγεθος της οποίας σταθμίζεται κατά λ.:



2. Απαιτήσεις υλικών. Ας υποθέσουμε ότι το $\mathrm{q} \in \mathbb{R}^n$ περιγράφει τα απαιτούμενα υλικά για την παραγωγή μιας μονάδας κάποιου προϊόντος. Για να παραχθούν λ μονάδες του προϊόντος θα απαιτηθούν πρώτες ύλες που δίνονται $\lambda\mathrm{q}$. (Εδώ υποθέτουμε ότι $\lambda > 0$.)

3. Ένταση ηχητικού σήματος.

Η έννοια του γραμμικού συνδυασμού

Ορισμός. Έστω $\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, τότε το διάνυσμα

$$\lambda_1 \mathbf{a_1} + \cdots + \lambda_m \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$$

καλείται *γραμμικός συνδυασμός* των διανυσμάτων $\mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a}_n$.

Οι αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ αναφέρονται ως *συντελεστές* του γραμμικού συνδυασμού.

Γραμμικοί συνδυασμοί συνήθων μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e}_n$. Κάθε διάνυσμα $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των συνήθων μοναδιαίων διανυσμάτων ως εξής:

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e_1} + \cdots + b_n \mathbf{e}_n. \tag{1}$$

Οι συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού των $\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e}_n$ στην (1) δεν είναι παρά τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{b}$.
Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

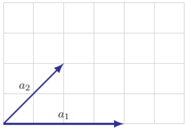
Ειδικοί γραμμικοί συνδυασμοί

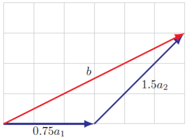
Κάποιοι ειδικοί γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων $a_1, \ldots, a_m$:

- Ο γραμμικός συνδυασμός με όλους τους συντελεστές $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 1$ είναι απλώς $a_1 + \cdots + a_m$, δηλαδή το *άθροισμα* των διανυσμάτων.
- Ο γραμμικός συνδυασμός με όλους τους συντελεστές $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 1/m$ είναι απλώς $(1/m)(a_1 + \cdots + a_m$, δηλαδή το *μέσο* διάνυσμα.
- Όταν το άθροισμα των συντελεστών είναι ένα, δηλαδή $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, ο γραμμικός συνδυασμός καλείται *αφφινικός (ομοπαραλληλικός)*.
- Όταν οι συντελεστές σε κάποιον αφφινικό συνδυασμό είναι μη αρνητικοί, δηλαδή $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, ο γραμμικός συνδυασμός καλείται *κυρτός*. Στην ουσία, αποτελεί έναν σταθμικό μέσο των επιμέρους διανυσμάτων.

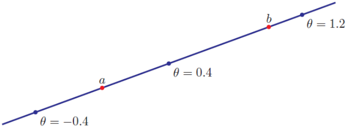
Γραμμικοί συνδυασμοί διανυσμάτων σε εφαρμογές

- Μετατοπίσεις. Όταν τα διανύσματα αντιπροσωπεύουν μετατοπίσεις, ένας γραμμικός συνδυασμός είναι το άθροισμα των σταθμισμένων μετατοπίσεων:





- Μίξη ήχου. Όταν τα $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a}_m$ είναι διανύσματα που αντιπροσωπεύουν ηχητικά σήματα (κατά την ίδια χρονική περίοδο, για παράδειγμα, ηχογραφούνται ταυτόχρονα), ονομάζονται tracks. Ο γραμμικός συνδυασμός $\lambda_1 \mathbf{a_1} + \cdots + \lambda_m \mathbf{a}_m$ γίνεται αντιληπτός ως μία μίξη των tracks, η σχετική ένταση των οποίων δίνεται από τους συντελεστές $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_m|$.
  Ένας παραγωγός σε ένα στούντιο ή ένας μηχανικός ήχου σε μια ζωντανή εκπομπή, επιλέγει τιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ για να δώσει μια καλή ισορροπία μεταξύ των διαφορετικών οργάνων, φωνητικών, κλπ.
- Ευθείες και ευθύγραμμα τμήματα. Όταν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ διακεκριμμένα διανύσματα, ο γραμμικός συνδυασμός $\mathbf{c} = (1-\theta)\mathbf{a} + \theta\beta$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$, περιγράφει ένα σημείο στη γραμμή που διέρχεται από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.
  Όταν το $0 \leq \theta \leq 1$, το $\mathbf{c}$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ και ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.
  Για $n = 2$ και $n = 3$, με τα διανύσματα να αντιπροσωπεύουν συντεταγμένες σημείων στο επίπεδο ή στον 3διάστατο χώρο, αυτό συμφωνεί με τη συνήθη γεωμετρική έννοια του γραμμή και τμήμα.



Εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός. Το (σύνηθες) *εσωτερικό γινόμενο* (*inner product* ή *dot product*) δύο διανυσμάτων με n-στοιχεία ορίζεται ως η βαθμωτή ποσότητα

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = \mathbf{a_1}\mathbf{b_1} + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

δηλαδή το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων συντεταγμένων τους.

Κάποιοι άλλοι συμβολισμοί για το εσωτερικό γινόμενο που απαντώνται στη βιβλιογραφία είναι $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ και $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Ως συγκεκριμένο παράδειγμα υπολογισμού του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, θεωρήστε

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = (-1)(1) + (2)(0) + (2)(-3) = -7.$$

Για $n = 1$, η έννοια του εσωτερικού γινομένου ανάγεται στο σύνηθες γινόμενο δύο αριθμών.

Εσωτερικό γινόμενο: Ιδιότητες

Ιδιότητες. Αν x, y και $z \in \mathbb{R}^n$ διανύσματα ίσου πλήθους στοιχείων και $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- *Αντιμεταθετικότητα.* $x^T y = y^T x$. Η σειρά με την οποία τα δύο διανύσματα εμφανίζονται ως ορίσματα του εσωτερικού γινομένου δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.
- *Προσεταιριστικότητα ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.* $(\lambda x)^T y = \lambda(x^T y)$, ώστε και οι δύο παραστάσεις γράφονται $\lambda x^T y$.
- *Επιμεριστικότητα ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων.* $(x + y)^T z = x^T z + y^T z$. Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να κατανεμηθεί στους επιμέρους όρους που συνθέτουν ένα άθροισμα.

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να συνδυαστούν για να αποδειχθούν άλλες χρήσιμες ταυτότητες, όπως οι σχέσεις:

- $x^T(\lambda y) = \lambda(x^T y)$.
- $x^T(y + \lambda z) = x^T y + \lambda x^T z$.
- $(x + y)^T (z + w) = x^T z + x^T w + y^T z + y^T w$.

Παρατηρήστε ότι τα σύμβολα πρόσθεσης που εμφανίζονται στα αριστερά μέλη των σχέσεων αναφέρονται σε άθροιση διανυσμάτων, ενώ τα σύμβολα πρόσθεσης στα δεξία μέλη αναφέρονται σε άθροιση αριθμών.

Εσωτερικό γινόμενο: Γενικά παραδείγματα

- *Μοναδιαίο διάνυσμα.* $e_i^T x = x_i$. Το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με το i-στό σύνηθες μοναδιαίο διάνυσμα δίνει (ἐπιλέγει') την i-στή συντεταγμένη του x.
- *Άθροισμα.* $1^T x = x_1 + \cdots + x_n$, όπου $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. Το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με το διάνυσμα που έχει όλες τις συντεταγμένες του μοναδιαίες δίνει το άθροισμα των στοιχείων του διανύσματος.
- *Μέσος όρος.* $(1/n)^T x = (x_1 + \cdots + x_n)/n$. Το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με n στοιχεία με το διάνυσμα $1/n$ δίνει τον μέσο όρο (αριθμητικό μέσο) των στοιχείων του διανύσματος.
- *Άθροισμα τετραγώνων.* $x^T x = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του δίνει το άθροισμα των τετραγώνων των στοιχείων του διανύσματος αυτού.
- *Επιλεκτικό άθροισμα.* Έστω b διάνυσμα, τα στοιχεία του οποίου είναι είτε 0 είτε 1. Τότε, η ποσότητα $b^T x$ δίνει το άθροισμα εκείνων των στοιχείων του διανύσματος x που βρίσκονται στις θέσεις για τις οποίες έχουμε $b_i = 1$.