# Ενότητα 6

## ΠΙΝΑΚΕΣ

Στην Ενότητα αυτή θα μελετήσουμε μία από τις βασικότερες έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας η οποία αποτελεί σημαντικό εργαλείο για ένα μεγάλο τμήμα των Μαθηματικών και των εφαρμογών τους: την έννοια του πίνακα. Ξεκινώντας από τους βασικούς ορισμούς και ιδιότητες, στο τέλος της Ενότητας ο αναγνώστης θα έχει επίσης εξοικειωθεί με τις πράξεις μεταξύ πινάκων, τους μετασχηματισμούς πινάκων μέσω πράξεων μεταξύ των γραμμών τους ενώ θα έχει επίσης τη δυνατότητα να χρησιμοποιεί και να υπολογίζει αντίστροφους πίνακες.

Αναλυτικά τα θέματα που θα παρουσιαστούν στην Ενότητα αυτή κατανέμονται στις επόμενες παραγράφους:

## *6.1. Η έννοια του πίνακα.*

### *6.1.1. Τι είναι πίνακας.*

Πίνακας είναι ένα ορθογώνιο πεδίο στοιχείων – συνήθως αριθμών – της μορφής:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 14 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Ο παραπάνω λέμε ότι είναι ένας 2x3 πίνακας αφού έχει 2 γραμμές και 3 στήλες.

### *6.1.2. Γιατί χρησιμοποιούμε πίνακες.*

Οι πίνακες χρησιμοποιούνται για να παρουσιάσουμε συγκροτημένα πληροφορίες που αφορούν καταστάσεις ή διαδικασίες στα πλαίσια των Μαθηματικών ή άλλων θετικών επιστημών αλλά και της καθημερινότητας, οι οποίες εξαρτώνται από πολλές παραμέτρους.

Ο επόμενος πίνακας, για παράδειγμα, μας δίνει άμεσα και συγκεντρωμένα πληροφορίες για τις μέγιστες τιμές θερμοκρασίας που παρατηρούνται σε τρεις διαφορετικές πόλεις της Ελλάδας για τέσσερις συνεχόμενες χρονιές :

| | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 |
|---|---|---|---|---|
| Αθήνα | 42 | 41 | 44 | 47 |
| Θεσσαλονίκη | 38 | 38 | 39 | 41 |
| Πάτρα | 39 | 40 | 42 | 45 |

Έτσι ο 3x4πίνακας:

$$\begin{pmatrix} 42 & 41 & 44 & 47 \\ 38 & 38 & 39 & 41 \\ 39 & 40 & 42 & 45 \end{pmatrix}$$

με τρεις γραμμές, οι οποίες αντιστοιχούν στις πόλεις, και τέσσερεις στήλες, μία για κάθε έτος, μας δίνει μια πλήρη εικόνα των δεδομένων μας.

Ανάλογα ο πίνακας

| | $1^{ο}$ τρίμηνο | $2^{ο}$ τρίμηνο | $3^{ο}$ τρίμηνο | $4^{ο}$ τρίμηνο |
|---|---|---|---|---|
| Είδος Α | 24 | 50 | 55 | 12 |
| Είδος Β | 0 | 10 | 9 | 4 |

ή, στην μορφή που συνήθως χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά:

$$\begin{pmatrix} 24 & 50 & 55 & 12 \\ 0 & 10 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

μας δίνει τις πωλήσεις ανά τετράμηνο για δύο διαφορετικά είδη σε μια βιοτεχνία.

Όπως καταλαβαίνει κανείς και από τα προηγούμενα παραδείγματα η θέση κάθε στοιχείου σε έναν πίνακα είναι χαρακτηριστική. Δεν πρόκειται δηλαδή για μία παράθεση των δεδομένων που έχουμε σε τυχαία σειρά αλλά κάθε τιμή έχει συγκεκριμένη θέση στην οποία πρέπει να παρουσιαστεί.

Ας περάσουμε όμως σε έναν περισσότερο τυπικό ορισμό των πινάκων.

### *6.1.3. Ορισμός.*

Ένας ***πίνακας*** $A$ με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς είναι μια διάταξη αριθμών σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & & \alpha_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Οι δείκτες που έχουν χρησιμοποιηθεί για κάθε στοιχείο καθορίζονται από τη θέση του στον πίνακα, δηλαδή τη γραμμή και τη στήλη στην οποία βρίσκεται. Έτσι το στοιχείο $\alpha_{23}$, για παράδειγμα, βρίσκεται στην 2η γραμμή και την 3η στήλη. Πολλές φορές τον προηγούμενο πίνακας των γράφουμε και ως

$$A = (\alpha_{ij}),\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m,$$

δηλώνοντας με αυτόν τον τρόπο ότι το στοιχείο που βρίσκεται στην i-γραμμή και στην j-στήλη του πίνακα είναι το $\alpha_{ij}$.

Ένας πίνακας της μορφής αυτής λέμε ότι έχει ***διάσταση*** $mxn$, όπου m το πλήθος των γραμμών και n το πλήθος των στηλών του πίνακα.

Έτσι για τους πίνακες που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα μπορούμε να πούμε ότι ο $A = \begin{pmatrix} 42 & 41 & 44 & 47 \\ 38 & 38 & 39 & 41 \\ 39 & 40 & 42 & 45 \end{pmatrix}$ έχει διάσταση $3x4$ ενώ ο $B = \begin{pmatrix} 24 & 50 & 55 & 12 \\ 0 & 10 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ είναι διάστασης $2x3$.

### *6.2. Είδη πινάκων.*

Χρησιμοποιώντας κυρίως τη διάσταση ενός πίνακα αλλά και τις τιμές των στοιχείων του, μπορεί να προχωρήσει κανείς σε μία βασική κατηγοριοποίηση των πινάκων:

#### *6.2.1. Τετραγωνικοί πίνακες.*

Ένας πίνακας διάστασης $nxn$, στον οποίο ο αριθμός των γραμμών του είναι ίσος με τον αριθμό των στηλών του, ονομάζεται ***τετραγωνικός πίνακας***. Έτσι, ο πίνακας A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι ένας $2x2$ τετραγωνικός πίνακας, ενώ ο $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 15 \\ 50 & 0 & 42 \end{pmatrix}$ είναι επίσης τετραγωνικός διάστασης $3x3$.

***Διαγώνια στοιχεία*** ενός τετραγωνικού πίνακα ονομάζονται εκείνα των οποίων ***ο αριθμός της γραμμής και ο αριθμός της στήλης στην οποία βρίσκονται συμπίπτουν***:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & & \alpha_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την εναλλακτική παρουσίαση του πίνακα A στην μορφή

$$A = (\alpha_{ij}),\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n,$$

τα διαγώνια στοιχεία είναι τα $\alpha_{ii},\ 1 \le i \le n.$

Έτσι, στα παραδείγματα που είδαμε παραπάνω, τα 1, 3 είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ενώ τα 0, 4, 42 του $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 15 \\ 50 & 0 & 42 \end{pmatrix}$.

#### *6.2.2. Διαγώνιοι, μοναδιαίοι και μηδενικοί πίνακες.*

Κάθε τετραγωνικός πίνακας του οποίου όλα τα μη διαγώνια στοιχεία είναι μηδενικά ονομάζεται ***διαγώνιος πίνακας***:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Έτσι, στους διαγώνιους πίνακες μόνο τα στοιχεία της διαγωνίου μπορούν να πάρουν μη μηδενικές τιμές ενώ όλα τα υπόλοιπα είναι ίσα με μηδέν: $\alpha_{ij} = 0, \alpha\nu\ i \neq j$. Δύο παραδείγματα:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Μια ιδιαίτερα σημαντική κατηγορία διαγώνιων πινάκων είναι οι ***μοναδιαίοι πίνακες***. Πρόκειται για τους πίνακες των οποίων όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με την μονάδα ενώ τα μη διαγώνια είναι μηδενικά:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε για τον προηγούμενο πίνακα αν αυτός έχει *n* γραμμές και *n* στήλες (προσοχή: αριθμός γραμμών = αριθμό στηλών, αφού οι διαγώνιοι πίνακες είναι πριν απ' όλα τετραγωνικοί) είναι $\boldsymbol{I_n}$. Έτσι, ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης 2 είναι ο $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ενώ ο $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο μοναδιαίος διάστασης 3.

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι σε έναν διαγώνιο πίνακα μπορεί, εκτός από τα μη διαγώνια στοιχεία, ακόμα και κάποια ή και όλα τα διαγώνια να είναι επίσης μηδενικά. Έτσι και οι επόμενοι πίνακες είναι διαγώνιοι: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ιδιαίτερη μνεία αξίζει να γίνει για πίνακες όπως ο τελευταίος όπου <u>όλα τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν</u>:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Πίνακες αυτής της μορφής ονομάζονται ***μηδενικοί***. Θα δούμε στη συνέχεια ότι τόσο οι μηδενικοί όσο και οι μοναδιαίοι πίνακες έχουν σημαντικό ρόλο στις πράξεις μεταξύ πινάκων.

### *6.2.3. Τριγωνικοί πίνακες.*

Ανάλογες με αυτές της προηγούμενης παραγράφου υποθέσεις, όπου απαιτούμε τον μηδενισμό μέρους των στοιχείων ενός τετραγωνικού πίνακα, οδηγούν στις κατηγορίες των τριγωνικών πινάκων:

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (\alpha_{ij})$ ονομάζεται ***άνω τριγωνικός*** αν έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο <u>πάνω</u> από την διαγώνιο του:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & & \alpha_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

ενώ κάθε στοιχείο που βρίσκεται κάτω από αυτήν είναι υποχρεωτικά ίσο με μηδέν. Ισχύει δηλαδή ότι $\alpha_{ij} = 0$, αν $i>j$. Παραδείγματα άνω τριγωνικών πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 15 & 3 \\ 0 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε και εδώ ότι μηδενικά στοιχεία μπορούν να βρίσκονται και πάνω από τη διαγώνιο.

Αντίστοιχα, ***κάτω τριγωνικός*** ονομάζεται ένας τετραγωνικός πίνακας $A = (\alpha_{ij})$ αν έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο <u>κάτω</u> από την διαγώνιο του:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

ενώ κάθε στοιχείο που βρίσκεται πάνω από αυτήν είναι υποχρεωτικά ίσο με μηδέν. Ισχύει δηλαδή ότι $\alpha_{ij} = 0$, αν $i<j$. Παραδείγματα κάτω τριγωνικών πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 34 & -9 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι τριγωνικοί πίνακες βοηθούν ιδιαίτερα στην επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

### *6.2.4. Συμμετρικοί - Αντισυμμετρικοί πίνακες.*

Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται ***συμμετρικός*** αν τα στοιχεία του είναι συμμετρικά ως προς της διαγώνιο του:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & & \alpha_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Ισχύει δηλαδή ότι $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, για κάθε επιλογή δεικτών *i, j*. Παραδείγματα συμμετρικών πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 34 & -1 & 0 \\ 34 & -5 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αντίστοιχα, ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{4} & 2 & 6 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

δεν είναι συμμετρικός αφού τα στοιχεία 4 και 2, παρότι βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαγώνιο, δεν είναι ίσα.

Ανάλογα ορίζεται η έννοια του ***αντισυμμετρικού πίνακα:*** Πρόκειται για τετραγωνικούς πίνακες των οποίων τα στοιχεία που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς τη διαγώνιο είναι <u>αντίθετα</u>:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & & \alpha_{1n} \\ -\alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & \alpha_{33} & & \alpha_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{1n} & -\alpha_{2n} & -\alpha_{3n} & \cdots & -\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Ισχύει δηλαδή ότι $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, για κάθε επιλογή δεικτών *i, j*. Παραδείγματα αντισυμμετρικών πινάκων:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 34 & -1 & 0 \\ -34 & -5 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### *6.2.5. Ανάστροφος πίνακας.*

Ας θεωρήσουμε

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & & \alpha_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})$$

έναν *mxn* πίνακα. Ονομάζουμε ***ανάστροφο πίνακα*** του Α, και συμβολίζουμε με $A^T$, τον πίνακα που δημιουργείται αν τα στοιχεία των γραμμών του Α τα γράψουμε σε στήλες και τα στοιχεία των στηλών σε γραμμές:

$$A^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{m2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & & \alpha_{m3} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ji}).$$

**Παραδείγματα.**

1. Ο ανάστροφος του *2x3* πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 14 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ είναι ο $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -2 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ διάστασης *3x2*.
2. Ο ανάστροφος του $2x2$ πίνακα $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι ο, επίσης $2x2$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Για τον $3x2$ πίνακα $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ έχουμε ανάστροφο τον $2x3$: $\Gamma^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
4. Ο $3x3$ πίνακας $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & -13 \end{pmatrix}$ έχει ανάστροφο τον επίσης $3x3$ $\Delta^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & -13 \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε στο τελευταίο παράδειγμα ότι ο αρχικός πίνακας και ο ανάστροφός του συμπίπτουν. Αυτό συμβαίνει γιατί ο Δ είναι συμμετρικός και έτσι η μετατροπή των γραμμών του σε στήλες και αντίστροφα δεν αλλάζει τον πίνακα. Γενικότερα ισχύει <u>για τετραγωνικούς πίνακες</u> ότι :

***Ο πίνακας Α είναι συμμετρικός αν και μόνο αν*** $\boldsymbol{A^T = A}$***,***

***Ο Α είναι αντισυμμετρικός αν και μόνο αν*** $\boldsymbol{A^T = -A}$***.***

### *Ασκήσεις για την Ενότητα 6.2.*

**1.** Ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι διαγώνιοι, ποιοι άνω και ποιοι κάτω τριγωνικοί;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 12 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

**2.** Ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι συμμετρικοί και ποιοι αντισυμμετρικοί;

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 12 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

**3.** Βρείτε την τιμή της παραμέτρου $x$ στους επόμενους πίνακες έτσι ώστε αυτοί να είναι συμμετρικοί:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 2x-1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & x^2 & -1 \\ x & 2 & 0 \\ -x & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**4.** Προσδιορίστε τον ανάστροφο των επόμενων πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 20 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$