Διανυσματικοί χώροι

Γ. Κατσουλέας

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

gkatsouleas@hna.gr

4 Δεκεμβρίου 2023

Περιεχόμενα

Η έννοια του διανυσματικού χώρου

Η έννοια του διανυσματικού χώρου

Ορισμός. Ένα μη κενό σύνολο $V \neq \emptyset$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης:

$$u, v \longrightarrow u + v \in V, \qquad u, v \in V$$

και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού

$$\lambda, u \longrightarrow \lambda \cdot u \in V, \qquad v \in V, \lambda \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}$$

καλείται διανυσματικός χώρος (δ.χ.) πάνω στο σώμα $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ όταν:

1. Το V κλειστό ως προς την πρόσθεση ($u + v \in V$) και ως προς το βαθμωτό γινόμενο ($\lambda \cdot u \in V$).
2. Η πράξη της πρόσθεσης είναι αντιμεταθετική, δηλαδή για κάθε $u, v \in V$ ισχύει $u + v = v + u$.
3. Πρόσθεση προσεταιριστική, δηλαδή για κάθε $u, v, w \in V$ ισχύει $(u + v) + w = v + (u + w)$.
4. Η πράξη της πρόσθεσης έχει ουδέτερο στοιχείο, δηλαδή υπάρχει $0 \in V$, τέτοιο ώστε $u + 0 = 0 + u$, για κάθε $u \in V$.
5. Η πράξη της πρόσθεσης έχει αντίθετο στοιχείο, δηλαδή για κάθε $u \in V$ υπάρχει $(-u) \in V$, τέτοιο ώστε $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
6. Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή για κάθε $u, v \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, ισχύει $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ και $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
7. Για κάθε $u \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, ισχύει $(\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u) = \mu \cdot (\lambda \cdot u)$.
8. ΓΙα κάθε $u \in V$, ισχύει $1 \cdot u = u$.

Τα στοιχεία του δ.χ. V καλούνται διανύσματα, ενώ του σώματος $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ καλούνται συντελεστές.

Παρατήρηση. Εύκολα προκύπτουν από τον ορισμό οι ακόλουθες ιδιότητες:

- $0 \cdot u = 0$.
- $(-1) \cdot u = -u$.

Παρατηρήσεις στον ορισμό του διανυσματικού χώρου

Παρατήρηση. Εύκολα προκύπτουν από τον ορισμό οι ακόλουθες ιδιότητες:

- $0 \cdot u = 0$.

  Πράγματι, για οποιοδήποτε στοιχείο $u \in V$ του διανυσματικού χώρου, έχουμε

$$
\begin{aligned}
0 \cdot u &= \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}} \cdot u + \underbrace{0}_{\in V} && (0 \in V \text{ ουδέτερο στοιχείο}) \\
&= 0 \cdot u + (u + (-u)) && (\text{ύπαρξη αντιστρόφου στοιχείου στην πρόσθεση}) \\
&= (0 \cdot u + u) + (-u) && (\text{προσεταιριστική ιδιότητα πρόσθεσης}) \\
&= (0 \cdot u + 1 \cdot u) + (-u) && (\text{ουδέτερο στοιχείο βαθμωτού πολλαπλασιασμού}) \\
&= ((0 + 1) \cdot u) + (-u) && (\text{επιμεριστική ιδιότητα βαθμωτού πολ/σμού ως προς πρόσθεση}) \\
&= (1 \cdot u) + (-u) && (0 \in \mathbb{R} \text{ ουδέτερο στοιχείο πρόσθεσης στο } \mathbb{R}) \\
&= u + (-u) && (\text{ουδέτερο στοιχείο βαθμωτού πολλαπλασιασμού}) \\
&= 0 \in V && (\text{αντίθετο στοιχείο πρόσθεσης στο } V).
\end{aligned}
$$

- $(-1) \cdot u = -u$.

  Πράγματι, για οποιοδήποτε στοιχείο $u \in V$ του διανυσματικού χώρου, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\underbrace{0}_{\in V} &= \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}} \cdot u && (\text{προηγούμενη παρατήρηση}) \\
&= (1 + (-1)) \cdot u && (\text{υπαρξη αντιθέτου στην πρόσθεση του } \mathbb{R}) \\
&= 1 \cdot u + (-1) \cdot u && (\text{επιμεριστική ιδιότητα βαθμωτού πολ/σμού ως προς πρόσθεση}) \\
&= u + \underbrace{(-1) \cdot u}_{=-u} && (1 \in \mathbb{R} \text{ ουδέτερο στοιχείο βαθμωτού πολ/σμού}),
\end{aligned}
$$

  όπου η ισότητα $(-1) \cdot u = -u$ έπεται από τη μοναδικότητα του αντιθέτου στοιχείου της πρόσθεσης στο V.

Παραδείγματα (και αντιπαραδείγματα...) διανυσματικών χώρων

Μπορούμε για διάφορα σύνολα να εξετάσουμε κατά πόσον αποτελούν διανυσματικούς χώρους (ή όχι...) με άμεση επιβεβαίωση (ή μη, αντιστοίχως) των αντίστοιχων αξιωμάτων του ορισμού.

Εφαρμογή: Να εξεταστεί κατά πόσον το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού n αποτελεί διανυσματικό χώρο.

Παραδείγματα (και αντιπαραδείγματα...) διανυσματικών χώρων

Μπορούμε για διάφορα σύνολα να εξετάσουμε κατά πόσον αποτελούν διανυσματικούς χώρους (ή όχι...) με άμεση επιβεβαίωση (ή μη, αντιστοίχως) των αντίστοιχων αξιωμάτων του ορισμού.

Εφαρμογή: Να εξεταστεί κατά πόσον το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού n αποτελεί διανυσματικό χώρο.

Απάντηση: Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι τα αξιώματα του ορισμού δεν ικανοποιούνται για οποιοδήποτε βαθμό $n \in \mathbb{N}^*$. Πράγματι, ας συμβολίσουμε το σύνολο

$$P_{\mathbf{deg}\ n}[x] = \left\{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0\right\}$$

των πολυωνύμων βαθμού n με πραγματικούς συντελεστές και μεταβλητή x.
Παρατηρούμε ότι

$$p_1(x) = x^n \qquad \text{και} \qquad p_2(x) = x^n + 5 \in P_{\mathbf{deg}\ n}[x], \ \text{αλλά}$$

$$p_1(x) + (-p_2(x)) = x^n - (x^n + 5) = -5 \notin P_{\mathbf{deg}\ n}[x],$$

δηλαδή το σύνολο $P_{\mathbf{deg}\ n}[x]$ δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση πολυωνύμων.

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων

Εφαρμογή: Να εξεταστεί κατά πόσον το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ n αποτελεί διανυσματικό χώρο.

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων

Εφαρμογή: Να εξεταστεί κατά πόσον το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ n αποτελεί διανυσματικό χώρο.

Απάντηση: Συμβολίζουμε τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n με πραγματικούς συντελεστές και μεταβλητή x:

$$P_n[x] = \left\{ a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Για την πράξη της πρόσθεσης πολυώνυμων:
  - Αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$\begin{aligned} p_1(x) + p_2(x) &= (a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0) + \left(a'_n x^n + \cdots a'_1 x + a'_0\right) \\ &= \left(a_n + a'_n\right) x^n + \cdots + \left(a_1 + a'_1\right) x + \left(a_0 + a'_0\right) \\ &= \left(a'_n + a_n\right) x^n + \cdots + \left(a'_1 + a_1\right) x + \left(a'_0 + a_0\right) \\ &= \left(a'_n x^n + \cdots a'_1 x + a'_0\right) + (a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0) \\ &= p_2(x) + p_1(x). \end{aligned}$$

  - Προσεταιριστική ιδιότητα. Ομοίως, έχουμε: $(p_1(x) + p_2(x)) + p_3(x) = p_1(x) + (p_2(x) + p_3(x))$.
  - Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου:

$$\begin{aligned} p_1(x) + 0(x) &= (a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0) + (0 \cdot x^n + \cdots 0 \cdot x + 0) \\ &= (a_n + 0) x^n + \cdots + (a_1 + 0) x + (a_0 + 0) \\ &= a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0 = p_1(x). \end{aligned}$$

  - Ύπαρξη αντιθέτου στοιχείου: Για κάθε πολυώνυμο $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, θέτουμε $-p(x) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x + a_0$ και παρατηρούμε ότι

$$p(x) + (-p(x)) = 0(x).$$

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων (2)

Εφαρμογή: Να εξεταστεί κατά πόσον το σύνολο των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ n αποτελεί διανυσματικό χώρο.

- Για την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού πολυώνυμων επί αριθμό:
  - Επιμεριστική ιδιότητα:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (p_1(x) + p_2(x)) &= \lambda \cdot \left[\left(a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0\right) + \left(a_n' x^n + \cdots a_1' x + a_0'\right) \right] \\
&= \lambda \cdot \left[\left(a_n + a_n'\right) x^n + \cdots + \left(a_1 + a_1'\right) x + \left(a_0 + a_0'\right) \right] \\
&= \lambda \cdot \left(a_n + a_n'\right) x^n + \cdots + \lambda \cdot \left(a_1 + a_1'\right) x + \lambda \cdot \left(a_0 + a_0'\right) \\
&= \left(\lambda \cdot a_n x^n + \cdots \lambda \cdot a_1 x + \lambda \cdot a_0\right) + \left(\lambda \cdot a_n' x^n + \cdots + \lambda \cdot a_1' x + \lambda \cdot a_0'\right) \\
&= \lambda \cdot \left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\right) + \lambda \cdot \left(a_n' x^n + \cdots + a_1' x + a_0'\right) \\
&= \lambda \cdot p_1(x) + \lambda \cdot p_2(x).
\end{aligned}$$

  - Παρόμοια αποδεικνύονται ότι

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \cdot p(x) &= \lambda \cdot p(x) + \mu \cdot p(x), \\
(\lambda \cdot \mu) \cdot p(x) &= \lambda \cdot (\mu \cdot p(x)) .
\end{aligned}$$

  - Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου: Τέλος, όμοια αποδεικνύεται ότι

$$1 \cdot p(x) = p(x).$$

Συνεπώς, ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n με πραγματικούς συντελεστές και μεταβλητή x

$$P_n[x] = \left\{ a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \,:\, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

είναι διανυσματικός χώρος.

Άλλα χαρακτηριστικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων

1. Το σύνολο
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$
εφοδιασμένο με την πρόσθεση
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
και το βαθμωτό γινόμενο
$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$$
είναι διανυσματικός χώρος με ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης το μηδενικό διάνυσμα
$$0 = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$$
και αντίθετο στοιχείο του τυχαίου $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ το
$$-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n.$$
2. Το σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$:
$$C([\alpha, \beta]) = \{f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R} : \text{η } f \text{ είναι συνεχής συνάρτηση}\}.$$
3. Το σύνολο όλων των $n \times m$ πραγματικών πινάκων.

Άλλα χαρακτηριστικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων: Ασκήσεις

1. Να εξεταστεί αν το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων που έχουν μέχρι και δεύτερης τάξης παραγώγους και ικανοποιούν την (γραμμική διαφορική) εξίσωση
$$f''(x) + \alpha f'(x) + \beta = 0,$$
όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω στο $\mathbb{R}$ (ως προς την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό συναρτήσεων).

2. Να εξεταστεί αν τα σύνολα
$$V = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\}$$
και
$$E = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \right\}$$
αποτελούν διανυσματικό χώρους πάνω στο $\mathbb{R}$ (ως προς την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό συναρτήσεων).

Η έννοια του διανυσματικού υπόχωρου

Η έννοια του διανυσματικού υπόχωρου

Ορισμός

Ένα μη κενό υποσύνολο U ενός δ.χ. V ($U \subseteq V, U \neq \emptyset$), εφοδιασμένο με τις ίδιες πράξεις, είναι επίσης δ.χ. καλείται υπόχωρος του V (συμβ. $U \leq V$).

- Για να αποδείξουμε ότι ένα υποσύνολο U ενός δ.χ. V είναι υπόχωρος του V, αρκεί να δείξουμε ότι οι πράξεις "$+$" και "$\cdot$" είναι κλειστές στο U, δηλαδή

  i. $u + v \in U$, για κάθε $u, v \in U$,

  ii. $\lambda \cdot u \in U$, για κάθε $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

  Ισοδύναμα,

  $$\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in U, \text{ για κάθε } u, v \in U, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}.$$

- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον δύο υπόχωρους, τον ίδιο τον V, και τον τετριμμένο υπόχωρο $\{\mathbb{O}\}$.

Διανυσματικοί υπόχωροι: Παραδείγματα (και αντιπαραδείγματα...)

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο

$$V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

1. Να εξεταστεί κατά πόσον το σύνολο

$$W_1 = \{(x, y) : y = 2x\} \subset \mathbb{R}^2$$

   αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$.

2. Να εξεταστεί κατά πόσον το σύνολο

$$W_2 = \{(x, y) : y = 2x + 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

   αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$.

Διανυσματικοί υπόχωροι: Παραδείγματα (και αντιπαραδείγματα...)

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο

$$V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

1. Να εξεταστεί κατά πόσον το σύνολο

$$W_1 = \{(x, y) : y = 2x\} \subset \mathbb{R}^2$$

αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$.

Θεωρούμε $w_1, w_2 \in W_1$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$w_1 = (x_1, y_1) \in W_1 \Rightarrow y_1 = 2x_1,$$
$$w_2 = (x_2, y_2) \in W_1 \Rightarrow y_2 = 2x_2.$$

Εξετάζουμε κατά πόσον:

- $w_1 + w_2 \in W_1$.
  Πράγματι, έχουμε

$$w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in W_1.$$

- $\lambda \cdot w_1 \in W_1$.
  Πράγματι, έχουμε

$$\lambda \cdot w_1 = \lambda \cdot (x_1, y_1) = (\lambda \cdot x_1, 2(\lambda \cdot x_1)) \in W_1.$$

Επομένως, $W_1 \subset \mathbb{R}^2$ υπόχωρος.

Διανυσματικοί υπόχωροι: Παραδείγματα (και αντιπαραδείγματα...)

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο

$$V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}\,.$$

2. Να εξεταστεί κατά πόσον το σύνολο

$$W_2 = \{(x, y) : y = 2x + 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$.
Θεωρούμε $w_1, w_2 \in W_2$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned} w_1 &= (x_1, y_1) \in W_2 \Rightarrow y_1 = 2x_1 + 1, \\ w_2 &= (x_2, y_2) \in W_2 \Rightarrow y_2 = 2x_2 + 1. \end{aligned}$$

Εξετάζουμε κατά πόσον:

- $w_1 + w_2 \in W_1$.
  Πράγματι, έχουμε

$$w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, (2x_1 + 1) + (2x_2 + 1)) = \left(x_1 + x_2, \underbrace{2\,(x_1 + x_2) + 2}_{\neq 2(x_1 + x_2)}\right) \notin W_2\,.$$

Επομένως, $W_2 \subset \mathbb{R}^2$ δεν αποτελεί διαν. υπόχωρο.
Απλούστερα, θα μπορούσαμε αμέσως να παρατηρήσουμε ότι το σύνολο W_2 δεν περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων (δηλαδή, το μηδενικό διάνυσμα που αποτελεί ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης διανυσμάτων), ώστε η πρόσθεση διανυσμάτων δεν είναι καλώς ορισμένη στο υποσύνολο W_2...

Διανυσματικοί υπόχωροι: Παραδείγματα (και αντιπαραδείγματα...)

Παράδειγμα: Έστω ο δ.χ. $V = \mathbb{R}^3$, εφοδιασμένος με τις γνωστές πράξεις.

- Το υποσύνολο

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = 0\} = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

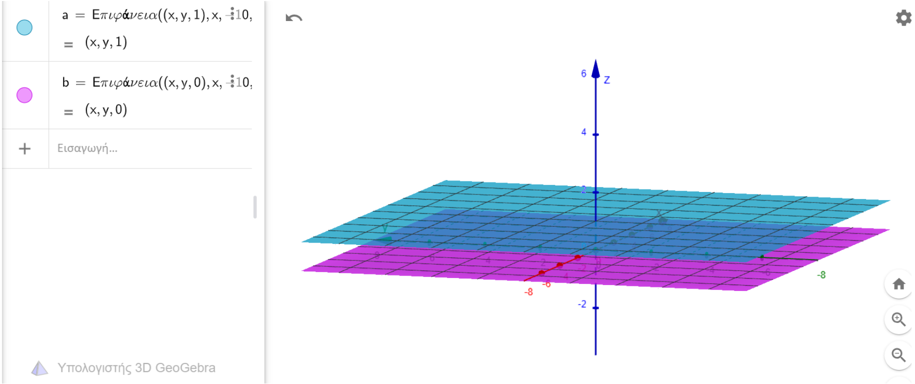
  είναι υπόχωρος του $V = \mathbb{R}^3$.

- Το υποσύνολο

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = 1\} = \{(x_1, x_2, 1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

  δεν είναι υπόχωρος του $V = \mathbb{R}^3$.

Διανυσματικοί υπόχωροι: Παραδείγματα (και αντιπαραδείγματα...)



Διανυσματικοί υπόχωροι: Παραδείγματα (και αντιπαραδείγματα...)

Άσκηση: Να εξεταστεί κατά πόσον τα ακόλουθα σύνολα αποτελούν διανυσματικούς υπόχωρους του αντίστοιχου διανυσματικού χώρου.

- $S = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής$, f(x) \geq 0 \forall x \in [-1, 1]\}$
- $V = \{$Τα πολυώνυμα βαθμού 4, με πραγματικούς συντελεστές$\}$
- $W = \{A \in M_{n\times n} : \det(A) = 0\}$
- $V \backslash W = \{v \in V : v \notin W\}$, όπου V διανυσματικός χώρος και W υπόχωρος του V.

Διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$:

- Ο μηδενικός (τετριμμένος) υπόχωρος $\{0\}$, όπου με 0 συμβολίζουμε εδώ το αντίστοιχο ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης του χώρου (αρχή των αξόνων/μηδενικό διάνυσμα $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
- Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των σξόνων δηλαδή οι ευθείες

$$\left\{(x, \alpha x) : \alpha, x \in \mathbb{R}^2\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$\left\{(0, y) : y \in \mathbb{R}^2\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

- Ο ίδιος ο χώρος $\mathbb{R}^2$, δηλ. όλο το επίπεδο (επίσης τετριμμένος).

Είναι εύκολο (άσκηση) να διαπιστώθεί ότι όλα τα προαναφερόμενα σύνολα αποτελούν διαν. υπόχωρους του $\mathbb{R}^2$. Όπως θα αντιληφθούμε όταν εισάγουμε και την έννοια της διάστασης υπόχωρου, αποτελούν και τους μοναδικούς διαν. υπόχωρους του $\mathbb{R}^2$.

Διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$:

- Ο μηδενικός (τετριμμένος) υπόχωρος $\{0\}$, όπου με 0 συμβολίζουμε το αντίστοιχο ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης του χώρου (αρχή των αξόνων/μηδενικό διάνυσμα $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.
- Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των σξόνων δηλαδή οι ευθείες
$$\{t\,(\alpha, \beta, \gamma) : t \in \mathbb{R}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\} \subset \mathbb{R}^3$$
που ορίζονται από τη διεύθυνση κάποιου μη μηδενικού διανύσματος $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$.
- Όλα τα επίπεδα που περιέχουν την αρχή των αξόνων, δηλ. επίπεδα της μορφής
$$\{(x, y, z) : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$
- Ο ίδιος ο $\mathbb{R}^3$, δηλ. όλος ο εποπτικός χώρος (επίσης τετριμμένος).

Τομή και άθροισμα υπόχωρων

Συμβολισμός

Έστω ένας δ.χ. V και δύο υπόχωροί του, U και W. Τότε ορίζουμε την τομή των U και W:

$$U \cap W = \{u \in V : u \in U \text{ και } u \in W\}$$

και το άθροισμα των U και W,

$$U + W = \{u + w \in V : u \in U \text{ και } w \in W\}$$

Τομή και άθροισμα υπόχωρων

Συμβολισμός

Έστω ένας δ.χ. V και δύο υπόχωροί του, U και W. Τότε ορίζουμε την τομή των U και W:

$$U \cap W = \{u \in V : u \in U \text{ και } u \in W\}$$

και το άθροισμα των U και W,

$$U + W = \{u + w \in V : u \in U \text{ και } w \in W\}$$

Θεώρημα

Η τομή και το άθροισμα δύο υπόχωρων U και W ενός δ.χ. V είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος του V.

Απόδειξη: Για κάθε $x, y \in U \cap W$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, ισχύει

$$\begin{cases} x, y \in U, \\ x, y \in W \end{cases} \overset{\Rightarrow}{U, W \leq V} \begin{cases} \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in U, \\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in W \end{cases} \Rightarrow \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in U \cap W \Rightarrow U \cap W \leq V.$$

Τομή και άθροισμα υπόχωρων

Θεώρημα

Η τομή και το άθροισμα δύο υπόχωρων U και W ενός δ.χ. V είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος του V.

Απόδειξη: Επιπλέον, για κάθε $x, y \in U + W$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, έχουμε

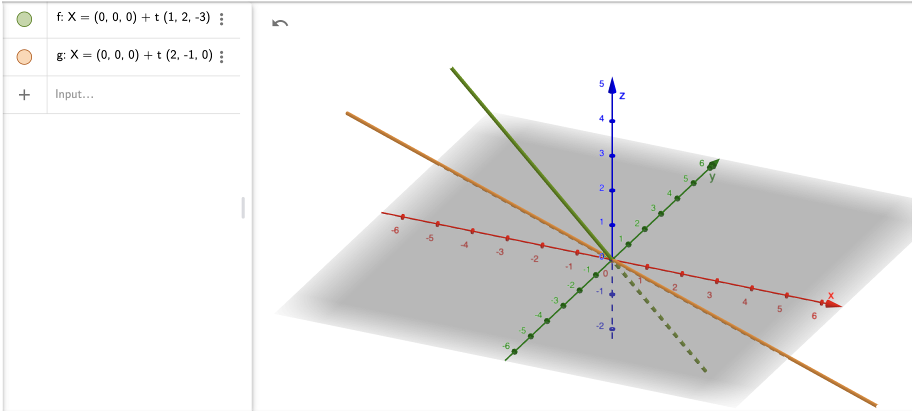
$$x = x_U + x_W, \text{ με } x_U \in U, x_W \in W, \text{ και } y = y_U + y_W, \text{ με } y_U \in U, y_W \in W$$

και επομένως

$$\begin{cases} \lambda \cdot x_U + \mu \cdot y_U \in U, \\ \lambda \cdot x_W + \mu \cdot y_W \in W \end{cases} \Rightarrow (\lambda \cdot x_U + \mu \cdot y_U) + (\lambda \cdot x_W + \mu \cdot y_W) \in U + W$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot x + \mu y \in U + W \Rightarrow U + W \leq V.$$

Τομή υπόχωρων

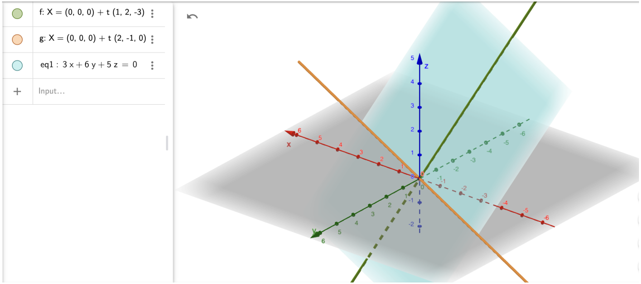


Στο παράδειγμα αυτό, θεωρούμε τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$:

- $U = \{t(1, 2, -3) : t \in \mathbb{R}\}$ (ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων) και
- $W = \{t(2, -1, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ (ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, παρατηρείστε ότι ανήκει στο επίπεδο-xy).

Προφανώς $U \cap W = \{0\}$ ο τετριμμένος υπόχωρος.

Άθροισμα υπόχωρων



- Θεωρούμε τους υπόχωρους $U = \{t(1, 2, -3) : t \in \mathbb{R}\}$ και $W = \{t(2, -1, 0) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Ο υπόχωρος άθροισμα $U + W = \{(x, y, z) : 3x + 6y + 5z = 0\}$ αποτελεί επίπεδο που διέρχεται από την αρχή και περιλαμβάνει τους επιμέρους υποχώρους U, W. Υπολογίζεται ως εξής:

$$\underbrace{t(1, 2, -3)}_{\in U} + \underbrace{s(2, -1, 0)}_{\in W} = (t + 2s, 2t - s, -3t) \in U + W,$$

απ΄όπου, θέτοντας $(x, y, z) = (t + 2s, 2t - s, -3t)$ και απαλοίφοντας των παραμέτρων t και s έχουμε

$$\begin{cases} x = t + 2s, \\ y = 2t - s, \\ z = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}z + 2\left(-\frac{2}{3}z - y\right), \\ s = -\frac{2}{3}z - y, \\ t = -\frac{1}{3}z \end{cases} \Leftrightarrow 3x + 6y + 5z = 0.$$

Παρατηρείστε ότι η εξίσωση $3x + 6y + 5z = 0$ του επιπέδου $U + W$ ικανοποιείται από τα διανύσματα $(1, 2, -3)$ και $(2, -1, 0)$ που ορίζουν τις ευθείες U, W.

Πότε η ένωση υπόχωρων αποτελεί επίσης υπόχωρο;

Άσκηση: Να δειχθεί ότι η ένωση δύο υπόχωρων U και W ενός δ.χ. V είναι υπόχωρος του V αν και μόνον αν $U \leq W$ ή $W \leq U$.

Άσκηση: Να δειχθεί ότι η ένωση δύο υπόχωρων U και W ενός δ.χ. V είναι υπόχωρος του V αν και μόνον αν $U \leq W$ ή $W \leq U$.

Λύση: Για το αντίστροφο, είναι προφανές ότι αν $U \subseteq W$ ή $W \subseteq U$, τότε

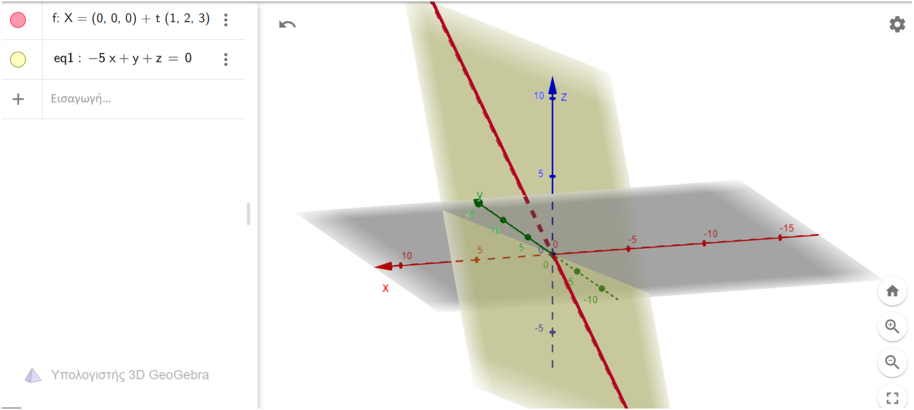
$$U \subseteq W \Rightarrow U \cup W = W = W \leq V \quad \text{και} \quad W \subseteq U \Rightarrow U \cup W = U \leq V.$$

Για το ευθύ, ας υποθέσουμε ότι $U \cup W \leq V$ και ότι οι U, W δεν είναι υπόχωροι ο ένας του άλλου. Θεωρούμε δύο διανύσματα $x \in U$ με $x \notin W$ και $y \in W$ με $y \notin U$. Τότε

$$x, y \in U \cup W \; u \cup \overset{\Rightarrow}{w} \leq v \; x+y \in U \cup W \Rightarrow \begin{cases} x + y \in U \text{ ή,} \\ x + y \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (x + y) - x \in U \text{ ή,} \\ x = (x + y) - y \in W \end{cases}$$

δηλαδή καταλήγουμε σε άτοπο.

Πότε η ένωση υπόχωρων αποτελεί επίσης υπόχωρο;



Στο παράδειγμα αυτό, θεωρούμε τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$:

- $U = \{t(1,2,3) : t \in \mathbb{R}\}$ (ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων) και
- $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -5x + y + z = 0\right\}$ (επίπεδο στο οποίο ανήκει η αρχή των αξόνων).

Παρατηρούμε ότι $U \subset W$, καθώς $(t, 2t, 3t) \in W$ γιατί οι συντεταγμένες ενός στοιχείου του U ικανοποιούν τον περιορισμό

$$-5t + 2t + 3t = 0.$$

Προφανώς, η ένωση $U \cup W = W$ αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$.

Ορισμός

Έστω ένας δ.χ. V και κάποια στοιχεία του $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$. Γραμμική θήκη των $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ καλούμε το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $x_1, x_2, \ldots, x_k$,

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k] = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k : \text{ για κάθε } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}\}.$$

Πρόταση

Η γραμμική θήκη $[x_1, x_2, \ldots, x_k] \subseteq V$ είναι πάντα υπόχωρος του V.

Απόδειξη: Πράγματι, για κάθε $x, y \in [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, έχουμε

$$\begin{cases} x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k, \\ y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k) + \mu(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k) \\ &= (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)x_1 + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)x_2 + \cdots + (\lambda\alpha_k + \mu\beta_k)x_k \\ &\in [x_1, x_2, \ldots, x_k] \Rightarrow [x_1, x_2, \ldots, x_k] \leq V. \end{aligned}$$

Τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ καλούνται γεννήτορες του δ.χ. $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$.

Γραμμική θήκη: Παράδειγμα

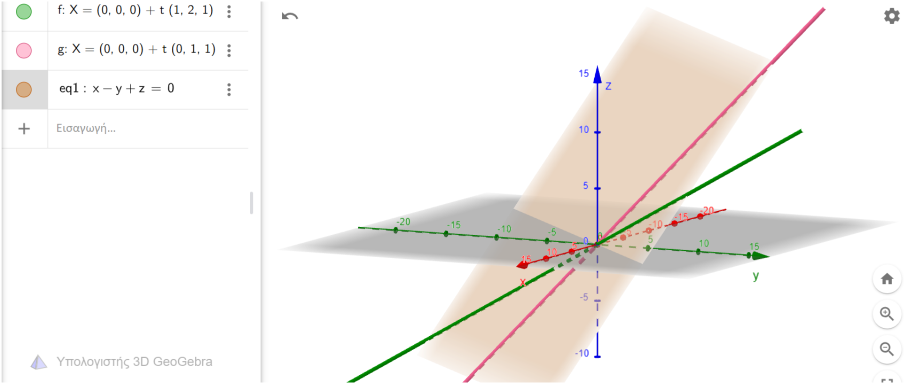
Παράδειγμα: Έστω ο δ.χ. $V = \mathbb{R}^3$ και τα διανύσματα $x_1 = (1, 2, 1)$ και $x_2 = (0, 1, 1)$.

Γραμμική θήκη: Παράδειγμα

Παράδειγμα: Έστω ο δ.χ. $V = \mathbb{R}^3$ και τα διανύσματα $x_1 = (1,2,1)$ και $x_2 = (0,1,1)$. Η γραμμική θήκη των δύο διανυσμάτων είναι

$$\begin{aligned}
[(1,2,1),(0,1,1)] &= \{\alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(0,1,1)) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\alpha_1, \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2), \alpha_1 + \alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, x+z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y,z) : x - y + z = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}\,.
\end{aligned}$$

Γραμμική θήκη: Παράδειγμα



Στην περίπτωση αυτή,

- γραμμική θήκη του διανύσματος $x_1 = (1, 2, 1)$ είναι ο υπόχωρος (ευθεία) $U = \{t(1, 2, 1) : t \in \mathbb{R}\}$,
- γραμμική θήκη του διανύσματος $x_2 = (0, 1, 1)$ είναι ο υπόχωρος (ευθεία) $W = \{t(0, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$,
- γραμμική θήκη και των δύο διανυσμάτων $x_1 = (1, 2, 1)$ και $x_2 = (0, 1, 1)$ είναι ο υπόχωρος (επίπεδο) $U + W = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$.

Χώρος στηλών πίνακα

- Για έναν $n \times m$ πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$:

$$A = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \cdots & \Sigma_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

με στήλες $\Sigma_i \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε ως χώρο των στηλών του (column space) τη γραμμική θήκη των στηλών του:

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(A) &= [(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m)] \\ &= \{x_1\Sigma_1 + x_2\Sigma_2 + \cdots + x_m\Sigma_m : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \cdots & \Sigma_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{Ax : x \in \mathbb{R}^m\}. \end{aligned}$$

Λύση ομογενούς συστήματος ως διανυσματικός υπόχωρος

Άσκηση: Έστω ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$, όπου ο πίνακας του συστήματος A είναι ένας $n \times m$ πραγματικός πίνακας. Να δειχθεί ότι η γενική λύση του συστήματος είναι υπόχωρος του δ.χ. $V = \mathbb{R}^m$.

Λύση ομογενούς συστήματος ως διανυσματικός υπόχωρος

Άσκηση: Έστω ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0$, όπου ο πίνακας του συστήματος A είναι ένας $n \times m$ πραγματικός πίνακας. Να δειχθεί ότι η γενική λύση του συστήματος είναι υπόχωρος του δ.χ. $V = \mathbb{R}^m$.

Λύση: Έστω

$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\right\} \neq \emptyset$$

το σύνολο όλων των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος. Προφανώς, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ και αρκεί να αποδείξουμε την κλειστότητα των πράξεων. Για κάθε $x, y \in U$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ισχύει

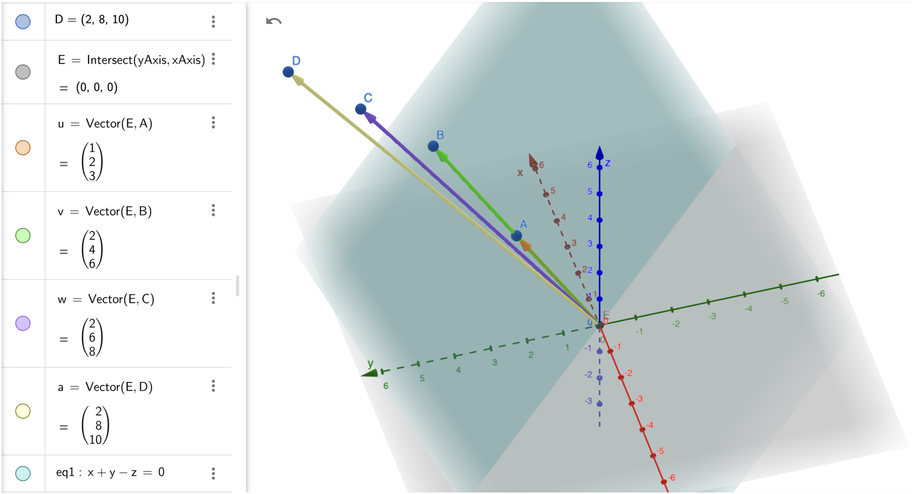
$$\begin{cases} Ax = 0, \\ Ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda(Ax) + \mu(Ay) = 0 \Rightarrow A(\lambda x + \mu y) = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in U \Rightarrow U \leq \mathbb{R}^m.$$

Ορισμός. Για έναν $n \times m$ πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ορίζουμε ως μηδενοχώρο (nullspace) του πίνακα τον χώρο λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0_n\right\}.$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι τετραγωνικός αντιστρέψιμος, σημειώνουμε ότι ο μηδενοχώρος είναι ο μηδενικός (τετριμμένος) υπόχωρος, καθώς το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση (την μηδενική).

Χώρος στηλών πίνακα



- Ο χώρος των στηλών του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ είναι υπόχωρος (επίπεδο) του $\mathbb{R}^3$.
- Δηλαδή, οι στήλες του A δεν καλύπτουν όλο τον χώρο $\mathbb{R}^3$.

Μηδενοχώρος πίνακα

- Ο μηδενοχώρος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ προσδιορίζεται κατά τα γνωστά με λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.
- Η μέθοδος της απαλοιφής καταλήγει στην αντίστοιχη ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Δηλαδή,

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : y, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ορισμός

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητα αν κανένα από αυτά δε μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.
Διαφορετικά, καλούνται γραμμικώς εξαρτημένα.

Παρατηρούμε ότι $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνον αν υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ όχι όλοι μηδενικοί, τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0. \tag{1}$$

Πράγματι, αν $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ γραμμικώς εξαρτημένα και θεωρώντας ότι

$$x_1 = \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \cdots + \gamma_k x_k,$$

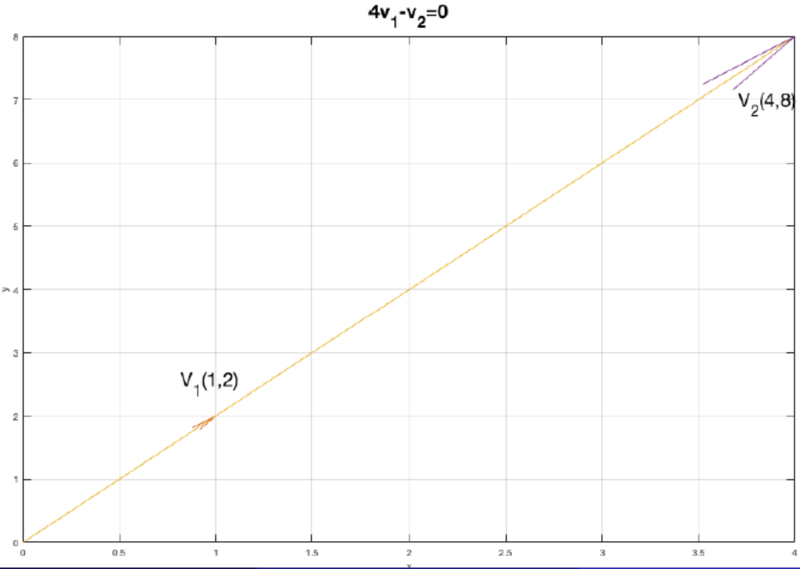
τότε ισχύει η σχέση της μορφής (1):

$$x_1 + (-\gamma_2)x_2 + (-\gamma_2)x_3 + \cdots + (-\gamma_k)x_k = 0,$$

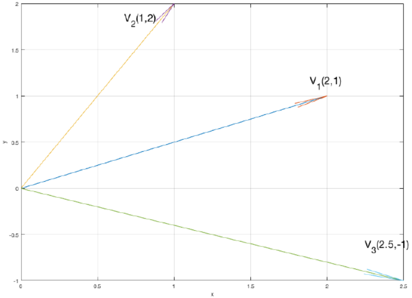
Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ όχι όλοι μηδενικοί, τέτοιοι ώστε να ισχύει η (1). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\lambda_1 \neq 0$. Τότε x_1 γράφεται ως γρ. συνδυασμός των $x_2, x_3, \ldots, x_k$:

$$x_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) x_2 + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) x_3 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) x_k,$$

Γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$



Γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$



Γνωρίζουμε ότι $\{v_1, v_2, v_3\}$ γρ. εξαρτημένα γιατί το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2.5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

έχει μη μηδενικές λύσεις!

Αντίστοιχα, όπως έχουμε δει, οι στήλες του πίνακα στις διαφάνειες 36, 37 είναι γραμμικώς εξαρτημένες (στον $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$).

Γραμμική ανεξαρτησία: Παρατηρήσεις

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Το μονοσύνολο $\mathbb{S} = \{x\} \subset V$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο αν και μόνο αν $x = 0 \in V$.
- Το σύνολο $\mathbb{S} = \{x_1, x_2\} \subset V$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο αν και μόνο αν το ένα διάνυσμα είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου.
- Αν $\mathbb{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset V$ ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων, το σύνολο $\mathbb{S} \cup \{0\}$ είναι γρ. εξαρτημένο. (Γενικότερα, κάθε σύνολο που περιέχει το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικώς εξαρτημένο).
- Αν $\mathbb{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset V$ ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων, το σύνολο $\mathbb{S} \setminus \{x_i\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο, για κάθε $i = 1, \ldots, k$. (Γενικότερα, κάθε υποσύνολο ενός γρ. ανεξάρτητου συνόλου είναι γρ. ανεξάρτητο).
- Αν $\mathbb{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset V$ ένα σύνολο γραμμικώς εξαρτημένων διανυσμάτων, το σύνολο $\mathbb{S} \cup \{x_{k+1}\}$ είναι επίσης γρ. εξαρτημένο. (Γενικότερα, κάθε υπερσύνολο ενός γρ. εξαρτημένο συνόλου είναι γρ. εξαρτημένο).

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας με χρήση του ορισμού: Παραδείγματα

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Τα διανύσματα

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0)^T, \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1)^T \end{aligned}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^n$.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας με χρήση του ορισμού: Παραδείγματα

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- **Τα μονώνυμα $p_{\mathbf{0}}(x) = \mathbf{1}$, $p_{\mathbf{1}}(x) = x$, $p_{\mathbf{2}}(x) = x^{\mathbf{2}}, \ldots, p_n(x) = x^n \in P_n[x]$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον δ.χ. $P_n[x]$ των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n ως προς τη μεταβλητή x.**

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας με χρήση του ορισμού: Παραδείγματα

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Τα μονώνυμα $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2, \ldots, p_n(x) = x^n \in P_n[x]$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον δ.χ. $P_n[x]$ των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n ως προς τη μεταβλητή x.

Πράγματι, η απαίτηση

$$\lambda_0 \cdot p_0(x) + \lambda_1 \cdot p_1(x) + \cdots + \lambda_n \cdot p_n(x) = 0(x)$$

σημαίνει ότι το πολυώνυμο στο 1ο μέλος πρέπει να είναι ταυτοτικά το μηδενικό πολυώνυμο.
Αυτό συμβαίνει μόνον όταν

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας με χρήση του ορισμού: Παραδείγματα

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Να εξεταστεί αν τα διανύσματα $v_1 = (1, 2, 2, 1)^T$, $v_2 = (2, 3, 4, 1)^T$, $v_3 = (3, 8, 7, 5)^T$ του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας με χρήση του ορισμού: Παραδείγματα

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Να εξεταστεί αν τα διανύσματα $v_1 = (1,2,2,1)^T$, $v_2 = (2,3,4,1)^T$, $v_3 = (3,8,7,5)^T$ του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
Γράφουμε την εξίσωση $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ ως το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ο πίνακας του συστήματος ανάγεται στην κλιμακωτή μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, μοναδική λύση του συστήματος είναι η μηδενική $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας με χρήση του ορισμού: Παραδείγματα

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Να εξεταστεί αν τα διανύσματα $v_1 = (2,1,3)^T$, $v_2 = (5,-2,4)^T$, $v_3 = (3,8,-6)^T$ και $v_4 = (2,7,-4)^T$ του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
  Γράφουμε την εξίσωση $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$ ως το σύστημα

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 8\lambda_3 + 7\lambda_4 = 0, \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 6\lambda_3 - 4\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

  Το ομογενές αυτό σύστημα έχει περισσότερους αγνώστους παρά εξισώσεις. Συνεπώς, έχει μη τετριμμένη λύση και τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας με χρήση του ορισμού: Παραδείγματα

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Οποιοδήποτε σύνολο περιλαμβάνει το 0 είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας με χρήση του ορισμού: Παραδείγματα

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

- Οποιοδήποτε σύνολο περιλαμβάνει το 0 είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα είναι ένα από τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$. Έστω $x_i = 0$ για κάποιο $i = 1, \ldots, k$. Τότε ο γραμμικός σύνδυασμός

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_{i-1} + 1x_i + 0x_{i+1} + \cdots + 0x_k = 0$$

με μόνο μη μηδενικό συντελεστή τον λ_i δίνει το μηδενικό διάνυσμα.

Να εξεταστεί αν τα ακόλουθα σύνολα πολυωνύμων είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

- $\mathbb{S} = \left\{p_1 = t^3 + t^2, p_2 = t^3 + t, p_3 = t^2 + t\right\}$.
- $\mathbb{S} = \left\{p_1 = t^2 + t, p_2 = t^2 + t - 2, p_3 = 1\right\}$.

- Έχουμε

$$\lambda_1 p_1(t) + \lambda_2 p_2(t) + \lambda_3 p_3(t) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1(t^3 + t^2) + \lambda_2(t^3 + t) + \lambda_3(t^2 + t) = 0$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)t^3 + (\lambda_1 + \lambda_3)t^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_3, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Άλλη γραφή: Γράφουμε $\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ώστε

$$\lambda_1 p_1(t) + \lambda_2 p_2(t) + \lambda_3 p_3(t) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_3, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας στον $V = \mathbb{R}^n$

- Όπως φαίνεται και από τα προηγούμενα παραδείγματα, η πιο σημαντική περίπτωση είναι ο έλεγχος της γραμμικής ανεξαρτησίας κάποιου συνόλου διανυσμάτων $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$ στον δ.χ. $V = \mathbb{R}^n$.
- Ακολούθως, ως απόρροιες του ορισμού της γραμμικής ανεξαρτησίας, σημειώνουμε δύο μεθόδους για τον έλεγχο της γραμμικής ανεξαρτησίας ενός συνόλου

  $$\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$$

  και για τον προσδιορισμό ελαχίστου πλήθους από γρ. ανεξάρτητα διανύσματα που παράγουν την γρ. θήκη των

  $$[x_1, \ldots, x_m] \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Στην πρώτη από αυτές, όπως έχει ήδη εφαρμοστεί, τα διανύσματα αυτά, τοποθετούνται ως στήλες σε κάποιον πίνακα, για τον οποίο αναζητάται ο χώρος λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.
- Ειδικά όταν το πλήθος των διανυσμάτων που εξετάζονται είναι $m = n$, αρκεί ο έλεγχος της ορίζουσας του αντίστοιχου τετραγωνικού πίνακα (το αντίστοιχο τετραγωνικό σύστημα είναι σύστημα Crammer όταν η ορίζουσα αυτή είναι μη μηδενική και επιδέχεται αποκλειστικά την μηδενική λύση).
- Στην δεύτερη από αυτές, τα διανύσματα αυτά, τοποθετούνται ως γραμμές σε κάποιον πίνακα, ο οποίος τρέπεται στην συνέχεια σε κλιμακωτή μορφή.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας στον $V = \mathbb{R}^n$ (1η Μέθοδος)

Θεώρημα

Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ και ο αντίστοιχος πίνακας $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \in M_{m,n}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1. Τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
2. Το ομογενές σύστημα $A\lambda = 0$ έχει ως λύση τον τετριμμένο υπόχωρο $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$.
3. Το ομογενές σύστημα $R\lambda = 0$, οπου $R \in M_{m,n}$ η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα A, έχει ως λύση τον τετριμμένο υπόχωρο $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$.
4. Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή $R \in M_{m,n}$ του πίνακα A εμφανίζει μη μηδενικό ηγετικό στοιχείο σε κάθε στήλη.

Παρατηρήσεις:

- Ειδικά στην περίπτωση που $n = m$, δηλαδή όταν ο πίνακας A είναι $n \times n$ τετραγωνικός, η γραμμική ανεξαρτησία των $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ισοδυναμεί με τη συνθήκη $det(A) \neq 0$.
- Ειδικά στην περίπτωση που $n > m$, τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας στον $V = \mathbb{R}^n$ (1η Μέθοδος - παραλλαγή της ορίζουσας): Παράδειγμα

- Στον $\mathbb{R}^3$, τα διανύσματα $v_1 = (1, 4, 7)$, $v_2 = (2, 5, 8)$ και $v_3 = (3, 6, 9)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, καθώς

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

- Στον $\mathbb{R}^3$, τα διανύσματα $v_1 = (1, 4, 7)$, $v_2 = (2, 5, 0)$ και $v_3 = (3, 6, 9)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, καθώς

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -48 \neq 0$$

Στα παραδείγματα αυτά, το πλήθος των προς εξέταση διανυσμάτων ταυτίζεται με τη διάσταση του $\mathbb{R}^3$. Κατά συνέπεια, αρκεί ο έλεγχος της ορίζουσας.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας στον $V = \mathbb{R}^n$ (2η μέθοδος)

Παρατηρήσεις:

- Στον δ.χ. $V = \mathbb{R}^n$, αν τα διανύσματα–γραμμές $x_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_k^{(1)}\right)$, $x_2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_k^{(2)}\right)$, $\ldots$, $x_k = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}\right)$ είναι σε κλιμακωτή μορφή, τότε είναι γρ. ανεξάρτητα. Π.χ. στον $V = \mathbb{R}^4$, τα διανύσματα $x_1 = (1, 2, 0, 1)$, $x_2 = (0, -1, 12, 11)$ και $x_3 = (0, 0, 0, 2)$ είναι γρ. ανεξάρτητα.
- Γενικότερα, για τον έλεγχο της γραμμικής εξαρτησίας k διανυσμάτων-γραμμών, θεωρούμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_k^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_k^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \cdots & x_k^{(k)} \end{bmatrix}$$

  και τον κλιμακοποιούμε με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.
- Στην περίπτωση που προκύψουν μηδενικές γραμμές, τα αρχικά διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας στον $V = \mathbb{R}^n$ (2η μέθοδος): Παράδειγμα

Παράδειγμα: Στον δ.χ. $V = \mathbb{R}^4$, για τα διανύσματα $x_1 = (1, 2, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 1)$, $x_3 = (1, -4, 2, 1)$ και $x_4 = (1, -7, 3, 1)$, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι μη μηδενικές γραμμές που προκύπτουν στην κλιμακωτή μορφή αντιστοιχούν σε γρ. ανεξ. διανύσματα που παράγουν τον ίδιο χωρο, ενώ οι μηδενικές γραμμές αντιστοιχούν σε διανύσματα που μπορούν να γραφούν ως γρ. συνδυασμοί των υπολοίπων και γι'αυτό απαλείφονται.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας στον $V = \mathbb{R}^n$: Ένα ακόμα παράδειγμα (με όλες τις δυνατές μεθόδους)

- Εξετάστε αν τα διανύσματα

$$(1,2,3)\,,\quad (1,-1,0)\,,\quad (0,1,-1)\,,$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας στον $V = \mathbb{R}^n$: Ένα ακόμα παράδειγμα (με όλες τις δυνατές μεθόδους)

- Εξετάστε αν τα διανύσματα
$$(1, 2, 3)\,, \quad (1, -1, 0)\,, \quad (0, 1, -1)\,,$$
είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

1. 1ος Τρόπος (Ορισμός).
$$\lambda_1\,(1, 2, 3) + \lambda_2\,(1, -1, 0) + \lambda_3\,(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 - 2 + \lambda_3, 3\lambda_1 - \lambda_3) = (0, 0, 0)$$
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$
Επομένως, τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

2. 1ος Τρόπος (Γραφή με χρήση πινάκων). Θεωρούμε τον πίνακα που έχει τα δοσμένα διανύσματα ως στήλες και εξετάζουμε κατά πόσον το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχει αποκλειστικά την μηδενική (τετριμμένη) λύση:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. 1ος Τρόπος (Παραλλαγή ορίζουσας). Έχουμε $|A| = \cdots = 6$ (υπολογιζόμενη και ως το γινόμενο των pivots στην τελευταία μορφή). Μη μηδενική ορίζουσα $\iff$ διανύσματα γρ. ανεξάρτητα.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας στον $V = \mathbb{R}^n$: Ένα ακόμα παράδειγμα (με όλες τις δυνατές μεθόδους)

- Εξετάστε αν τα διανύσματα

$$(1,2,3)\,, \quad (1,-1,0)\,, \quad (0,1,-1)\,,$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

4. 2ος Τρόπος (Κλιμακωτή μορφή). Θεωρούμε τον πίνακα που έχει τα δοσμένα διανύσματα ως γραμμές και τον τρέπουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Καθώς η κλιμακωτή μορφή δεν εμφανίζει μηδενικές γραμμές, τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Έλεγχος γραμμικής ανεξαρτησίας: Ασκήσεις

- Είναι το σύνολο $\{(1,2),(3,4)\} \subset \mathbb{R}^2$ γρ. ανεξ.;
- Είναι το σύνολο $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ γρ. ανεξ.;
- Είναι το σύνολο $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subset M_2$ γρ. ανεξ.;
- Αν το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, να δειχθεί ότι το σύνολο $\{u_1, u_2, u_3\}$ με $u_1 = v_1 + v_2 + v_3$, $u_2 = v_2 + v_3$ και $u_3 = v_3$ είναι επίσης γρ. ανεξάρτητο.
- Αν το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, να δειχθεί ότι το σύνολο $\{u_1, u_2, u_3\}$ με $u_1 = v_1 - v_2$, $u_2 = v_1 + v_3$ και $u_3 = v_2 - v_3$ είναι επίσης γρ. ανεξάρτητο.

Ορισμός

Αν τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ είναι

- γρ. ανεξάρτητα και
- παράγουν όλο το χώρο V, δηλαδή $[x_1, x_2, \ldots, x_k] = V$,

τότε το σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ καλείται βάση του δ.χ. V.

Παρατήρηση: Προκειμένου να εξεταστεί αν κάποιο σύνολο $\mathbb{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset V$ αποτελεί βάση του V:

1. Σχηματίζουμε τον πίνακα $S = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ και εξετάζουμε αν το ομογενές σύστημα
$$S\Lambda = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = 0 \in V$$
έχει μοναδική λυση τη μηδενική $\Lambda = 0_n$.
2. Ελέγχουμε αν το σύστημα
$$Sx = b$$
είναι συμβιβαστό για κάθε $b \in V$. (Στην περίπτωση αυτή, παρατηρήστε ότι θα έχει επιπλέον και μοναδική λύση.)

Μοναδικότητα αναπαράστασης ως προς βάση

Θεώρημα

Αν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ βάση ενός δ.χ. V, τότε κάθε στοιχείο του V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Απόδειξη: Έστω ένα τυχαίο $y \in V = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ (σίγουρα γράφεται ως γρ. συνδυασμός των $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Ας υποθέσουμε ότι

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n.$$

Τότε

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1)x_1 + (\lambda_2 - \mu_2)x_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)x_n$$

και από τη γρ. ανεξαρτησία των $x_1, x_2, \ldots, x_n$, καταλήγουμε ότι

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n.$$

Συμβολισμός: Αν $\mathbb{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ βάση, τότε οι συντελεστές ενός διανύσματος $v \in V$ ως προς την $\mathbb{S}$ συμβολίζονται

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_{\mathbb{S}}$$

Παράδειγμα: Για την αναπαράσταση του διανύσματος $v = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ ως προς τη βάση

$$\mathbb{S} = \left\{ s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

θέτουμε πρώτα

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

και στη συνέχεια προσδιορίζουμε συντελεστές α_1, α_2, ώστε

$$\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 = v \Leftrightarrow S \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή $v = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{9}{2} s_1 + \frac{5}{2} s_2 \leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}_{\mathbb{S}}$.

Συντεταγμένες ως προς βάση δ.χ.

Εφαρμογή: Να αναπαρασταθεί ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ως προς τη βάση

$$\mathbb{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Διάσταση διανυσματικού χώρου

Ορισμός.
Σε έναν δ.χ. V, το πλήθος των στοιχείων κάθε βάσης του καλείται διάσταση του V και συμβολίζεται $\dim(V)$.

Δηλαδή, αν $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset V$ βάση του V, τότε $\dim(V) = k$.

Αν η διάσταση κάποιου διανυσματικού χώρου V είναι $\dim(V) = k$ γνωρίζουμε τα ακόλουθα:

- Οποιοδήποτε σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του V έχει πλήθος στοιχείων μικρότερο ή ίσο του k.
- Οποιοδήποτε σύνολο διανυσμάτων του V που παράγει όλον τον δ.χ. V (με άλλα λόγια, οποιοδήποτε σύνολο γεννητόρων του V) έχει πλήθος στοιχείων μεγαλύτερο ή ίσο του k.
- Μία βάση του V είναι το μεγαλύτερο δυνατό σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του V και ταυτόχρονα το μικρότερο δυνατό σύνολο γεννητόρων του V.
- Για οποιοδήποτε σύνολο από k σε πλήθος διανύσματα $y_1, \ldots, y_k \in V$, ισχύει:

$$\begin{aligned} y_1, \ldots, y_k \text{ γραμμικώς ανεξάρτητα } &\iff y_1, \ldots, y_k \text{ παράγουν τον } V \\ &\iff \{y_1, \ldots, y_k\} \text{ βάση του } V \end{aligned}$$

- Οποιαδήποτε βάση του V έχει το ίδιο πλήθος διανυσμάτων: ακριβώς k (γραμμικώς ανεξάρτητα) διανύσματα.

Διάσταση διανυσματικού χώρου: Παράδειγμα

Παράδειγμα.
Θεωρούμε τον δ.χ. $V = \mathbb{R}^4$ και τα διανύσματα

$$x_1 = (1,2,0,1)\,, \quad x_2 = (1,-1,1,1)\,, \quad x_3 = (1,-4,2,1)\,, \quad x_4 = (1,-7,3,1)\,.$$

Τότε, όπως έχουμε δεί,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, η γραμμική θήκη

$$U = [(1,2,0,1)\,, (1,-1,1,1)\,, (1,-4,2,1,)\,, (1,-7,3,1,)] = [(1,2,0,1)\,, (1,-1,1,1)]$$

είναι υπόχωρος του $V = \mathbb{R}^4$ με βάση

$$\{(1,2,0,1)\,, (1,-1,1,1)\}$$

και διάσταση

$$\dim(U) = 2.$$

Θεώρημα διάστασης

Θεώρημα

Αν U και W υπόχωροι ενός δ.χ. V, τότε

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

Διάσταση διανυσματικού χώρου: Παράδειγμα

Έστω
$$V_1 = \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}\,, \qquad V_2 = \{(0,y,y) : y \in \mathbb{R}\}\,.$$
Να βρεθούν από μία βάση (και να υπολογιστεί η αντίστοιχη διάσταση) για καθέναν από τους ακόλουθους υπόχωρους:
$$V_1\,, \quad V_2\,, \quad V_1 \cap V_2\,, \quad V_1 + V_2\,.$$

- Για τον V_1.
$$(x,0,0) = x\,(1,0,0)\,.$$
Δηλαδή, μία βάση του V_1 ειναι το διάνυσμα $(1,0,0)$ και $\dim(V_1) = 1$:
$$V_1 = [(1,0,0)]\,.$$

- Για τον V_2.
$$(0,y,y) = y\,(0,1,1)\,.$$
Δηλαδή, μία βάση του V_2 ειναι το διάνυσμα $(0,1,1)$ και $\dim(V_2) = 1$:
$$V_2 = [(0,1,1)]\,.$$

- Για τον $V_1 \cap V_2$. Πρέπει
$$(x,0,0) = (0,y,y,) \Longrightarrow x = 0, y = 0.$$
Άρα, το μοναδικό στοιχείο του χώρου $V_1 \cap V_2$ είναι το $(0,0,0)$. Δηλαδή, η διάσταση είναι μηδενική στην περίπτωση αυτή και γράφουμε
$$V_1 \cap V_2 = \{(0,0,0)\}\,.$$

Διάσταση διανυσματικού χώρου: Παράδειγμα (συνέχεια)

Έστω
$$V_1 = \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\}\,, \qquad V_2 = \{(0,y,y) : y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Να βρεθούν από μία βάση (και να υπολογιστεί η αντίστοιχη διάσταση) για καθέναν από τους ακόλουθους υπόχωρους:
$$V_1\,, \quad V_2\,, \quad V_1 \cap V_2\,, \quad V_1 + V_2\,.$$

- **Για τον $V_1 + V_2$.** Έχουμε
$$\begin{aligned} \dim(V_1 + V_2) &= \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) \\ &= 1 + 1 - 0 \\ &= 2. \end{aligned}$$

  Συνεπώς, η βάση του $V_1 + V_2$ αποτελείται από δύο διανύσματα. Για να τα προσδιορίσουμε, παρατηρούμε
$$(1,0,0) \in V_1 \Rightarrow (1,0,0) \in V_1 + V_2\,,$$
$$(0,1,1) \in V_2 \Rightarrow (0,1,1) \in V_1 + V_2$$
  και ο αντίστοιχος πίνακας
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
  που τα έχει ως γραμμές είναι ήδη σε κλιμακωτή μορφή, τα εν λόγω διανύσματα αποτελούν βάση του $V_1 + V_2$, ώστε
$$V_1 + V_2 = [(1,0,0)\,,(0,1,1)]\,.$$

Διάσταση διανυσματικού χώρου: Παράδειγμα

Έστω
$$V_1 = \{(x,y,z) : x+y+z=0\}\,, \qquad V_2 = \{(x,y,z) : x=y\}\,.$$
Να βρεθούν από μία βάση (και να υπολογιστεί η αντίστοιχη διάσταση) για καθέναν από τους ακόλουθους υπόχωρους:
$$V_1\,, \quad V_2\,, \quad V_1 \cap V_2\,, \quad V_1 + V_2\,.$$

- Για τον V_1. Η σχέση περιορισμού $x+y+z=0 \Rightarrow x=-y-z$. Συνεπώς,
$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (-y-z, y, z) = (-y,y,0) + (-z,0,z)\\ &= y\,(-1,1,0) + z\,(-1,0,1)\,.\end{aligned}$$
Δηλαδή,
$$V_1 = [(-1,1,0)\,,(-1,0,1)]\,.$$
και $\dim(V_2) = 2$.
- Για τον V_2. Από την σχέση περιορισμού $x=y$, έχουμε:
$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (x,x,0) + (0,0,z)\\ &= x\,(1,1,0) + z\,(0,0,1)\,.\end{aligned}$$
Δηλαδή,
$$V_2 = [(1,1,0)\,,(0,0,1)]\,.$$
και $\dim(V_2) = 2$.
- Για τον $V_1 \cap V_2$. Πρέπει
$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x=y \end{cases} \Longrightarrow 3x+z=0 \Longrightarrow z=-2x.$$
Άρα, τα στοιχεία του χώρου $V_1 \cap V_2$ είναι της μορφής $(x,x,-2x) = x\,(1,1,-2)$. Δηλαδή, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ και
$$V_1 \cap V_2 = [(1,1,-2)]\,.$$

Διάσταση διανυσματικού χώρου: Παράδειγμα

Έστω

$$V_1 = \{(x,y,z) : x+y+z=0\}\,, \qquad V_2 = \{(x,y,z) : x=y\}\,.$$

Να βρεθούν από μία βάση (και να υπολογιστεί η αντίστοιχη διάσταση) για καθέναν από τους ακόλουθους υπόχωρους:

$$V_1\,, \quad V_2\,, \quad V_1 \cap V_2\,, \quad V_1 + V_2\,.$$

- Για τον $V_1 + V_2$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \dim(V_1+V_2) &= \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) \\ &= 2+2-1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η βάση του $V_1 + V_2$ αποτελείται από τρία διανύσματα. Για να τα προσδιορίσουμε, τοποθετούμε τα διανύσματα και των δύο βάσεων ως γραμμές σε έναν πίνακα και εργαζόμαστε ώστε να τον τρέψουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι μη μηδενικές γραμμές του τελευταίου πίνακα αποτελούν βάση του $V_1 + V_2$, ώστε

$$V_1 + V_2 = [(-1,1,0)\,, (0,1,-1)\,, (0,0,1)]\,.$$

Διάσταση τομής και αθροίσματος διανυσματικών χώρων: Παράδειγμα

Παράδειγμα: Έστω

$$V_1 = \{(x_1, x_1, x_3, x_4) : x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\},$$
$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, 0) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Να υπολογιστούν οι διαστάσεις των $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$.

Διάσταση τομής και αθροίσματος διανυσματικών χώρων: Παράδειγμα

Παράδειγμα: Έστω

$$V_1 = \{(x_1, x_1, x_3, x_4) : x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\},$$
$$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, 0) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Να υπολογιστούν οι διαστάσεις των $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$.
Προφανώς $x = (x_1, x_1, x_3, x_4) \in V_1$ ακριβώς όταν

$$(x_1, x_1, x_3, x_4) = x_1(1, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(0, 0, 0, 1).$$

Δηλαδή

$$V_1 = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)] \text{ με } dim(V_1) = 3.$$

Όμοια,

$$V_2 = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)] \text{ με } dim(V_1) = 3.$$

Παρατηρούμε ότι

$$V_1 \cap V_2 = \{(x, x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\} = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)] \text{ με } dim(V_1 \cap V_2) = 2.$$

Επομένως,

$$dim(V_1 + V_2) = dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 \cap V_2) = 3 + 3 - 2 = 4.$$

Γενικές ασκήσεις

Γενικές ασκήσεις (1)

1 Έστω τα σύνολα

$$V = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

και

$$U = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

Να δείξτε ότι τα σύνολα V, U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V + U$ και $V \cap U$.

1 Έστω τα σύνολα

$$V = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

και

$$U = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

Να δείξτε ότι τα σύνολα V, U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V+U$ και $V \cap U$.

Λύση: Λύνουμε τα αντίστοιχα ομογενή γραμμικά συστήματα. Για το πρώτο, έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Δηλαδή} \left.\begin{matrix} \alpha = \gamma, \\ \beta = -2\gamma - \delta \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Άρα $V = [(1, -2, 1, 0), (0, -1, 0, 1)]$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ (ως γραμμική θήκη) με $dim(V) = 2$.

1 Έστω τα σύνολα

$$V = \left\{ (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

και

$$U = \left\{ (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

Να δείξτε ότι τα σύνολα V, U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ και να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V+U$ και $V \cap U$.

Λύση: Λύνουμε τα αντίστοιχα ομογενή γραμμικά συστήματα. Για το δεύτερο, έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Δηλαδή } \left.\begin{array}{l} \alpha = \gamma + 2\delta, \\ \beta = -2\gamma - \delta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Άρα $U = [(1,-2,1,0),(2,-1,0,1)]$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ (ως γραμμική θήκη) με $dim(V) = 2$.

1 Έχουμε

$$V = [(1, -2, 1, 0), (0, -1, 0, 1)] \text{ και } U = [(1, -2, 1, 0), (2, -1, 0, 1)] \leq \mathbb{R}^4$$

Να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V + U$ και $V \cap U$.

Λύση: Το άθροισμα $V + U$ ταυτίζεται με τη γραμμική θήκη των διανυσμάτων των βάσεων των V, U, δηλ.

$$V + U = [(1, -2, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (1, -2, 1, 0), (2, -1, 0, 1)] \leq \mathbb{R}^4.$$

Με διαδικασία κλιμακοποίησης, έχουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_1}{\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $V + U = [(1, -2, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (0, -0, 2, 4)] \leq \mathbb{R}^4$. υπόχωρος με $dim(V) = 3$.

Γενικές ασκήσεις (1)

1 Έχουμε

$$V = [(1,-2,1,0),(0,-1,0,1)] \ \text{και} \ U = [(1,-2,1,0),(2,-1,0,1)] \leq \mathbb{R}^4$$

Να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V+U$ και $V \cap U$.

Λύση: Από το θεώρημα διάστασης, προκύπτει ότι

$$dim(V \cap U) = dim(V) + dim(U) - dim(V+U) = 2+2-3 = 1.$$

Για να βρούμε μία βάση, επιλύουμε ταυτόχρονα και τα δύο συστήματα. Ο αντίστοιχος επαυξημένος γράφεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1 \\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 + \Gamma_1 \\ \Gamma_6 \to \Gamma_6 - 2\Gamma_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2 \\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 - \Gamma_2 \\ \Gamma_6 \to \Gamma_6 - \Gamma_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to -\frac{1}{2}\Gamma_4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα $V \cap U = [(1,-2,1,0)] \leq \mathbb{R}^4$. υπόχωρος με $dim(V) = 1$.

2 Έστω τα σύνολα

$$V = \left\{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^5 : \alpha + 2\beta + \gamma = 0, 3\beta - \delta + \epsilon = 0\right\}$$

και

$$U = \left\{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^5 : \alpha + \beta + 2\gamma - \delta = \epsilon\right\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα V, U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$ και να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V + U$ και $V \cap U$.

2 Έστω τα σύνολα

$$V = \left\{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^5 : \alpha + 2\beta + \gamma = 0, 3\beta - \delta + \epsilon = 0\right\}$$

και

$$U = \left\{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^5 : \alpha + \beta + 2\gamma - \delta = \epsilon\right\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα V, U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$ και να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V+U$ και $V \cap U$.

Σχετικά με το πρώτο σύνολο V, παρατηρούμε ότι αποτελεί γραμμική θήκη, αφού

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ \epsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\beta-\gamma\\ \beta\\ \gamma\\ 3\beta+\epsilon\\ \epsilon\end{bmatrix} = \beta\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 3\\ 0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + \epsilon\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

και $V = [(-2,1,0,3,0),(-1,0,1,0,0),(0,0,0,1,1)] \leq \mathbb{R}^5$ με $dim(V) = 3$, δεδομένου ότι

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \overset{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2}{\underset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{\sim}} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$ σε κλιμακωτή μορφή.

2 Έστω τα σύνολα

$$V = \left\{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^5 : \alpha + 2\beta + \gamma = 0, 3\beta - \delta + \epsilon = 0\right\}$$

και

$$U = \left\{(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^5 : \alpha + \beta + 2\gamma - \delta = \epsilon\right\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα V, U είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^5$ και να κατασκευάσετε βάσεις των υπόχωρων V, U, $V + U$ και $V \cap U$.

Επομένως, είδαμε ότι ο χώρος V παράγεται από τα διανύσματα

$$V = [(-2, 1, 0, 3, 0), (-1, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1)],$$

δηλαδή $\dim(V) = 3$, καθώς τα διανύσματα είναι σε κλιμακωτή μορφή.
Ακολούθως, προκειμένου να βρούμε μία βάση για τον χώρο U, λύνουμε το σύστημα

$$\alpha + \beta + 2\gamma - \delta = \epsilon \iff \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ \epsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\\ \alpha + \beta + 2\gamma - \delta\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\2\end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{bmatrix},$$

και U είναι σίγουρα υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ ως γραμμική θήκη

$$U = [(-1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, -2, 3, 0), (0, 0, 0, 1, 1)]$$

(εναλλακτικά, ως μηδενοχώρος του πίνακα-γραμμή $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$). Επιπλέον τα διανύσματα αυτά είναι γρ. ανεξάρτητα (κλιμακωτή μορφή), ώστε $\dim(U) = 4$.

Το άθροισμα $U+V$ ταυτίζεται με την γραμμική θήκη των διανυσμάτων των βάσεων των V και U. Για να βρούμε μία βάση του

$$V+U=[(-2,1,0,3,0),(-1,0,1,0,0),(0,0,0,1,1),(-1,0,1,0,0),(0,1,-2,3,0),(0,0,0,1,1)],$$

κλιμακοποιούμε τα επτά διανύσματα για να δούμε ποια από αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_5 \to \Gamma_5 + 2\Gamma_1, \\ \Gamma_6 \to \Gamma_6 + \Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_5 \to \Gamma_5 - \Gamma_2, \\ \Gamma_6 \to \Gamma_6 - \Gamma_3, \\ \Gamma_7 \to \Gamma_7 - \Gamma_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{\Gamma_5 \to \Gamma_5 - 3\Gamma_4, \\ \Gamma_7 \to \Gamma_7 + 2\Gamma_6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα, $\dim\ (V+U)=5$ και $V+U=\mathbb{R}^5$ με μία βάση

$$V+U=[(1,0,0,0,1),(0,1,0,0,1),(0,0,1,0,2),(0,0,0,1,-1),(0,0,0,0,4)]$$

Απλούστερα, αφού $V+U=\mathbb{R}^5$, θα μπορούσαμε να έχουμε θεωρήσει την συνήθη βάση

$$V+U=[(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)]$$

Γενικές ασκήσεις (2)

Από τη σχέση $\dim\ (V+U) = \dim\ (V) + \dim\ (U) - \dim\ (V \cap U)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \dim\ (V \cap U) &= \dim\ (V) + \dim\ (U) - \dim\ (V+U) \\ &= 3+4-5 = 2. \end{aligned}$$

Για να βρούμε μία βάση του $V \cap U$, επιλύουμε ταυτόχρονα και τα δύο συστήματα

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0, \\ 3\beta - \delta + \epsilon = 0, \\ \alpha + \beta + 2\gamma - \delta - \epsilon = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\overset{\substack{\Gamma_3 \to \frac{1}{3}\Gamma_3, \\ \Gamma_2 \to -\Gamma_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3, \\ \Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και $V\left[(-6,1,4,3,0), (0,-1,2,0,3)\right]$, όπου τα δύο διανύσματα είναι προφανώς γραμμικώς ανεξάρτητα (μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι είναι σε κλιμακωτή μορφή ή ότι το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου), άρα σχηματίζουν βάση της τομής.

Γενικές ασκήσεις (3)

3 Να δείξτε ότι τα ζεύγη $\{(1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$ και $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ αποτελούν βάσεις του ίδιου διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$.

3 Να δείξτε ότι τα ζεύγη $\{(1,2,3),(2,-1,1)\}$ και $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ αποτελούν βάσεις του ίδιου διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$.

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $(1,2,3)$ και $(2,-1,1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου.
Τα διανύσματα $(1,0,1)$ και $(0,1,1)$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα για τον ίδιο λόγο.
Επιβεβαιώνεται λοιπόν ότι οι υπόχωροι

$$V = [(1,2,3)\,,(2,-1,1)] \qquad \text{και} \qquad U = [(1,0,1)\,,(0,1,1)]$$

έχουν διάσταση 2.
Προκειμένου να αποδείξουμε ότι $V = U$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο υπόχωρος

$$V + U = [(1,2,3)\,,(2,-1,1)\,,(1,0,1)\,,(0,1,1)]$$

είναι επίσης διάστασης 2, Έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1,}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\Gamma_2 \to -\frac{1}{5}\Gamma_2,}{\Gamma_3 \to -\frac{1}{2}\Gamma_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2,}{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Είναι λοιπόν φανερό ότι τα διανύσματα της δεύτερης βάσης είναι γραμμικώς εξαρτημένα με εκείνα της πρώτης βάσης, ώστε

$$\text{sim}\,(U + V) = 2$$

και $U = V$.

Γενικές ασκήσεις (4)

4 Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $(1, \alpha, \alpha^2)$, $(1, \beta, \beta^2)$ και $(1, \gamma, \gamma^2)$ να είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Γενικές ασκήσεις (4)

4 Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $(1, \alpha, \alpha^2)$, $(1, \beta, \beta^2)$ και $(1, \gamma, \gamma^2)$ να είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Τα διανύσματα $\left(1, \alpha, \alpha^2\right)$, $\left(1, \beta, \beta^2\right)$, $\left(1, \gamma, \gamma^2\right)$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν στην κλιμακοποίηση του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$ που τα έχει ως γραμμές προκύψει κάποια μηδενική γραμμή, ή ισοδύναμα, αν και μόνον αν ο πίνακας A έχει μηδενική ορίζουσα. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1, \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \beta - \alpha & \beta^2 - \alpha^2 \\ 0 & \gamma - \alpha & \gamma^2 - \alpha^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \beta - \alpha & (\beta - \alpha)(\beta + \alpha) \\ \gamma - \alpha & (\gamma - \alpha)(\gamma + \alpha) \end{vmatrix}$$

$$= (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) \begin{vmatrix} 1 & \beta + \alpha \\ 1 & \gamma + \alpha \end{vmatrix} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta).$$

Συνεπώς, τα τρία διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνον αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διακεκριμμένοι και τα διανύσματα είναι γρ. εξαρτημενα αν και μόνον αν (τουλάχιστον) δύο από τους αριθμούς α, β, γ είναι μεταξύ τους ίσοι.

Γενικές ασκήσεις (5)

5 Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} 6x - 9y - 5z + 8w = \beta, \\ 2x - 7y - 3z + 9w = \gamma, \\ 4x - 2y - 2z - w = \delta, \\ -6x + 3y + 3z + 4w = \epsilon \end{cases} \tag{6}$$

να είναι συμβιβαστό. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι το σύνολο

$$V = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^5 : \text{Το σύστημα (6) είναι συμβιβαστό} \right\}$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^5$ και να κατασκευάσετε μια βάση του.

Γενικές ασκήσεις (5)

Για να δούμε πότε το δοσμένο γραμμικό σύστημα είναι συμβιβαστό, κλιμακοποιούμε με την μέθοδο απαλοιφής τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 & \alpha \\ 6 & -9 & -5 & 8 & \beta \\ 2 & -7 & -3 & 9 & \gamma \\ 4 & -2 & -2 & -1 & \delta \\ -6 & 3 & 3 & 4 & \epsilon \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1, \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1, \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_1, \\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 + 3\Gamma_1}} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 & \alpha \\ 0 & 3 & 1 & -1 & \beta - 3\alpha \\ 0 & -3 & -1 & 6 & \gamma - \alpha \\ 0 & 6 & 2 & -7 & \delta - 2\alpha \\ 0 & -9 & -3 & 13 & \epsilon + 3\alpha \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2, \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 - 2\Gamma_2, \\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 + 3\Gamma_2}} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 & \alpha \\ 0 & 3 & 1 & -1 & \beta - 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \beta + \gamma - 4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -5 & \delta - 2\beta + 4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 3\beta + \epsilon - 6\alpha \end{bmatrix} \underset{\sim}{\substack{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_3, \\ \Gamma_5 \to \Gamma_5 - 2\Gamma_3}} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 & \alpha \\ 0 & 3 & 1 & -1 & \beta - 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \beta + \gamma - 4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta - \beta + \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 2\gamma + \epsilon + 2\alpha \end{bmatrix}$$

Επομένως, το σύστημα (6) είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ικανοποιούν τις σχέσεις $\delta - \beta + \gamma = 0$ και $\beta - 2\gamma + \epsilon + 2\alpha = 0$.

Γενικές ασκήσεις (5)

Είδαμε ότι το σύστημα (6) είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ικανοποιούν τις σχέσεις $\delta - \beta + \gamma = 0$ και $\beta - 2\gamma + \epsilon + 2\alpha = 0$.
Επιπλέον

$$\begin{cases} \delta - \beta + \gamma = 0, \\ \beta - 2\gamma + \epsilon + 2\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = \beta - \gamma, \\ \epsilon = -2\alpha - \beta + 2\gamma \end{cases}$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ -2\alpha - \beta + 2\gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} V &= \left\{ (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^5 : \text{το σύστημα (6) είναι συμβιβαστό} \right\} \\ &= \left[(1, 0, 0, 0, -2), (0, 1, 0, 1, -1), (0, 0, 1, -1, 2) \right], \end{aligned}$$

όπου τα τρία διανύσματα γεννήτορες είναι σε κλιμακωτή μορφή, άρα και γραμμικώς ανεξάρτητα. Δηλαδή, μία βάση του V είναι η $\{(1, 0, 0, 0, -2), (0, 1, 0, 1, -1), (0, 0, 1, -1, 2)\}$.

Γενικές ασκήσεις (6)

6. Να δειχθεί ότι οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$$A = \{(\lambda, 2\lambda, -\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

και

$$B = [(1, -3, 2), (0, 5, -3), (1, -8, 5)]$$

ικανοποιούν τον εγκλεισμό $A \subset B$.

Στη συνέχεια, να προσδιοριστούν διανύσματα $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, ώστε $\{u\}$ βάση του A, $\{u, v\}$ βάση του B και $\{u, v, w\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$. Ποια η διάσταση του $A + B$;