Χαρακτηριστικά ποσά πίνακα, ιδιοτιμές κ' ιδιοδιανύσματα

Έστω A τετραγωνικός πίνακας, λέμε $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή του πίνακα A, όταν υπάρχει διάνυσμα $\vec{u}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$A\vec{u} = \lambda \vec{u}$$

το διάνυσμα $\vec{u}$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ του πίνακα A.

Επειδή ισχύει $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

$$(A - \lambda I_n)\vec{u} = 0 \quad (1)$$

Για να έχει το σύστημα (1) λύσεις $\vec{u} \neq \vec{0}$ πρέπει να ισχύει

$$|A - \lambda I_n| = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A λέγονται τα χαρακτηριστικά ποσά του A.

Παραδείγματα

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

- Για να βρούμε τις ιδιοτιμές λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση

$|A - \lambda I_n| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$

$$\ldots \left|\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2\end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)-6=0$$

$$\Rightarrow 2-3\lambda+\lambda^2-6=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-3\lambda-4=0 \Rightarrow (\lambda-4)(\lambda+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$ ιδιοτιμές του A.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$, έχουμε το σύστημα

$$(A-4I_2)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \left\{ \boxed{x_1 = \frac{2}{3}x_2} \right.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως, $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$, έχουμε το σύστημα

$$(A+I)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \quad \left\{ \boxed{x_1 = -x_2} \right.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = -1$.

2) $$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του A λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$|A - \lambda I_3| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(2-\lambda)-2\right] - 2(2-\lambda-1) + (2-3+\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(6+\lambda^2-5\lambda-2) + 2(\lambda-1) + (\lambda-1) = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) + 3(\lambda-1) = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1) + 3(\lambda-1) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)\left[(2-\lambda)(\lambda-4)+3\right] = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(-\lambda^2+6\lambda-8+3) = 0$$

$$\Rightarrow -(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+5) = 0$$

$$\Rightarrow -(\lambda-1)^2(\lambda-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \ \text{(διπλή)} \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

• Για την ιδιοτιμη $\lambda_1 = 1$, λυνουμε το συστημα

$$(A - I_3)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = -2x_2 - x_3}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Τα $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιανυσματα της ιδιοτιμης $\lambda_1 = 1$

• Για την ιδιοτιμη $\lambda_2 = 5$, λυνουμε το συστημα

$$(A - 5I_3)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}\right\}^{(+)} \quad -2x_1 + 2x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_3}$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow 2x_2 - 2x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = x_1}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Τα $\begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιανυσματα της ιδιοτιμης $\lambda_2 = 5$

το $\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda = 3$.

Διαγωνοποίηση

Ορισμός: Δυο πίνακες A, B λέγονται όμοιοι αν υπάρχη αντιστρέψιμος πίνακας P ώστε

$$\boxed{A = PBP^{-1}}$$

- Οι όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές

Απ:

$$|A - \lambda I_n| = 0 \Rightarrow$$
$$|PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}| = 0 \rightarrow$$
$$|P(B - \lambda I_n)P^{-1}| = 0 \rightarrow$$
$$|P| \cdot |B - \lambda I_n| \cdot |P^{-1}| = 0 \rightarrow$$
$$|P| \cdot |P^{-1}| \, |B - \lambda I_n| = 0 \rightarrow$$
$$|P \cdot P^{-1}| \, |B - \lambda I_n| = 0$$
$$|B - \lambda I_n| = 0$$

Ορισμός Ένα πίνακας A λέγεται διαγωνοποιήσιμος αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο.

- Ένας πίνακας A $n \times n$ διαγωνοποιείται αν έχει n το πλήθος ιδιοδιανύσματα

- Αν ένας πίνακας διαγωνοποιείται τότε μια διαγωνοποίηση του είναι

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

όπου : **D** διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία της διαγωνίου να είναι οι ιδιοτιμές του A

P ο πίνακας που έχει ως στήλες του τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A

<u>**π.χ**</u> $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (από προηγούμενο παράδειγμα)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

είναι μια διαγωνιοποίηση του A.

Τελευταία τροποποίηση: 15:33