Συνδυαστική Ανάλυση

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Συνδυαστική Ανάλυση

Σε αυτό το μάθημα

- Θα μελετήσουμε την απαρίθμηση διατάξεων, συνδυασμών και μεταθέσεων.

Διατάξεις, Μεταθέσεις, Συνδυασμοί

Σχηματισμοί προκύπτουν με την επιλογή ενός συγκεκριμένου αριθμού στοιχείων από το ίδιο σύνολο με δύο βασικούς τρόπους.

- Αν μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφή τους καλούνται **διατάξεις (Permutation).**
- Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής καλούνται **συνδυασμοί (Combination).**

Τέτοιοι σχηματισμοί αποτελούν ένα από τα βασικότερα αντικείμενα μελέτης της Συνδυαστικής.

Διατάξεις και Μεταθέσεις

Έστω ένα σύνολο Χ $= \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο με n διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και k θετικός ακέραιος αριθμός με $k \leq n$.

- **Διάταξη των n στοιχείων ανά k** ή απλά **διάταξη των n ανά k** καλείται κάθε διατεταγμένη k – αδα $a_1, a_2, \ldots, a_k$ που αποτελείται από διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του X.

Διατάξεις και Μεταθέσεις

- Στην περίπτωση k = n αντί του όρου διάταξη των n ανά n, χρησιμοποιούμε τον όρο **μετάθεση των n στοιχείων.**
- Το πλήθος των διατάξεων των n στοιχείων ανά k συμβολίζεται με

$$(\boldsymbol{n})_{\boldsymbol{k}}$$

Διατάξεις και Μεταθέσεις

<u>Παράδειγμα 1:</u>

Οι διατάξεις των $\boldsymbol{n} = \mathbf{4}$ γραμμάτων $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ανά $\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$ είναι οι

$$(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\alpha, \delta), (\beta, \alpha), (\beta, \gamma), (\beta, \delta),$$
$$(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \delta), (\delta, \alpha), (\delta, \beta), (\delta, \gamma),$$

Διατάξεις και Μεταθέσεις

<u>Παράδειγμα 1:</u>

- Παρατηρούμε ότι σε μία οποιαδήποτε διάταξη των 4 γραμμάτων το πρώτο στοιχείο μπορεί να επιλεγεί με 4 τρόπους
- Για κάθε επιλογή της πρώτης θέσης η δεύτερη θέση μπορεί να επιλεγεί με 3 τρόπους.
- Άρα ο αριθμός των διατάξεων των $n = 4$ γραμμάτων $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ανά $k = 2$ είναι

$$4 \cdot 3 = 12$$

Διατάξεις και Μεταθέσεις

Παράδειγμα 2:

Οι μεταθέσεις των των $n = 3$ γραμμάτων $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι οι

$$(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha, \gamma, \beta), (\beta, \alpha, \gamma), (\beta, \gamma, \alpha), (\gamma, \alpha, \beta,), (\gamma, \beta, \alpha)$$

$Εδώ\ ο\ αριθμός\ των\ μεταθέσεων\ είναι$

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Διατάξεις και Μεταθέσεις

Πρόταση:

- **Ο αριθμός των διατάξεων των n στοιχείων ανά k** είναι

$$(\boldsymbol{n})_{\boldsymbol{k}} = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) \cdot (\boldsymbol{n}-\mathbf{2}) \cdot_{\dots} \cdot (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$$

- **Ο αριθμός των μεταθέσεων των n στοιχείων** είναι

$$(\boldsymbol{n})_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) \cdot (\boldsymbol{n}-\mathbf{2}) \cdot_{\dots} \cdot \mathbf{1} = \boldsymbol{n}!$$

Διατάξεις και Μεταθέσεις

<u>**Παρατήρηση:**</u>

Με $\boldsymbol{n}!$ συμβολίζουμε το γινόμενο των n φυσικών αριθμών $1,2,3,\ldots,n$ και διαβάζεται ως **« $\boldsymbol{n}$ – παραγοντικό».**

Δηλαδή:

$$\boldsymbol{n}! = \mathbf{1}\cdot\mathbf{2}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n}\epsilon\mathbb{N}$$

Το σύμβολο $n!$ επεκτείνεται και για $n = 0$, θέτοντας συμβατικά $\mathbf{0}! = \mathbf{1}$.

Διατάξεις και Μεταθέσεις

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Ο αριθμός των **διατάξεων των n στοιχείων ανά k** είναι

$$(\boldsymbol{n})_{\boldsymbol{k}} = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) \cdot (\boldsymbol{n}-\mathbf{2}) \cdot_{\dots} \cdot (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$$

- Το σύμβολο $(n)_k$ επεκτείνεται και για $k = 0$, θέτοντας $(\boldsymbol{n})_{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$.

Διατάξεις και Μεταθέσεις

<u>Παράδειγμα 3:</u>

4 άντρες και 4 γυναίκες έχουν αγοράσει οκτώ εισιτήρια θεάτρου που αντιστοιχούν σε οκτώ συνεχόμενες θέσεις της ίδιας σειράς. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα οκτώ άτομα στις θέσεις ώστε: **(α)** Να μην υπάρχει κανένας περιορισμός για τη θέση που καταλαμβάνει το κάθε άτομο;

(β) Άντρες και γυναίκες να κάθονται εναλλάξ;

Διατάξεις και Μεταθέσεις

<u>**Λύση:**</u>

(α) Αν θεωρήσουμε X το σύνολο των 8 ατόμων, κάθε τοποθέτηση των 8 ατόμων στις 8 θέσεις αντιστοιχεί σε μία μετάθεση των $n = 8$ στοιχείων του συνόλου X. Άρα υπάρχουν

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 8 = 40320$$

διαφορετικοί τρόποι κατάληψης των 8 θέσεων.

Διατάξεις και Μεταθέσεις

(β) Θεωρούμε X_1 το σύνολο των γυναικών (Γ) και X_2 το σύνολο των αντρών (Α).

Οι τοποθετήσεις που μας ενδιαφέρουν μπορούν να χωριστούν σε δύο ξένες μεταξύ τους ομάδες: αυτές που έχουν τη μορφή ΑΓΑΓΑΓΑΓ και αυτές που έχουν τη μορφή ΓΑΓΑΓΑΓΑ. Και στις δύο περιπτώσεις, υπάρχουν 4! τρόποι τοποθέτησης των ανδρών στις συγκεκριμένες θέσεις και 4! τρόποι τοποθέτησης των γυναικών στις συγκεκριμένες θέσεις για κάθε έναν διαφορετικό τρόπο που έχουν καταλάβει τις θέσεις οι άντρες.

Διατάξεις και Μεταθέσεις

Άρα για κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις υπάρχουν

$4! \cdot 4!$ διαφορετικοί τρόποι κατάληψης των θέσεων. Άρα συνολικά υπάρχουν

$$2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$$

διαφορετικοί τρόποι κατάληψης των θέσεων.

Διατάξεις και Μεταθέσεις

<u>Παράδειγμα 4:</u>

Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά ψηφία σχηματίζονται με τα ψηφία $\{0,1,2,3,4,5,6\}$;

Διατάξεις και Μεταθέσεις

<u>Λύση:</u>

Το ζητούμενο προκύπτει με την επιλογή 4 από τα 7 ψηφία που πρέπει να είναι τέτοια ώστε το 0 να μην είναι το ψηφίο των χιλιάδων.

Έτσι για το ψηφίο των χιλιάδων υπάρχουν 6 τρόποι

Για το ψηφίο των εκατοντάδων υπάρχουν 6 τρόποι

Για το ψηφίο των δεκάδων υπάρχουν 5 τρόποι

Για το ψηφίο των μονάδων υπάρχουν 4 τρόποι.

Άρα συνολικά υπάρχουν

$$6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720$$

τετραψήφοι αριθμοί.

Διατάξεις και Μεταθέσεις

Παράδειγμα 5:

Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία $\{0,1,2,3,4,5,6\}$;

Διατάξεις και Μεταθέσεις

<u>Λύση:</u>

Για το ψηφίο των χιλιάδων υπάρχουν 6 τρόποι (δεν μπορεί το 0 να είναι επιλογή)

Για το ψηφίο των εκατοντάδων υπάρχουν 7 τρόποι (μπορεί το ψηφίο των χιλιάδων να είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων)

Για το ψηφίο των δεκάδων υπάρχουν 7 τρόποι

Για το ψηφίο των μονάδων υπάρχουν 7 τρόποι.

Άρα συνολικά υπάρχουν

$$6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2058$$

τετραψήφοι αριθμοί.

Συνδυασμοί

Έστω ένα σύνολο $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο με n διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία $x_1, x_2, \dots, x_n$ και k θετικός ακέραιος αριθμός με $k \leq n$.

- **Συνδυασμός των $\boldsymbol{n}$ στοιχείων ανά $\boldsymbol{k}$** ή απλά **συνδυασμός των $\boldsymbol{n}$ ανά $\boldsymbol{k}$** καλείται κάθε μη διατεταγμένη k – αδα $a_1, a_2, \dots, a_k$ που αποτελείται από διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του X.
- **Το πλήθος των συνδυασμών των $\boldsymbol{n}$ στοιχείων ανά $\boldsymbol{k}$ συμβολίζεται με**

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$$

Συνδυασμοί

<u>Παράδειγμα 6:</u>

Οι συνδυασμοί των $n = 4$ γραμμάτων $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ανά $k = 2$ είναι οι

$$\{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \delta\},$$

$$\{\beta, \gamma\}, \{\beta, \delta\},$$

$$\{\gamma, \delta\}$$

Συνδυασμοί

<u>Παρατήρηση:</u>

Σε μία διάταξη μας ενδιαφέρει η ακριβής σειρά με την οποία καταγράφονται τα στοιχεία που περιέχει ενώ σε ένα συνδυασμό η σειρά καταγραφής των στοιχείων δεν παίζει κανένα ρόλο.

Συνδυασμοί

<u>Πρόταση:</u>

Ο αριθμός των **συνδυασμών των n στοιχείων ανά k** είναι

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Συνδυασμοί

<u>Παράδειγμα 7:</u>

(α) Πόσες διαφορετικές επιτροπές που θα αποτελούνται από 2 γυναίκες μπορούν να δημιουργηθούν από μία ομάδα 5 γυναικών ;

(β) Πόσες διαφορετικές επιτροπές που θα αποτελούνται από 3 άνδρες μπορούν να δημιουργηθούν από μία ομάδα 7 ανδρών;

(γ) Πόσες διαφορετικές επιτροπές που θα αποτελούνται από 2 γυναίκες και 3 άνδρες μπορούν να δημιουργηθούν από μία ομάδα 5 γυναικών και 7 ανδρών;

(δ) Πόσες διαφορετικές επιτροπές που θα αποτελούνται από 2 γυναίκες και 3 άνδρες μπορούν να δημιουργηθούν από μία ομάδα 5 γυναικών και 7 ανδρών στην περίπτωση που δύο συγκεκριμένοι άνδρες αρνηθούν να συμμετάσχουν στην ίδια επιτροπή;

Συνδυασμοί

Λύση:

(α) Από μία ομάδα 5 γυναικών υπάρχουν $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ διαφορετικές επιτροπές που θα αποτελούνται από 2 από αυτές τις γυναίκες.

(β) Από μία ομάδα 7 αντρών υπάρχουν $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$ διαφορετικές επιτροπές που θα αποτελούνται από 3 από αυτούς τους άντρες.

Συνδυασμοί

Λύση:

(γ) Υπάρχουν $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 350$ δυνατές επιτροπές που αποτελούνται από 2 γυναίκες και 3 άνδρες.

Συνδυασμοί

Λύση:

(δ) Στην περίπτωση που δύο συγκεκριμένοι άνδρες αρνηθούν να συμμετάσχουν στην ίδια επιτροπή θα πρέπει από τις 350 περιπτώσεις να εξαιρέσουμε τις

$$\binom{5}{2} \cdot 5 = 50$$

περιπτώσεις όπου συμμετέχουν αυτοί οι συγκεκριμένοι άντρες μαζί. Άρα συνολικά θα υπάρχουν

$$350 - 50 = 300$$

διαφορετικές επιτροπές.

Υπολογισμός Διατάξεων στο Excel

Συνάρτηση PERMUT:

- Επιστρέφει τον αριθμό των δυνατών διατάξεων ενός αριθμού αντικειμένων που επιλέγονται από ένα σύνολο αντικειμένων
- Σύνταξη:

PERMUT(αριθμός; επιλεγμένος_αριθμός)

Όπου:

Αριθμός Υποχρεωτικό. Ένας ακέραιος που αντιπροσωπεύει τον συνολικό αριθμό αντικειμένων

Επιλεγμένος_αριθμός Υποχρεωτικό. Ένας ακέραιος που αντιπροσωπεύει τον αριθμό των αντικειμένων κάθε διάταξης.

Υπολογισμός Διατάξεων στο Excel

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Και τα δύο ορίσματα περικόπτονται, ώστε να αποτελούν ακέραιους αριθμούς.
- Εάν ένα από τα ορίσματα αριθμός ή επιλεγμένος_αριθμός δεν είναι αριθμητικό, η συνάρτηση PERMUT επιστρέφει #ΤΙΜΗ! ως τιμή σφάλματος.
- Εάν αριθμός ≤ 0 ή επιλεγμένος_αριθμός < 0, η συνάρτηση PERMUT επιστρέφει την τιμή σφάλματος #ΑΡΙΘ! ως τιμή σφάλματος.
- Εάν αριθμός < επιλεγμένος_αριθμός, η συνάρτηση PERMUT επιστρέφει το σφάλμα #ΑΡΙΘ! ως τιμή σφάλματος.

Υπολογισμός Διατάξεων στο Excel

Παράδειγμα:

Δεδομένα	Περιγραφή	
100	Αριθμός αντικειμένων	
3	Αριθμός αντικειμένων σε κάθε διάταξη	
Τύπος	**Περιγραφή**	**Α ποτέλεσμα**
=PERMUT(A2;A3)	Πιθανές διατάξεις για τα ορίσματα που καθορίζονται στα κελιά A2:A3.	970200
=PERMUT(3;2)	Πιθανές διατάξεις για μια ομάδα 3 αντικειμένων από τα οποία επιλέγονται 2.	6

Υπολογισμός Συνδυασμών στο Excel

Συνάρτηση COMBIN:

- Επιστρέφει τον αριθμό συνδυασμών για δεδομένο πλήθος στοιχείων.
- Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση COMBIN για να υπολογίσετε τον συνολικό αριθμό των ομάδων που μπορούν να σχηματιστούν από ένα δεδομένο αριθμό στοιχείων.
- Σύνταξη

COMBIN(αριθμός; επιλεγμένος_αριθμός)

Όπου:

Αριθμός Υποχρεωτικό. Ο αριθμός όλων των στοιχείων.

Επιλεγμένος_αριθμός Υποχρεωτικό. Ο αριθμός των στοιχείων σε κάθε συνδυασμό.

Υπολογισμός Συνδυασμών στο Excel

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Τα αριθμητικά ορίσματα στρογγυλοποιούνται σε ακέραιους.
- Εάν κάποιο από τα ορίσματα δεν είναι αριθμητικό, η συνάρτηση COMBIN επιστρέφει #ΤΙΜΗ! ως τιμή σφάλματος.
- Εάν αριθμός < 0, επιλεγμένος_αριθμός < 0, ή αριθμός < επιλεγμένος_αριθμός, η συνάρτηση COMBIN επιστρέφει #ΑΡΙΘ! ως τιμή σφάλματος.
- Ένας συνδυασμός είναι κάθε σύνολο ή υποσύνολο στοιχείων, ανεξάρτητα από την εσωτερική σειρά διάταξης των στοιχείων. Οι συνδυασμοί διαφέρουν από τις διατάξεις, όπου η εσωτερική σειρά διάταξης είναι σημαντική.

Υπολογισμός Συνδυασμών στο Excel

Παράδειγμα:

Τύπος	Περιγραφή	Αποτέλεσμα
=COMBIN(8;2)	Οι πιθανές ομάδες δύο ατόμων που μπορούν να σχηματιστούν από 8 υποψηφίους.	28

Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Ποιο είναι ποιο πιθανό; Να φέρουμε ένα τουλάχιστον 6 ρίχνοντας ένα ζάρι 4 φορές ή να φέρουμε μία τουλάχιστον φορά εξάρες ρίχνοντας δυο ζάρια 24 φορές;

Ασκήσεις

<u>Άσκηση 2:</u>

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα 10 φορές. Να βρεθεί η πιθανότητα να φέρνουμε κάθε φορά διαφορετική ένδειξη από την προηγούμενη.

Ασκήσεις

<u>Άσκηση 3:</u>

Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με 8 άτομα. Μέχρι να φτάσει στο τέρμα κάνει 12 στάσεις (συμπεριλαμβάνοντας και του τέρματος). Να βρεθεί η πιθανότητα τουλάχιστον σε μία στάση να κατέβουν περισσότερα από 1 άτομα.

Ασκήσεις

<u>Άσκηση 4:</u>

Μία επιτροπή συγκροτείται από 2 γεωπόνους και 3 μηχανικούς που επιλέγονται από 5 γεωπόνους και 7 μηχανικούς. Αν όλες οι συνθέσεις της επιτροπής που μπορούν να προκύψουν είναι εξίσου πιθανές, ποια είναι η πιθανότητα

A. Ένας συγκεκριμένος μηχανικός να συμμετέχει οπωσδήποτε στην επιτροπή;

B. Δύο συγκεκριμένοι γεωπόνοι να μην συμμετέχουν στην επιτροπή;

Ασκήσεις

<u>Άσκηση 5:</u>

Ποια είναι η πιθανότητα σε μία τάξη k φοιτητών, ένας συγκεκριμένος φοιτητής (από τους k), να έχει γενέθλια την ίδια ημέρα με κάποιον από τους υπόλοιπους $k-1$ φοιτητές; Θεωρείστε ότι το έτος έχει 365 ημέρες και $k \leq 365$.

Βιβλιογραφία

- Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Εκδόσεις Συμεόν
- P. Hoel, S. Port, C. Stone Εισαγωγή στην θεωρία Πιθανοτήτων, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Δ. Χελιώτης Ένα Δεύτερο Μάθημα στις Πιθανότητες eBooks4Greeks, Ελεύθερη Ψυφιακή Βιβλιοθήκη
- W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley &Sons
- Γ. Παπαδόπουλος, Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική, Εκδόσεις Gutenberg