# Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ , Β ΜΑΧΙΜΟΙ, Β ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ , ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ

# Τυχαίες Μεταβλητές

- Κατά τη μελέτη ενός τυχαίου πειράματος, ενδιαφερόμαστε συνήθως για κάποια συνάρτηση του αποτελέσματος και όχι για το αποτέλεσμα αυτό καθαυτό

Π.χ. Σε μια ακολουθία δοκιμών, μας ενδιαφέρει το πλήθος από επιτυχίες και όχι ποιες δοκιμές ήταν επιτυχίες.

# Τυχαίες Μεταβλητές

- Θα μελετήσουμε λοιπόν μεταβλητές των οποίων η τιμή καθορίζεται από το αποτέλεσμα κάποιου στοχαστικού πειράματος.
- Για το λόγο αυτό οι μεταβλητές αυτές καλούνται τυχαίες μεταβλητές.

# Τυχαίες Μεταβλητές

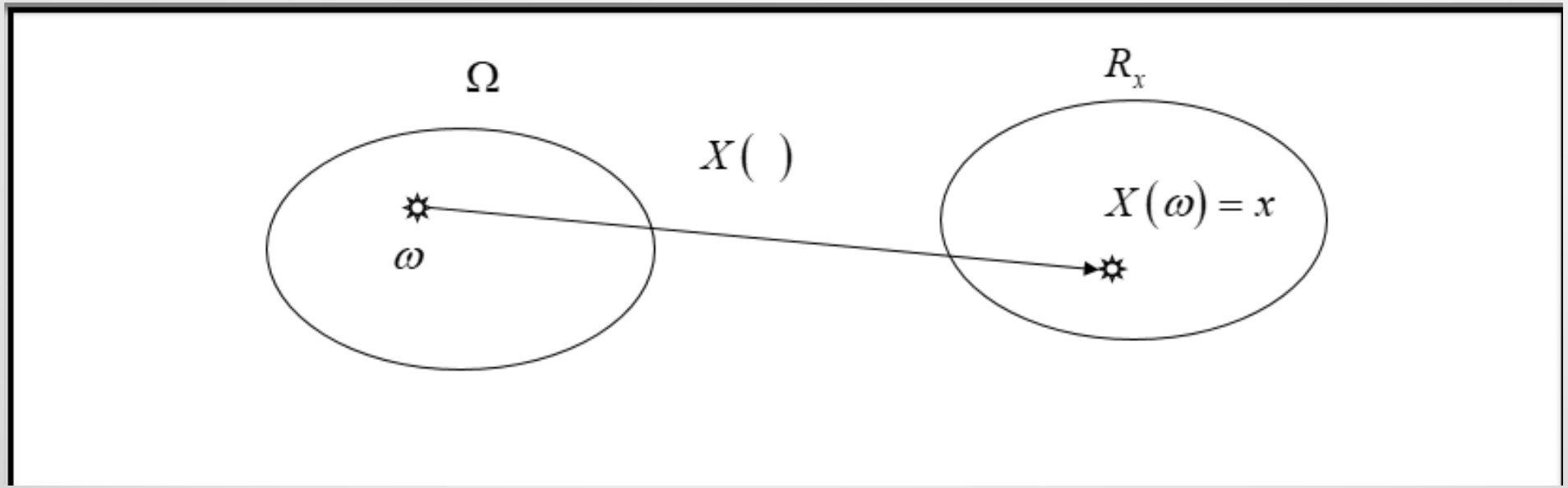
- **Κάθε απεικόνιση $X$ από το δειγματικό χώρο $\Omega$ σε κάποιο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$,**

$$\boldsymbol{X}: \boldsymbol{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

**θα καλείται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.).**

- Η τυχαία μεταβλητή X απεικονίζει κάθε στοιχείο ω του $\Omega$ στο $X(\omega) \in \mathbb{R}$

# Τυχαίες Μεταβλητές



# Τυχαίες Μεταβλητές

- Γράφουμε $[X \in A]$ για κάποιο $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ ενοώντας το ενδεχόμενο
$$[X \in A] = \{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in A\}.$$
- Γράφουμε $P([X \in A])$ ή απλούστερα $P(X \in A)$ εννοώντας την πιθανότητα
$$P(X \in A) = P(\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \in A\}).$$

# Τυχαίες Μεταβλητές

- Ο λογισμός πιθανοτήτων που σχετίζονται με μία τυχαία μεταβλητή ανάγεται συνήθως στον υπολογισμό πιθανοτήτων της μορφής

$$\boldsymbol{P(X = a)}$$

$$\boldsymbol{P(X < a), P(X \leq a), P(X > a), P(X \geq a)}$$

$$\boldsymbol{P(a < X < b), P(a \leq X < b), P(a < X \leq b), P(a \leq X \leq b).}$$

# Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

- **Διακριτές τυχαίες μεταβλητές** καλούνται οι τυχαίες μεταβλητές που έχουν ως πεδίο τιμών $\boldsymbol{R_X}$, κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ ή του $\mathbb{N}$ ή γενικότερα έχουν αριθμήσιμο πεδίο τιμών.
- Οι αντίστοιχες κατανομές τους θα καλούνται **διακριτές κατανομές**.

# Παράδειγμα 1

Έστω μία οικογένεια με τρία παιδιά.

Ας θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή $X$ η οποία εκφράζει το πλήθος των αγοριών.

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι ο

$$\Omega = \{(\alpha,\alpha,\alpha),(\alpha,\alpha,\kappa),(\alpha,\kappa,\alpha),(\kappa,\alpha,\alpha),(\alpha,\kappa,\kappa),$$
$$(\kappa,\alpha,\kappa),(\kappa,\kappa,\alpha),(\kappa,\kappa,\kappa)\}$$

# Παράδειγμα 1

Η τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ θα παίρνει τις τιμές $0,1,2,3$

Αν θεωρήσουμε ότι τα $8$ στοιχειώδη ενδεχόμενα του $\Omega$ είναι ισοπίθανα τότε,

# Παράδειγμα 1

- $P(X = 0) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = 0\}) = P(\{(\kappa, \kappa, \kappa)\}) = \frac{1}{8},$
- $P(X = 1) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = 1\}) =$
  $P(\{(\alpha, \kappa, \kappa), (\kappa, \alpha, \kappa), (\kappa, \kappa, \alpha)\}) = \frac{3}{8},$
- $P(X = 2) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = 2\}) =$
  $P(\{(\alpha, \alpha, \kappa), (\alpha, \kappa, \alpha), (\kappa, \alpha, \alpha)\}) = \frac{3}{8},$
- $P(X = 3) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = 3\}) = P(\{(\alpha, \alpha, \alpha)\}) = 1/8.$

# Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

- Η συνάρτηση

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} P(X = x), & x \epsilon R_X \\ 0 \quad , & x \notin R_x \end{cases}}$$

Όπου $\boldsymbol{R_X}$, το σύνολο τιμών της $\boldsymbol{X}$ ονομάζεται **συνάρτηση μάζας πιθανότητας ή συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητα** της διακριτής τυχαίας μεταβλητής $X$.

# Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

- Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής παίρνει θετικές τιμές το πολύ σε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.
- Η συνολική πιθανότητα ( $100\%$) του Ω «κατανέμεται» στα στοιχεία του συνόλου τιμών της τ.μ. Χ μέσω της συνάρτησης $f(x) = P(X = x)$.

# Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Έτσι στο **Παράδειγμα 1**, έχουμε ότι

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{3}{8}$$

# Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Παρατηρείστε ότι $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1$

# Ιδιότητες

**<u>Πρόταση:</u>**

Αν $f$ η συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής με σύνολο τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, τότε:

$$\boldsymbol{f(x_i) \geq 0 \text{ για κάθε } x_i \epsilon R_X}$$

και

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{+\infty} f(x_i) = 1}$$

# Συνάρτηση Κατανομής

- Η συνάρτηση $F_X(x): \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

με

$$\boldsymbol{F_X(x) = P(X \leq x), \mathrm{x} \epsilon \mathbb{R}}$$

καλείται (αθροιστική) **συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) της τ.μ. Χ.**

# Παράδειγμα 2

- Ας επιστρέψουμε ξανά στο παράδειγμα 1. Η τυχαία μεταβλητή $X$ εκφράζει το πλήθος των αγοριών σε μία οικογένεια τριών παιδιών.
- Βρήκαμε παραπάνω ότι

$$P(X=0)=\frac{1}{8}, P(X=1)=\frac{3}{8},$$
$$P(X=2)=\frac{3}{8}, P(X=3)=\frac{3}{8}.$$

# Παράδειγμα 2

- Η $F(x)$ εκφράζει την πιθανότητα που έχει κατανεμηθεί στο σύνολο $(-\infty, x]$. Επομένως ισούται με:

# Παράδειγμα 2

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ P(X=0) = \dfrac{1}{8}\,, & 0 \le x < 1 \\ P(X=0) + P(X=1) = \dfrac{4}{8}\,, & 1 \le x < 2 \\ P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \dfrac{7}{8}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

# Ιδιότητες Συνάρτησης Κατανομής

**<u>Πρόταση:</u>**

Για τη συνάρτηση κατανομής $F$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής ισχύουν τα εξής:

- $\mathbf{0 \ \leq \ F(x) \ \leq 1}$ **για κάθε** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1\,, \ \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$

# Ιδιότητες Συνάρτησης Κατανομής

- Η $F$ είναι αύξουσα συνάρτηση, δηλαδή **για κάθε $x > y$ ισχύει ότι $F(x) \geq F(y)$.**
- Η $F$ είναι **δεξιά συνεχής**, δηλαδή

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} F(x) = 1 = \mathrm{F}(x_0)$$

- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)\,, a < b$

# Μέση Τιμή

**<u>Ορισμός:</u>**

Η **μέση τιμή ( ή αναμενόμενη τιμή ή προσδοκόμενη τιμή)** μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής $X$ ορίζεται ως

$$\boldsymbol{\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{x \in R_X} x P(X = x)}$$

# Διασπορά

**<u>Ορισμός:</u>**

Έστω μια διακριτή τυχαία μεταβλητής $X$ με μέση τιμή $\mu = \mathrm{E}(\mathrm{X})$. Η **διασπορά** της τυχαίας μεταβλητής $X$ ορίζεται ως

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]}$$

# Διασπορά

**<u>Παρατήρηση:</u>**

Για την διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής $X$ αποδεικνύεται ότι

$$\mathbf{Var}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}\right) - [\mathbf{E}(\mathbf{X})]^{\mathbf{2}}$$

# Διασπορά

Στην περίπτωση που η $X$ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, τότε:

$$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}\right) = \sum_{x \in R_X} \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} P(X = x)$$

# Παράδειγμα 3

Στο **παράδειγμα 1**, η τυχαία μεταβλητή $X$ εκφράζει το πλήθος των αγοριών σε μία οικογένεια τριών παιδιών. Βρήκαμε ότι

$$P(X=0)=\frac{1}{8}, P(X=1)=\frac{3}{8},$$
$$P(X=2)=\frac{3}{8}, P(X=3)=\frac{3}{8}.$$

# Παράδειγμα 3

Για την μέση τιμή ισχύει ότι

$$\mu = \mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum xP(X = x)$$

# Παράδειγμα 3

Επομένως η μέση τιμή ισούται με

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

# Παράδειγμα 3:

Για τη διασπορά ισχύει ότι

$$\mathbf{Var}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}\right) - [\mathbf{E}(\mathbf{X})]^{\mathbf{2}}$$

# Παράδειγμα 3:

Όπου

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

Άρα

$$\mathrm{Var}(X) = 3 - (1{,}5)^2 = 0{,}75$$

# Παράδειγμα 4

Σε ένα τυχερό παιχνίδι, το κέρδος μας έστω $x$, ισούται με 1 ευρώ ή με $-3$ με πιθανότητες $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{3}$ αντίστοιχα.

Άρα το αναμενόμενο κέρδος για έναν παίχτη του παιχνιδιού αυτού είναι

$$\mu = 1 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

# Παράδειγμα 4

Για τη διασπορά ισχύει ότι

$$\mathbf{Var}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}\right) - [\mathbf{E}(\mathbf{X})]^{\mathbf{2}}$$

Όπου

$$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}\right) = 1^2 \cdot \frac{2}{3} + (-3)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

Άρα

$$\mathbf{Var}(\boldsymbol{X}) = \frac{11}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$$

# Παράδειγμα 5:

Υποθέτουμε ότι η **πυκνότητα** $f$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τον πίνακα

| **x** | **-3** | **-1** | **0** | **1** | **2** | **3** | **5** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.1 | 0.2 | 0.15 | 0.2 | 0.1 | 0.15 | 0.05 | 0.05 |

# Παράδειγμα 5:

**(α)** Να βρείτε την πιθανότητα η τ.μ. $X$ να πάρει αρνητική τιμή.

**(β)** Να βρείτε την πίθανότητα $P(2 \leq X < 8)$.

**(γ)** Να βρείτε την μέση τιμή της τ.μ. $X$.

# Παράδειγμα 5

**<u>Λύση:</u>**

**(α)** $P(X < 0) = P(X = -3) + P(X = -1) = 0{,}3$

**(β)** $P(2 \leq X < 8) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 5) = 0{,}3$

# Παράδειγμα 5:

**(γ)** $\mu = \mathrm{E(X)} = -3 \cdot 0{,}1 - 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}15 + 5 \cdot 0{,}05 + 8 \cdot 0{,}05 = 1$

| **x** | **-3** | **-1** | **0** | **1** | **2** | **3** | **5** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.1 | 0.2 | 0.15 | 0.2 | 0.1 | 0.15 | 0.05 | 0.05 |

# Άσκηση 1

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X$ η οποία εκφράζει των αριθμό μηνυμάτων στο κινητό τηλέφωνο ενός κατοίκου μιας περιφέρειας της Ελλάδας από τον αριθμό 112 της πολιτικής προστασίας στη διάρκεια ενός μήνα.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $c$ | $\frac{1}{16}$ |

# Άσκηση 1

A. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς $c$
B. Να βρεθεί η πιθανότητα σε ένα μήνα να λάβουμε το πολύ 2 μηνύματα στο κινητό μας τηλέφωνο από το 112.
C. Να βρεθεί η πιθανότητα να μην λάβουμε μήνυμα στην διάρκεια ενός μήνα από το 112.

# Άσκηση 1

D. Δεδομένου ότι έχουμε ήδη λάβει ένα μήνυμα από το 112, ποια η πιθανότητα στον μήνα που διανύουμε να λάβουμε το πολύ δύο μηνύματα από το 112;

E. Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός μηνυμάτων που λαμβάνει ένας κάτοικος στο τηλέφωνο του από το 112.

F. Να βρεθεί η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $X$.

# Άσκηση 1

**Α.** Ισχύει ότι $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$

Άρα

$$\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + c + \frac{1}{16} = 1$$

Δηλαδή,

$$c = \frac{4}{16}$$

# Άσκηση 1

**Β.**

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$= f(0) + f(1) + f(2) = \frac{11}{16}$$

Δηλαδή, η πιθανότητα σε ένα μήνα να λάβουμε το πολύ 2 μηνύματα στο κινητό μας τηλέφωνο από το 112 ισούται με $\frac{11}{16}$

# Άσκηση 1

**C.**

$$P(X = 0) = f(0) = \frac{1}{16}$$

Δηλαδή, η πιθανότητα σε ένα μήνα να μην λάβουμε μηνύματα στο κινητό μας τηλέφωνο από το 112 ισούται με $\frac{1}{16}$.

# Άσκηση 1

**D.**

$$P(X \leq 2 \mid X \geq 1) = \frac{P\big((X \leq 2) \cap (X \geq 1)\big)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(1 \leq X \leq 2)}{1 - P(X < 1)}$$

$$=$$

$$= \frac{P(X = 1) + P(X = 2)}{1 - P(X = 0)} = \frac{f(1) + f(2)}{1 - f(0)} = \frac{\frac{4}{16} + \frac{6}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

# Άσκηση 1

**Ε.** Για την μέση τιμή ισχύει ότι

$$\mu = \mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum xP(X = x)$$

Επομένως η μέση τιμή ισούται με

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

# Άσκηση 1

**F.** Για τη διασπορά ισχύει ότι

$$\mathbf{Var}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}^{\mathbf{2}}\right) - [\mathbf{E}(\mathbf{X})]^{\mathbf{2}}$$

# Άσκηση 1

Όπου.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{4}{16} + 2^2 \cdot \frac{6}{16} + 3^2 \cdot \frac{4}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16}$$

$$= \frac{80}{16} = 5$$

Άρα

$$\mathbf{Var}(\boldsymbol{X}) = 5 - (2)^2 = 1$$

# Άσκηση 2

Ο αριθμός $X$ των προϊόντων που πουλάει μία επιχείρηση σε διάστημα μιας εβδομάδας είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = P(X = x)$ | $0,05$ | $0,1$ | $0,5$ | $c$ | $0,1$ | $0,05$ |

# Άσκηση 2

A. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς $c$

B. Να βρείτε την πιθανότητα σε διάστημα μιας εβδομάδας η επιχείρηση να πουλήσει τουλάχιστον 4 προϊόντα.

C. Να βρείτε την πιθανότητα σε διάστημα μιας εβδομάδας η επιχείρηση να πουλήσει λιγότερα από 3 προϊόντα.

# Άσκηση 2

D. Να βρεθεί η πιθανότητα σε διάστημα μιας εβδομάδας η επιχείρηση να μην πουλήσει κανένα προϊόν.

E. Αν στην βδομάδα που διανύουμε η επιχείρηση έχει ήδη πουλήσει 1 προϊόν, ποια είναι η πιθανότητα στο τέλος της εβδομάδας το πλήθος των προϊόντων που θα έχει πουλήσει να είναι το πολύ 3;

# Άσκηση 2

F. Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός των προϊόντων που πουλάει η επιχείρηση στην διάρκεια μιας εβδομάδας.

G. Να βρεθεί η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $X$.

# Βιβλιογραφία


Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Εκδόσεις Συμεόν

P. Hoel, S. Port, C. Stone Εισαγωγή στην θεωρία Πιθανοτήτων, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Δ. Χελιώτης Ένα Δεύτερο Μάθημα στις Πιθανότητες eBooks4Greeks, Ελεύθερη Ψυφιακή Βιβλιοθήκη

W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley &Sons

Γ. Παπαδόπουλος, Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική, Εκδόσεις Gutenberg