

Ειδικές Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ.
ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Διακριτές κατανομές

Έστω μία διακριτή τυχαία μεταβλητή $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, υπενθυμίζεται ότι ισχύουν τα εξής:

- $P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$
- $P(X < x) = 1 - P(X \geq x)$
- $P(\alpha < X < \beta) = P(X = \alpha + 1) + P(X = \alpha + 2) + \cdots + P(X = \beta - 1)$

Κατανομή Bernoulli

- **Δοκιμή Bernoulli (Bernoulli trial)** ονομάζεται ένα πείραμα τύχης το οποίο έχει μόνο δύο, αμοιβαίως αποκλειόμενα, δυνατά αποτελέσματα.
- Το ένα αποτέλεσμα έχει επικρατήσει να ονομάζεται **επιτυχία** (success) και το άλλο **αποτυχία** (failure).

Κατανομή Bernoulli

- Το πιο «δημοφιλές» παράδειγμα δοκιμής Bernoulli είναι η ρίψη ενός νομίσματος μία φορά.
- Τα δυνατά αποτελέσματα είναι προφανώς μόνο δύο, «κεφαλή» και «γράμματα».

Κατανομή Bernoulli

- Αν μας ενδιαφέρει η ένδειξη «κεφαλή» χαρακτηρίζουμε επιτυχία το αποτέλεσμα «κεφαλή» και αποτυχία το αποτέλεσμα «γράμματα» ενώ αν μας ενδιαφέρει η ένδειξη «γράμματα» χαρακτηρίζουμε επιτυχία το αποτέλεσμα «γράμματα» και αποτυχία το αποτέλεσμα «κεφαλή».

Κατανομή Bernoulli

Άλλα παραδείγματα δοκιμών Bernoulli:

- Η επιλογή ενός ζώου και η εξέτασή του για να διαπιστωθεί αν έχει προσβληθεί από μια συγκεκριμένη ασθένεια είναι δοκιμή Bernoulli γιατί τα δυνατά αποτελέσματα είναι μόνο δύο: το ζώο είτε έχει προσβληθεί (επιτυχία) είτε δεν έχει προσβληθεί (αποτυχία).

Κατανομή Bernoulli

- Η λήψη δείγματος ελαιολάδου και ο έλεγχος για το αν είναι νοθευμένο είναι δοκιμή Bernoulli γιατί το ελαιόλαδο είτε είναι νοθευμένο (επιτυχία) είτε δεν είναι νοθευμένο (αποτυχία).

Κατανομή Bernoulli

- Η επιλογή ενός μαθητή Α' Δημοτικού και ο έλεγχος της συγκέντρωσης της προσοχής του κατά τα πρώτα 20 λεπτά της πρώτης ώρας του προγράμματος μπορεί (με συγκεκριμένα κριτήρια) να χαρακτηριστεί είτε ικανοποιητική είτε όχι ικανοποιητική.
- Ένα άτομο που επιλέγεται για να συμμετάσχει σε μια έρευνα γνώμης είναι είτε άνδρας είτε γυναίκα.

Κατανομή Bernoulli – Ορισμός

- Έστω X η διακριτή τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των επιτυχιών σε μια δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p .
- Η κατανομή της X ονομάζεται **κατανομή Bernoulli (Bernoulli distribution)** με παράμετρο p και συμβολίζεται με $b(p)$.

Κατανομή Bernoulli – Ορισμός

- Επίσης γράφουμε $X \sim b(p)$.
- Η τυχαία μεταβλητή $X \sim b(p)$ μπορεί να πάρει την τιμή 1 με πιθανότητα p ή την τιμή 0 με πιθανότητα $(1 - p)$.

Κατανομή Bernoulli – Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

- Επομένως έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας:

$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$P(X = 1) = p$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να περιγραφούν συνοπτικά και ως εξής:

$$f(x) = P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

Κατανομή Bernoulli – Μέση Τιμή και Διασπορά

Η κατανομή Bernoulli έχει:

μέση τιμή: $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$

Διακύμανση: $\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = (1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$

Κατανομή Bernoulli – Σύνοψη

Επομένως για την **Κατανομή Bernoulli** έχουμε αποδείξει τα εξής:

Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p , δηλαδή $\mathbf{X} \sim \mathbf{b}(p)$, τότε:

- Η **συνάρτηση πιθανότητας** είναι: $P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}$, $x = 0, 1$
- Η **μέση (αναμενόμενη) τιμή** της είναι: $E(X) = p$
- Η **διακύμανση** είναι: $Var(X) = \sigma^2 = pq$

Διωνυμική Κατανομή

Η **Διωνυμική κατανομή** αφορά των αριθμό x των επιτυχιών σε n δοκιμές Bernoulli με (την ίδια) πιθανότητα επιτυχίας p .

Ειδικά για $n = 1$ η Διωνυμική κατανομή ονομάζεται κατανομή Bernoulli.

Παράδειγμα 1

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα 8 φορές. Ποια η πιθανότητα ακριβώς 3 από αυτές να έρθει ένδειξη κεφάλι (K);

Παράδειγμα 1

Λύση:

- Σε κάθε ρίψη το αποτέλεσμα είναι είτε (επιτυχία) κεφάλι (K) με πιθανότητα $p = \frac{1}{2}$,
είτε (αποτυχία) γράμματα με πιθανότητα $q = 1 - p = \frac{1}{2}$.
- Κάθε 8 –άδα στην οποία ακριβώς 3 από αυτές έχουν την ένδειξη K έχει πιθανότητα πραγματοποίησης $p^3 q^5$.

Παράδειγμα 1

- Υπάρχουν $\binom{8}{3}$ διαφορετικές 8-άδες στις οποίες ακριβώς 3 από αυτές έχουν την ένδειξη K .

$$\text{Άρα } P(X = 3) = \binom{8}{3} p^3 q^5 = 56 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 21,875\%$$

Διωνυμική Κατανομή - Ορισμός

Αν X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια ακολουθία n ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p σε όλες τις δοκιμές, τότε η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X ονομάζεται **Διωνυμική κατανομή (Binomial distribution)** με **παραμέτρους n και p** και **συμβολίζεται με $b(n, p)$** .
Επίσης, γράφουμε $X \sim b(n, p)$.

Διωνυμική Κατανομή – Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

- Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους n και p δίνεται από τον τύπο

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Διωνυμική Κατανομή – Σύνοψη

Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την Διωνυμική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p , δηλαδή $X \sim b(n, p)$, τότε:

- Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της κατανομής X δίνεται από τον τύπο

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

- Η μέση (αναμενόμενη) τιμή της είναι: $E(X) = np$
- Η διακύμανση είναι: $\sigma^2 = Var(X) = npq$

Παράδειγμα 2

Το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων παραγωγής μηχανής είναι 5%. Κάθε πακέτο αποτελεί συσκευασία των 10 προϊόντων.

Ποια η πιθανότητα σε τυχόν πακέτο να υπάρχουν $k = 2$ ελαττωματικά προϊόντα;

Παράδειγμα 2

Λύση:

Ο αριθμός X των ελλατωματικών προϊόντων στο πακέτο των 10 τεμαχίων ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 10$ και $p = 5\% = 0,05$.

Επομένως:

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} (0,05)^2 (0,95)^8 = 0,0746 = 7,46\%$$

Παράδειγμα 3

Η πιθανότητα να αντέξει ένα εξάρτημα μηχανής σε συγκεκριμένη καταπόνηση είναι $\frac{4}{5}$.

Ποια η πιθανότητα δύο τουλάχιστον από οκτώ τέτοια εξαρτήματα να αντέξουν στην καταπόνηση αυτή;

Παράδειγμα 3

Λύση:

Έχουμε:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

Όμως:

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

Παράδειγμα 3

Όπου:

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} \left(\frac{4}{5}\right)^0 \left(\frac{1}{5}\right)^8 = \left(\frac{1}{5}\right)^8$$

$$P(X = 1) = \binom{8}{1} \left(\frac{4}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{5}\right)^7 = 32 \left(\frac{1}{5}\right)^8$$

Άρα

$$P(X \geq 2) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^8 - 32 \left(\frac{1}{5}\right)^8 = 0,999 = 99\%$$

Άσκηση 1

Ένας ασφαλιστής που «κλείνει» ένα συμβόλαιο με πιθανότητα 60% θα επισκεφθεί σήμερα 5 υποψήφιους πελάτες.

Άσκηση 1

- A)** Ποια η πιθανότητα να μην κλείσει κανένα συμβόλαιο;
- B)** Ποια η πιθανότητα να κλείσει το πολύ 4 συμβόλαια;

Άσκηση 1

Γ) Ποια η πιθανότητα να κλείσει πάνω από 4 συμβόλαια;

Δ) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός συμβολαίων που θα κλείσει;

Άσκηση 2

Σκοπευτής που πετυχαίνει το στόχο με πιθανότητα 80% κάνει 7 βολές.

Ποια η πιθανότητα να πετύχει το στόχο σε 3 από τις 7 βολές;

Άσκηση 3

Μια βιομηχανία κατασκευάζει ελάσματα για να αντέχουν σε συγκεκριμένη καταπόνηση. Κάθε τέτοιο έλασμα αντέχει στη συγκεκριμένη καταπόνηση με πιθανότητα 0,7. Επιλέγουμε τυχαία 6 τέτοια ελάσματα και τα υποβάλλουμε στη συγκεκριμένη καταπόνηση.

Άσκηση 3

- A.** Να βρεθεί η πιθανότητα να αντέξουν όλα τα ελάσματα
- B.** Να βρεθεί η πιθανότητα να αντέξει τουλάχιστον ένα έλασμα.
- Γ.** Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός ελασμάτων που θα αντέξουν.

Διωνυμική Κατανομή – Υπολογισμός στο Excel

Συνάρτηση **BINOMDIST**:

Επιστρέφει την πιθανότητα διωνυμικής κατανομής μεμονωμένου όρου.

Διωνυμική Κατανομή – Υπολογισμός στο Excel

Σύνταξη

- **BINOM.DIST**(αριθμός_επιτυχιών;δοκιμές;πιθανότητα α_επιτυχίας;αθροιστική)

Η σύνταξη της συνάρτησης **BINOM.DIST** περιλαμβάνει τα παρακάτω ορίσματα:

Διωνυμική Κατανομή – Υπολογισμός στο Excel

- **Αριθμός επιτυχιών:** Ο αριθμός των επιτυχιών στο σύνολο των δοκιμών.
- **Δοκιμές:** Ο αριθμός των ανεξάρτητων δοκιμών.
- **Πιθανότητα επιτυχίας:** Η πιθανότητα επιτυχίας κάθε δοκιμής.

Διωνυμική Κατανομή – Υπολογισμός στο Excel

- **Αθροιστική:** Μια λογική τιμή που καθορίζει το είδος της συνάρτησης.
- Εάν το όρισμα αθροιστική είναι **TRUE (Αληθές)** ή **1**, τότε η συνάρτηση BINOM.DIST επιστρέφει την συνάρτηση αθροιστικής κατανομής, η οποία είναι η πιθανότητα να υπάρχει το πολύ αριθμός επιτυχιών ίσος με τον αριθμό του ορίσματος αριθμός επιτυχιών,

Διωνυμική Κατανομή – Υπολογισμός στο Excel

- Εάν το όρισμα αθροιστική **FALSE (Ψευδές)** ή **0** επιστρέφει τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας, η οποία είναι η πιθανότητα ο αριθμός επιτυχιών να είναι ίσος με τον αριθμό του ορίσματος αριθμός επιτυχιών.

Διωνυμική Κατανομή – Υπολογισμός στο Excel

Επομένως αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την Διωνυμική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p , δηλαδή $\mathbf{X} \sim \mathbf{b}(\mathbf{n}, \mathbf{p})$, τότε:

Διωνυμική Κατανομή – Υπολογισμός στο Excel

- Για το υπολογισμό της πιθανότητας $P(X \leq x)$ γράφουμε στο **excel**

$$= \text{BINOM.DIST}(x; n; p; \text{"TRUE"}) \quad \Psi$$

$$= \text{BINOM.DIST}(x; n; p; 1)$$

Διωνυμική Κατανομή – Υπολογισμός στο Excel

- Για το υπολογισμό της πιθανότητας $P(X = x)$ γράφουμε στο **excel**

$$= \text{BINOM.DIST}(x; n; p; \text{"FALSE"}) \quad \text{ή}$$

$$= \text{BINOM.DIST}(x; n; p; 0)$$

Διωνυμική Κατανομή – Υπολογισμός στο Excel

Παρατηρήσεις:

- Στα ορίσματα αριθμός_επιτυχιών και δοκιμές τα δεκαδικά ψηφία περικόπτονται ώστε να είναι ακέραιοι αριθμοί.
- Εάν ένα από τα ορίσματα αριθμός_επιτυχιών, δοκιμές ή πιθανότητα_επιτυχίας δεν είναι αριθμοί, η συνάρτηση BINOM.DIST επιστρέφει #ΤΙΜΗ! ως τιμή σφάλματος.

Διωνυμική Κατανομή – Υπολογισμός στο Excel

Παρατηρήσεις:

- Εάν αριθμός_επιτυχιών < 0 ή αριθμός_επιτυχιών $>$ δοκιμές, η συνάρτηση BINOM.DIST επιστρέφει #ΑΡΙΘ! ως τιμή σφάλματος.
- Εάν πιθανότητα_επιτυχίας < 0 ή πιθανότητα_επιτυχίας > 1 , η συνάρτηση BINOM.DIST επιστρέφει #ΑΡΙΘ! ως τιμή σφάλματος.

Η Κατανομή Poisson ως Οριακή ως Οριακή Κατανομή της Διωνυμικής

- Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p

$$X \sim b(n, p)$$

- Έστω ότι $n \rightarrow +\infty$ και $p \rightarrow 0$, τέτοιο ώστε $n \cdot p \rightarrow \lambda$, όπου λ μία θετική σταθερά.

Η Κατανομή Poisson ως Οριακή ως Οριακή Κατανομή της Διωνυμικής

- Τότε αποδεικνύεται ότι

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Κατανομή Poisson

- Η συνάρτηση $f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$

Έχει τις ιδιότητες μιας συνάρτησης πιθανότητας.

Κατανομή Poisson

Δηλαδή:

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \geq 0 \text{ για κάθε } x = 0, 1, 2, \dots \text{ και}$$

$$\sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = 1$$

Κατανομή Poisson

Δηλαδή:

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \geq 0 \text{ για κάθε } x = 0, 1, 2, \dots \text{ και}$$

$$\sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = 1$$

Κατανομή Poisson – Ορισμός

Μία τυχαία μεταβλητή που έχει συνάρτηση πιθανότητας την $f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ λέμε ότι μία τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την **κατανομή Poisson** με παράμετρο λ , ($\lambda > 0$) και γράφουμε $X \sim P(\lambda)$.

Επομένως:

Κατανομή Poisson – Ορισμός

Λέμε ότι μία τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την **κατανομή Poisson** με παράμετρο λ , ($\lambda > 0$) και γράφουμε $X \sim P(\lambda)$, όταν έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας την

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

Κατανομή Poisson

- Η κατανομή Poisson έχει ομοιότητες με τη Διωνυμική κατανομή.
- Αφορά διακριτές μεταβλητές οι οποίες λαμβάνουν δύο τιμές με γνωστή πιθανότητα επιτυχίας ή αποτυχίας.

Κατανομή Poisson

- Όταν όμως η πιθανότητα της επιτυχίας p είναι πολύ μικρή, ενώ το πλήθος των δοκιμών n είναι πολύ μεγάλο, ο υπολογισμός της διωνυμικής κατανομής δεν είναι πρακτικός, οπότε η διωνυμική κατανομή μπορεί να προσεγγιστεί από την κατανομή Poisson, η οποία έλαβε το όνομά της από το Γάλλο μαθηματικό S. D. Poisson.

Κατανομή Poisson – Εφαρμογές

- Η κατανομή **Poisson** χρησιμοποιείται για τη μελέτη τυχαίων γεγονότων τα οποία συμβαίνουν σπάνια στον χρόνο ή τον χώρο.

Κατανομή Poisson – Παραδείγματα

Εφαρμογής

- Κλασικό παράδειγμα χρήσης της κατανομής Poisson είναι ο προσδιορισμός της πιθανότητας ενός αριθμού τροχαίων ατυχημάτων σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο και σε μια συγκεκριμένη περιοχή.

Κατανομή Poisson – Παραδείγματα

Εφαρμογής

- Τα κρούσματα σπανίων ασθενειών τα οποία παρατηρούνται στον γεωγραφικό χώρο, θα μπορούσαν επίσης να προσεγγιστούν με την κατανομή Poisson.

Κατανομή Poisson – Παραδείγματα Εφαρμογής

Άλλα προβλήματα που μπορούν να αντιμετωπιστούν με την κατανομή Poisson είναι προβλέψεις για :

- Τον αριθμό των εγκλημάτων κατά της ζωής σε κάποια μεγάλη πόλη για κάποιο χρονικό διάστημα
- Τον αριθμό των σεισμικών δονήσεων σε κάποια περιοχή κατά τη διάρκεια συγκεκριμένης χρονικής περιόδου

Κατανομή Poisson – Παραδείγματα

Εφαρμογής

- Τον αριθμό των πυρκαγιών που σημειώνονται σε μια περιοχή που εξυπηρετείται από έναν σταθμό πυροσβεστικής υπηρεσίας,
- Τον αριθμό των θανάτων μεταξύ των ασφαλισμένων μεγάλης ασφαλιστικής εταιρείας κ.ά.

Κατανομή Poisson

Η κατανομή Poisson έχει εφαρμογή όταν οι παρατηρήσεις που αποτελούν τα δεδομένα έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Είναι απαριθμήσεις,
- Δεν έχουν περιορισμό στο εύρος των τιμών τους (κυμαίνονται από 0 έως άπειρο),

Κατανομή Poisson

- Συμβαίνουν ανεξάρτητα και η εμφάνιση μιας παρατήρησης δεν επηρεάζει την εμφάνιση μιας άλλης,
- Συμβαίνουν ακανόνιστα χωρίς να ακολουθούν κάποιο κανόνα,
- Έχουν μια σταθερή μέση συχνότητα.

Κατανομή Poisson - Σύνοψη

Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ , ($\lambda > 0$), δηλαδή $X \sim P(\lambda)$, ΤΟΤΕ:

- Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X δίνεται από τον τύπο

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

- Η μέση (αναμενόμενη) τιμή της είναι: $E(X) = \lambda$
- Η διακύμανση είναι: $\sigma^2 = \lambda$

Παράδειγμα 4

Αν δεχτούμε ότι η συχνότητα εμφάνισης σεισμικών δονήσεων μεγέθους μεγαλύτερου των $6,5 R$ ανά έτος έχει κατανομή Poisson με $\lambda = 0,292$
ποια είναι η πιθανότητα να μην έχουμε σεισμό αυτών των μεγεθών το 2020;

Παράδειγμα 4

Λύση:

Αν X η τ.μ που συμβολίζει τη συχνότητα εμφάνισης του φαινομένου θα έχουμε

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-0.292} \frac{(0.292)^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

Παράδειγμα 4

Η πιθανότητα να μην έχουμε σεισμό κατά τη διάρκεια του συγκεκριμένου έτους είναι η πιθανότητα της τ. μ X να πάρει την τιμή $x = 0$

Άρα:

$$P(X = 0) = e^{-0.292} \frac{(0.292)^0}{0!} = e^{-0.292} = 0.747 = 74.7\%$$

Παράδειγμα 4

Παρατήρηση:

Οι πιθανότητες για $X = 1, X = 2, \dots$ σεισμικές δονήσεις κατά τη διάρκεια του συγκεκριμένου έτους βρίσκονται αναλόγως:

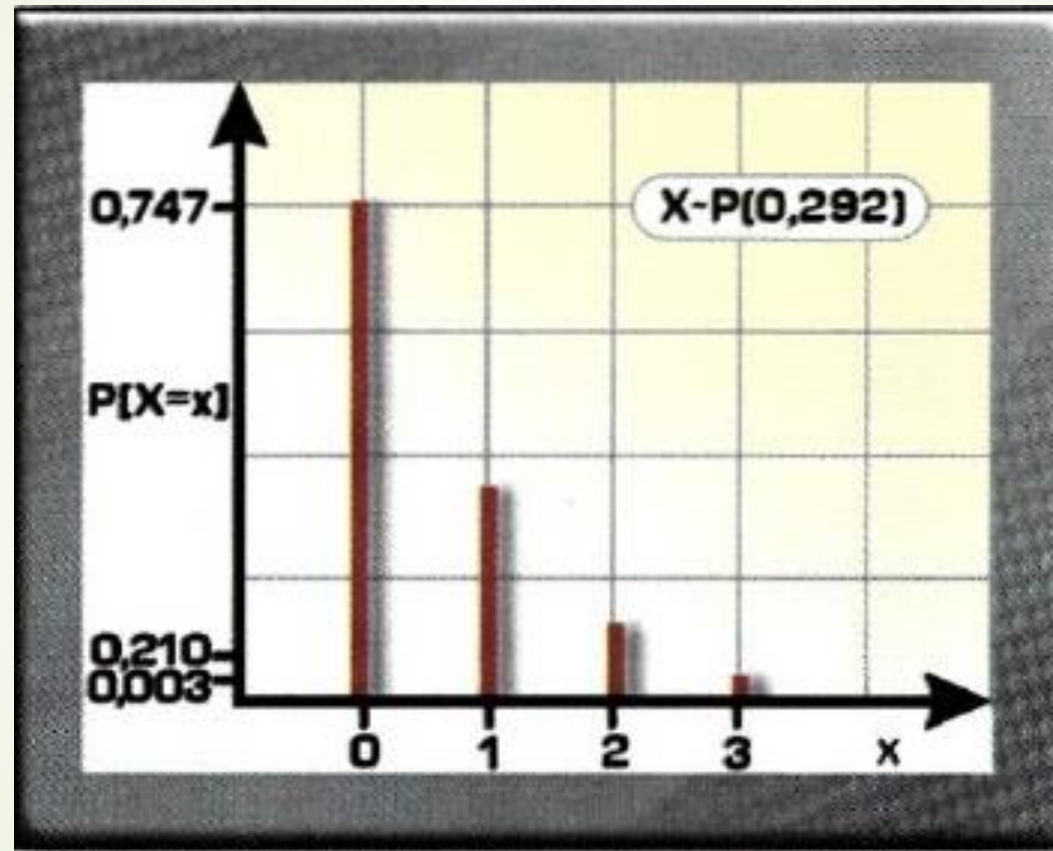
Παράδειγμα 4

$$P(X = 1) = e^{-0.292} \frac{(0.292)^1}{1!} = 0.218 = 21.8\%$$

$$P(X = 2) = e^{-0.292} \frac{(0.292)^2}{2!} = 0.032 = 3.2\%$$

$$P(X = 3) = e^{-0.292} \frac{(0.292)^3}{3!} = 0.003 = 0.3\%$$

Παράδειγμα 4



Παράδειγμα 5

Έχει παρατηρηθεί ότι 3 άτομα το μήνα κατά μέσο όρο πεθαίνουν στην Αθήνα από μια σπάνια ασθένεια. Αν ο αριθμός των θανάτων από την ασθένεια αυτή ακολουθεί την κατανομή Poisson, να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

(A) Να υπάρξουν τουλάχιστον 2 θάνατοι από την ασθένεια αυτή σε ένα μήνα

(B) Να υπάρξουν το πολύ 4 θάνατοι από την ασθένεια αυτή σε χρονικό διάστημα 2 μηνών

Παράδειγμα 5

Λύση:

(A) Ο αριθμός X των θανάτων από την ασθένεια αυτή σε διάστημα ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 3$,

Δηλαδή $X \sim P(3)$

Η πιθανότητα να τουλάχιστον 2 θάνατοι από την ασθένεια αυτή σε ένα μήνα είναι:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

Παράδειγμα 5

Όπου:

$$P(X = 0) = e^{-3} \frac{(3)^0}{0!} = e^{-3}$$

$$P(X = 1) = e^{-3} \frac{(3)^1}{1!} = 3e^{-3}$$

Άρα:

$$P(X \geq 2) = 1 - 4e^{-3} = 0.8008 = 80.08\%$$

Παράδειγμα 5

(B) Έστω τώρα Y ο αριθμός των θανάτων από την ασθένεια αυτή σε χρονικό διάστημα 2 μηνών.

Ο **μέσος αριθμός** των θανάτων ανά δίμηνο είναι $\lambda = 2 \cdot 3 = 6$, οπότε $Y \sim P(6)$

$$P(Y \leq 4)$$

$$= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) = 0.2851 = 28.51\%$$

Άσκηση 4

Ο αριθμός X των σωματιδίων που εκπέμπει μια ραδιενεργός πηγή ανά δευτερόλεπτο ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο $\lambda = 5$. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $P(X = 0)$ και $P(X \geq 1)$.

Άσκηση 5

Μέσα στο διάστημα μιας ώρας φθάνουν σε ένα γραφείο κατά μέσο όρο 2 κλήσεις ανά λεπτό. Υποθέτοντας ότι ο αριθμός των κλήσεων ανά λεπτό ακολουθεί κατανομή **Poisson** να βρεθεί η πιθανότητα το γραφείο να δεχθεί:

- α) 4 κλήσεις σε κάποιο τυχαίο λεπτό.
- β) 6 κλήσεις σε τυχαίο χρονικό διάστημα 2 λεπτών.

Άσκηση 6

Ο αριθμός των τηλεφωνημάτων που δέχεται μια εταιρεία ταξί ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο αριθμό τηλεφωνημάτων 4 κλήσεις κάθε 30 min . Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

- α)** Η εταιρεία δεν δέχεται καμία κλήση σε 30min .
- β)** Η εταιρεία δέχεται μία κλήση σε 1 ώρα.
- γ)** Η εταιρεία δέχεται λιγότερες από 2 κλήσεις σε 15min.

Βιβλιογραφία

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ , Β ΜΑΧΙΜΟΙ, Β
ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ , ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ

Ποσοτική Ανάλυση & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΩΝ EXCEL, ISALOS ΚΑΙ SPSS

Μιλτιάδης Χαλικιάς



Βιβλιογραφία

Γ. Κοκολάκης, Ι.
Σπηλιώτης Εισαγωγή
στις Πιθανότητες,
Εκδόσεις Συμεών

P. Hoel, S. Port, C. Stone
Εισαγωγή στην θεωρία
Πιθανοτήτων,
Πανεπιστημιακές
Εκδόσεις Κρήτης

Δ. Χελιώτης Ένα
Δεύτερο Μάθημα στις
Πιθανότητες
eBooks4Greeks,
Ελεύθερη Ψυφιακή
Βιβλιοθήκη

W. Feller, An
Introduction to
Probability Theory and
its Applications, John
Wiley & Sons

Α. Χαραλαμπίδης
Θεωρία Πιθανοτήτων
και Εφαρμογές,
Εκδόσεις Συμμετρία