Μη ομογενης δ.ε. $2^{ης}$ τάξεως με σταθερούς συντελεστές.

$$ay'' + \beta y' + \gamma y = g(x)$$

Η λυση της δ.ε. είναι

$$y = y_{ομ} + y_{μερ}$$

όπου • $y_{ομ}$ είναι λυση της αντίστοιχης ομογενους δ.ε δηλ της

$$ay'' + \beta y' + \gamma y = 0$$

• $y_{μερ}$ είναι μια μερική λυση της δ.ε.

Ευρεση μερικης λύσης ($y_{μερ}$)

Αν:

$g(x) = e^{ax}\cdot(b_k x^k + \ldots + b_1 x + b_0)$

1) Αν $x = a$ Δεν είναι λυση της αντιστοιχης χαρακτηριστικής εξισωσης

χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε

$y_{\mu\varepsilon\rho} = e^{ax}\underbrace{(A_k x^k + \dots + A_1 x + A_0)}$

2) Αν $x = a$ ΕΙΝΑΙ λυση της χαρακτηριστικης με πολλαπλοτητα n.

$$y_{\mu\varepsilon\rho} = e^{ax} \cdot x^n (A_k x^k + \dots + A_1 x + A_0)$$

παραδείγματα:

1. Να λυθει η δ.ε. :

$$y'' + y = x^2 + x - 1$$

$g(x) = e^{ax}(b_k x^k + \dots + b_0)$

$g(x) = \begin{cases} a = 0 \\ \boxed{k = 2} \end{cases}$

$x = 0$ ΔΕΝ είναι λυση της αντ. ομογενής

$y_{\mu\varepsilon\rho} = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$

Λύση:

- $y'' + y = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$\underline{\lambda^2 + 1 = 0} \Rightarrow \lambda = 0 \pm i$

$a \pm \beta i$

Επομένως, η λυση της ομογενούς είναι:

$$\boxed{y_{o\mu} = c_1 e^{ax}\cos\beta x + c_2 e^{ax}\sin\beta x}$$

$y_{o\mu} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

- Ευρεση μιας μερικη λύση

Η μορφη που θα έχει η μερικη λυση είναι

$\underline{y_{\mu\varepsilon\rho}} = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$

Η μερ. λυση $y_{\mu\varepsilon\rho}$ πρεπει να ικανοποιει την εξισωση μας

$$y'' + y = x^2 + x - 1$$

$$y'_{\mu\varepsilon\rho} = 2A_2 x + A_1$$

$$y''_{\mu\varepsilon\rho} = 2A_2$$

$$2A_2 + A_2x^2 + A_1 x + A_0 = x^2 + x - 1$$

$$A_2 x^2 + A_1 x + 2A_2 + A_0 = x^2 + x - 1$$

$$A_2 = 1$$

$$A_1 = 1$$

$$2A_2 + A_0 = -1 \Rightarrow A_0 = -3$$

Άρα $y_{μερ} = x^2 + x - 3$

Επομένως, η λύση της δ.ε. είναι

$y = y_{ομ} + y_{μερ}$

$$\boxed{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 + x - 3.}$$

2. Να λυθεί η δ.ε.:

$$y'' + y' = 6x - 2.$$

• Η αντίστοιχη ομογενής είναι:

$$y'' + y' = 0$$

• Χαρακτηριστική εξίσωση

$\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ (πολ/τα 1)

$\lambda = -1$

$\lambda_1 = a_1$
$\lambda_2 = a_2$

Η λύση της ομογενούς είναι

$y_{ομ} = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x}$

$$y_{ομ} = C_1 + C_2 e^{-x}$$

- Ευρεση της $y_{μερ}$

$g(x) = e^{ax}(b_k x^k + \dots + b_0)$

$g(x) = 6x - 2$

$a = 0$
$k = 1$

Το $x=0$ είναι λυση της χαρακτηριστικη εξισωσης με πολ/τητα 1

Αρα $y_{μερ} = x^1 (A_1 x + A_0)$

$y_{μερ} = A_1 x^2 + A_0 x$

$y'_{μερ} = 2A_1 x + A_0$

$y''_{μερ} = 2A_1$

Αντικαταστουμε στην δ.ε. $y'' + y' = 6x - 2$

$$2A_1 + 2A_1 x + A_0 = 6x - 2$$

$$2A_1 x + 2A_1 + A_0 = 6x - 2$$

$$2A_1 = 6 \Rightarrow A_1 = 3$$

$$2A_1 + A_0 = -2 \Rightarrow A_0 = -8$$

Επομένως, $y_{μερ} = 3x - 8$

και η γενική λύση της δ.ε. είναι:

$$\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-x} + 3x - 8}$$