

Ανάλυση Μιας Μεταβλητής**Σχολή Ναυτικών Δοκίμων****Α΄ Μάχιμοι – Α΄ Μηχανικοί****Φύλλο Ασκήσεων****Όριο Συνέχεια:**

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x \sin \frac{1}{x} - x^2\right) \sin \left(x \sin \frac{1}{x} - x^2\right)}{\sqrt{1 + \left(x \sin \frac{1}{x} - x^2\right)^2} - 1}$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x\sqrt{x+2} - 3\sqrt{x+2} + 4}{x+1}$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1 + 2 \tan x}{x + \sin x}$$

$$(iv) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$(v) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-4| + 5|x| - 16}{x^2 - 9}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Να

υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(2x) + f(-x)\sin 3x}{\sin^2 x - 2x^2}$

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε τα σημεία στα οποία είναι ασυνεχής καθώς και το είδος της ασυνέχειας που παρουσιάζουν στα σημεία αυτά .

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4}, & |x| \neq 2 \\ 0, & |x| = 2 \end{cases}$$

$$(ii) \quad f(x) = \begin{cases} \sin x + \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}, & 0 < x < \pi \\ \sqrt{2}, & x = 0 \end{cases}$$

$$(iii) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

4. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b-1}{x-1}, & x > 1 \\ 2ax+1, & x \leq 1 \end{cases}$ Να υπολογίσετε τα $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε το

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ να υπάρχει.

Παράγωγος Συνάρτησης

5. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \dots + \alpha_n \sin nx$, όπου $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Αν $|f(x)| \leq |\sin x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $|\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n\alpha_n| \leq 1$.

6. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της καμπύλης $x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0$
Στο σημείο $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

7. Να εξετάσετε αν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ στο } x_0 = 0$$

8. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$f(x) = (3 - 2 \sin x)^5$$

$$f(x) = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \sin x$$

$$f(x) = x^{\sin x}, x > 0$$

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}, x \neq \pm 1$$

Μελέτη Συνάρτησης:

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 4$.

- (i) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- (ii) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- (iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της συνάρτησης f .
- (iv) Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε την γραφική παράστασή της.

10.

(i) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x - 1}{x^2}$

- (ii) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.
- (iii) Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της.
- (iv) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- (v) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$.

- (i) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- (ii) Να βρείτε της ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της.

Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε την γραφική παράστασή της

12. Μεταξύ όλων των ορθογωνίων που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R , να προσδιορίσετε εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Αόριστο Ολοκλήρωμα

13. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

- (i) $\int \frac{x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$
- (ii) $\int (2x+1)(x+1)^7 dx$
- (iii) $\int 2x \arctan(x^2+1) dx$
- (iv) $\int e^{\sqrt{x}} dx$
- (v) $\int \sin(\sqrt{x}) dx$

14. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

- (i) $\int \frac{1}{\sin^2 2x} dx$
- (ii) $\int (x-1)^2 (x+1)^8 dx$
- (iii) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
- (iv) $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$

15. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

- (i) $\int (\ln x)^2 dx$
- (ii) $\int \frac{2x+1}{x^2+1} dx$
- (iii) $\int x^7 e^{x^4} dx$

16. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

- (i) $\int \frac{x^5+2}{x^2-1} dx$
- (ii) $\int \frac{x^2+5x+2}{(x^2+1)(x+1)} dx$
- (iii) $\int \frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1} dx$
- (iv) $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx$
- (v) $\int \frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2} dx$

17. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

- (i) $\int \frac{1}{\sin x} dx$
- (ii) $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$
- (iii) $\int \cos^5 x dx$
- (iv) $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x} dx$
- (v) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} dx$
- (vi) $\int \frac{1}{1+2\sin^2 x} dx$

Συνδυαστικές Ασκήσεις:

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x + \sin x}$, $x \geq 0$

- (i) Να βρεθεί η μονοτονία της f
- (ii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f
- (iii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{2\sqrt{\pi}} xf^{-1}(x)dx$
- (iv) Το χωρίο μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και των ευθειών $x = 0$ και $x = \pi$ περιστρέφεται γύρω από την άξονα $x'x$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\ln x}$

- (i) Να βρεθεί η μονοτονία της f
- (ii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f
- (iii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e (2\ln x + 1)f(x)dx$
- (iv) Το χωρίο μεταξύ της γραφικής παράστασης της $g(x) = \sqrt[4]{\ln[f(x)]}$ και των ευθειών $x = 1$ και $x = e$ περιστρέφεται γύρω από την άξονα $x'x$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\sqrt{x}-x}$

- (i) Να βρεθεί η μονοτονία της f
- (ii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f
- (iii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 x^2 e^{-\sqrt{x}} f(x) dx$
- (iv) Το χωρίο μεταξύ της γραφικής παράστασης της $g(x) = \ln[f(x)]$ και των ευθειών $x = 1$ και $x = 4$ περιστρέφεται γύρω από την άξονα $x'x$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της A
- β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
- γ) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
- δ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f
- ε) Να βρεθούν τα ολοκληρώματα $\int (f(x) + 1) dx$ και $\int f(x) dx$
- στ) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)}$