# Σειρές Πραγματικών Αριθμών

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ε. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ – Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΎ

# Βασικοί Ορισμοί

**Ορισμός:**

Έστω μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ .

Η ακολουθία με γενικό όρο

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

ονομάζεται **ακολουθία μερικών αθροισμάτων** της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$

# Βασικοί Ορισμοί

**Ορισμός:**

Ονομάζουμε **σειρά των αριθμών** $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots}$ το όριο της ακολουθίας

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\lim_{\boldsymbol{n} \longrightarrow +\infty} S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

# Βασικοί Ορισμοί

- Ο αριθμός $\boldsymbol{\alpha_n}$ ονομάζεται $\boldsymbol{n}$ **−οστός όρος** ή **γενικός όρος** της σειράς και το άθροισμα $s_n$ $\boldsymbol{n}$ **−οστό μερικό άθροισμα** της σειράς.

# Σύγκλιση Σειράς

- Για τη σύγκλιση της σειράς διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

➢ Αν το όριο $\lim_{\boldsymbol{n}\longrightarrow+\infty} S_n = \boldsymbol{s}$, όπου $s$ πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει προς το $\boldsymbol{s}$,** ή ότι η σειρά **έχει άθροισμα το $\boldsymbol{s}$**, δηλαδή

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

# Σύγκλιση Σειράς

- Αν το όριο $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$ τότε λέγεται ότι **η σειρά συγκλίνει κατ' εκδοχή προς το** $+\infty$ **ή ότι απειρίζεται θετικά.**

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = +\infty$$

# Σύγκλιση Σειράς

- Αν το όριο $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = -\infty$ τότε λέγεται ότι **η σειρά συγκλίνει κατ' εκδοχή προς το $-\infty$ ή ότι απειρίζεται αρνητικά**

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = -\infty$$

- Αν δεν υπάρχει το $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n$ τότε λέμε ότι **η σειρά αποκλίνει**.

# Ιδιότητες Σύγκλισης

**Πρόταση 1:**

Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = b$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$ τότε για κάθε

$k, l \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (ka_n + lb_n) = ka + lb$$

# Ιδιότητες Σύγκλισης

**<u>Παρατήρηση:</u>**

Πρέπει να τονισθεί ότι αν δύο σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ , δεν συγκλίνουν, τότε αυτό δεν συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$

δεν συγκλίνει.

# Ιδιότητες Σύγκλισης

- Για παράδειγμα, αν $a_n = n, b_n = -n$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = -\infty$, αλλά

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}(n - n) = 0$$

# Αξιοσημείωτες Σειρές – Γεωμετρική Σειρά

- Κάθε σειρά της μορφής

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$$

ονομάζεται **γεωμετρική σειρά**.

# Αξιοσημείωτες Σειρές – Γεωμετρική Σειρά

Αποδεικνύεται ότι:

- κάθε γεωμετρική σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $|a| < 1.$

Ειδικά για $|a| < 1$ αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = \frac{1}{1-\alpha}$$

# Αξιοσημείωτες Σειρές – Γεωμετρική Σειρά

- Αν $\alpha > 1$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} = +\infty$$

- Αν $\alpha < -1$ η σειρά αποκλίνει

# Αξιοσημείωτες Σειρές – Γεωμετρική Σειρά

Γενικότερα έχουμε:

$$\text{Αν } |\alpha| < 1, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\text{Αν } |\alpha| < 1, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

# Αξιοσημείωτες Σειρές – Γεωμετρική Σειρά

$$\text{Αν } |\alpha| < 1, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n+k} = \frac{\alpha^{k+1}}{1-\alpha}$$

# Παραδείγματα

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = +\infty$
3. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ αποκλίνει.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

# Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^{n+1}+4^{n-1}}{5^{n+1}}$$

# Παράδειγμα 5

**Λύση**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^{n+1}+4^{n-1}}{5^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3\cdot 3^{n}+\frac{1}{4}\cdot 4^{n}}{5\cdot 5^{n}} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{n} + \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} + \frac{1}{20}\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\right] =$$

# Παράδειγμα 5

Δηλαδή,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3^{n+1} + 4^{n-1}}{5^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{1}{20} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

# Παράδειγμα 5

Οι τελευταίες σειρές είναι γεωμετρικές σειρές με $|a| < 1$, επομένως έχουμε

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n} + \frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} + \frac{1}{20}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{n} =$$

$$= \frac{1}{5}\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} + \frac{3}{5}\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} + \frac{1}{20}\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{20} + \frac{9}{10} + \frac{1}{5} = \frac{23}{20}$$

# Παράδειγμα 5

Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^{n+1}+4^{n-1}}{5^{n+1}} = \frac{23}{20}$$

# Αξιοσημείωτες Σειρές – Αρμονική Σειρά

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$$

ονομάζεται **αρμονική σειρά** τάξης p.

Αποδεικνύεται ότι η αρμονική σειρά

- Συγκλίνει για $\rho > 1$ και
- Απειρίζεται θετικά για $\rho \leq 1$.

# Παραδείγματα

6. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, αφού είναι αρμονική με $\rho = 2 > 1$
7. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ συγκλίνει, αφού είναι αρμονική με $\rho = \frac{3}{2} > 1$

# Παραδείγματα

8. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

αφού είναι αρμονική με $\rho = 1$

# Παραδείγματα

9. Ή σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

αφού είναι αρμονική με $\rho = \frac{1}{2} < 1$

# Ιδιότητες Σύγκλισης – Συνέχεια

**<u>Πρόταση 2:</u>**

Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό) τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

# Ιδιότητες Σύγκλισης

**<u>Παρατηρήσεις:</u>**

Το αντίστροφο της ιδιότητας αυτής δεν ισχύει. Για παράδειγμα,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$ , δηλαδή απειρίζεται θετικά.

# Ιδιότητες Σύγκλισης

- Η παραπάνω ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται για την απόδειξη της μη σύγκλισης ορισμένων σειρών.

# Παράδειγμα 10

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2 - 3n + 4}{n^2 + 1}$$

# Παράδειγμα $\mathbf{10}$

**Λύση:**

Αν $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ ακολουθία με

$\alpha_n = \frac{4n^2-3n+4}{n^2+1},\ n\epsilon\mathbb{N}^*$ έχουμε ότι

# Παράδειγμα **10**

$$\lim_{n\to+\infty} a_n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2 - 3n + 4}{n^2 + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(4 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(4 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 4$$

$$\neq 0$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2-3n+4}{n^2+1}$ δεν συγκλίνει.

# Κριτήρια Σύγκλισης

**<u>Πρόταση 3 (Κριτήριο Σύγκρισης):</u>**

Για δύο σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ με $0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq n_0$, όπου $n_0 \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα παρακάτω:

- Αν η σειρά , $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$
- Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, τότε και $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$

# Παράδειγμα 11

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

**<u>Λύση:</u>**

Έχουμε ότι $0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

Επιπλέον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, (αρμονική σειρά με $n = 2 > 1$).

# Παράδειγμα $\mathbf{11}$

Άρα και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ συγκλίνει από κριτήριο σύγκρισης.

# Παράδειγμα 12

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2\sqrt{n}-1}$

**<u>Λύση:</u>**

Έχουμε ότι $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

Επιπλέον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$ ,

(αρμονική σειρά με $n = \frac{1}{2} < 1$).

# Παράδειγμα 12

Άρα και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2\sqrt{n}-1} = +\infty$

από κριτήριο σύγκρισης.

# Κριτήρια Σύγκλισης – Κριτήριο λόγου D' Alembert

**Πρόταση 4 (Κριτήριο λόγου D' Alembert):**

Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με όλους τους όρους της θετικούς και

$$\rho = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

ισχύουν τα παρακάτω:

# Κριτήρια Σύγκλισης – Κριτήριο λόγου D’ Alembert

<u>**Πρόταση 4 (Κριτήριο λόγου D’ Alembert):**</u>

**(i)** Αν $p < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει,

**(ii)** Αν $\rho > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ απειρίζεται θετικά

(Ακόμα και αν $\rho = +\infty$)

- **Τονίζεται ότι όταν $\rho = 1$ το κριτήριο λόγου δεν δίδει απάντηση για τη σύγκλιση της σειράς.**

# Παράδειγμα 13

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$

**Λύση:**

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ έχει όλους τους όρους της $a_n = \frac{2n-1}{3^n}$ θετικούς.

Επιπλέον $\rho = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{2n+1}{3^{n+1}}}{\frac{2n-1}{3^n}} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2n+1}{3(2n-1)} = \frac{1}{3} < 1.$

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο λόγου η σειρά συγκλίνει.

# Παράδειγμα 14

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n-3}{2^n}$

**<u>Λύση:</u>**

Η σειρά$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n-3}{2^n}$έχει όλους τους όρους της $a_n=\frac{n^2+2n-3}{2^n}$ θετικούς.

# Παράδειγμα 14

Επιπλέον

$$\rho = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+2(n+1)-3}{2^{n+1}}}{\frac{n^2+2n-3}{2^n}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2+2(n+1)-3}{2(n^2+2n-3)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο λόγου η σειρά συγκλίνει.

# Κριτήρια Σύγκλισης – Κριτήριο ρίζας Cauchy

**Πρόταση 5 (Κριτήριο ρίζας Cauchy):**

Για μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, η οποία έχει όλους τους όρους της θετικούς με $l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ , ισχύουν τα παρακάτω:

# Κριτήρια Σύγκλισης – Κριτήριο ρίζας Cauchy

**Πρόταση 5 (Κριτήριο ρίζας Cauchy):**

**(i)** Αν $l < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

**(ii)** Αν $l > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ απειρίζεται θετικά.

- **Τονίζεται ότι όταν $l = 1$ το κριτήριο ρίζας δεν δίδει απάντηση για τη σύγκλιση της σειράς.**

# Παράδειγμα 15

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{\boldsymbol{n}}$

**Λύση:**

Η σειρά$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{\boldsymbol{n}}$ έχει όλους τους όρους της $a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{\boldsymbol{n}}$ θετικούς.

# Παράδειγμα 15

Επιπλέον

$$l = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{\boldsymbol{n}}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο ρίζας η σειρά συγκλίνει.

# Παράδειγμα 16

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

**Λύση:**

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ έχει όλους τους όρους της

$a_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ θετικούς.

# Παράδειγμα 16

Επιπλέον

$$l = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1.$$

Επομένως σύμφωνα με το κριτήριο ρίζας η σειρά απειρίζεται θετικά.

# Μελέτη Σειράς ως προς τη Σύγκλιση – Σύνοψη

Για την μελέτη μιας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, η οποία έχει όλους τους όρους της θετικούς έχουμε:

- Αν $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$, τότε η σειρά δεν συγκλίνει.

# Μελέτη Σειράς ως προς τη Σύγκλιση – Σύνοψη

- **(Κριτήριο Λόγου)** Θεωρούμε

$$\rho = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- Αν $p < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει,
- Αν $\rho > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ απειρίζεται θετικά.

# Μελέτη Σειράς ως προς τη Σύγκλιση – Σύνοψη

- **(Κριτήριο Ρίζας)** Θεωρούμε

$$l = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

- Αν $l < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει,
- Αν $l > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ απειρίζεται θετικά.

# Μελέτη Σειράς ως προς τη Σύγκλιση – Σύνοψη

- Η **αρμονική σειρά**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\rho}}$$

- Συγκλίνει για $\rho > 1$ και
- Απειρίζεται θετικά για $\rho \leq 1$.

# Μελέτη Σειράς ως προς τη Σύγκλιση – Σύνοψη

- Η **γεωμετρική σειρά**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n , \alpha > 0$$

- Συγκλίνει για $0 < \alpha < 1$ και
- Απειρίζεται θετικά  για $\alpha \geq 1$

# Μελέτη Σειράς ως προς τη Σύγκλιση – Σύνοψη

- Ειδικά για $|a| < 1$, ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \frac{a}{1-a}$$

# Μελέτη Σειράς ως προς τη Σύγκλιση – Σύνοψη

- **(Κριτήριο Σύγκρισης)** Για δύο σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ , $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ με

$0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq n_0$, όπου $n_0 \in \mathbb{N}$

- Αν η σειρά , $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$
- Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, τότε και $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$

# Βιβλιογραφία


- Θεμιστοκλής Μ. Ρασσιάς, Μαθηματική Ανάλυση Ι, Τεύχος Α, Εκδόσεις Σαββάλα, Αθήνα 2004
- H. L. Royden, Real Analysis, The Macmillan Company, London 1968
- Αναστάσιος Σ. Κορκοτσίδης, Μαθηματικά Οικονομικής Ανάλυσης, Τόμος Α, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 1994
- Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι, Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα 1995

# Βιβλιογραφία


- Παπαδημητράκης, Μ. 2015. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ. [Κεφάλαιο Συγγράμματος]. Στο Παπαδημητράκης, Μ. 2015. *Ανάλυση*. [ηλεκτρ. βιβλ.] Αθήνα:Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. κεφ 2.

Διαθέσιμο στο: http://hdl.handle.net/11419/2892