Σειρές Taylor και Maclaurin

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ε. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ – Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΎ

Πολυώνυμα Taylor και Maclaurin

- Σε πολλές περιπτώσεις στις εφαρμογές των μαθηματικών, οι υπολογισμοί είναι απλούστεροι για τα πολυώνυμα παρά για άλλες συναρτήσεις.
- Έχει νόημα επομένως να βρούμε έναν τρόπο να προσεγγίσουμε μία δοσμένη συνάρτηση $f(x)$ με ένα πολυώνυμο $\mathrm{p}(x)$ για όλες τις τιμές του x κοντά σε έναν δοσμένο αριθμό x_0.

Πολυώνυμα Taylor και Maclaurin

- Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε μία συνάρτηση $f(x)$ με ένα πολυώνυμο $\mathrm{p}(x)$ για όλες τις τιμές του x κοντά σε έναν δοσμένο αριθμό $x_0 = \alpha$.
- Θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την $f(x)$ με ένα πολυώνυμο $\mathrm{p}(x)$ για το οποίο οι τιμές των παραγώγων της f και του p στο $x_0 = \alpha$ ταυτίζονται.

Πολυώνυμα Taylor και Maclaurin

- Δηλαδή

$$f(a) = p(a), f'(a) = p'(a), f''(a) = p''(a), \dots, f^{(n)}(a) = p^{(n)}(a)$$

Αυτό το πρόβλημα επιλύεται εύκολα αν θεωρήσουμε ένα πολυώνυμο που έχει τη μορφή

Πολυώνυμα Taylor και Maclaurin

- Δηλαδή

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$$

- Αποδεικνύεται ότι το πολυώνυμο που ικανοποιεί τα παραπάνω είναι το παρακάτω πολυώνυμο, γνωστό και ως **πολυώνυμο Taylor**.

Πολυώνυμο Taylor

Ορισμός :

Έστω συνάρτηση f με παραγώγους των τάξεων

$k = 1,2, \dots, N$ σε ένα διάστημα $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ και a ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος I.

Το **πολυώνυμο Taylor τάξης** $\boldsymbol{n} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{N}\}$ **που παράγεται από την** $\boldsymbol{f}$ **στο** $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ είναι το

Πολυώνυμο Taylor

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Πολυώνυμο Taylor

Δηλαδή,

$$P_n(x) =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Πολυώνυμο Maclaurin

<u>**Ορισμός :**</u>

Έστω συνάρτηση f με παραγώγους των τάξεων

σε ένα διάστημα $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ και 0 εσωτερικό σημείο του διαστήματος I.

Το **πολυώνυμο Maclaurin τάξης** $\boldsymbol{n} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{N}\}$ **που παράγεται από την** f είναι το

Πολυώνυμο Maclaurin

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Δηλαδή,

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Παράδειγμα 1

Προσδιορίστε τα πρώτα τρία πολυώνυμα (τάξης $1,2,3$) Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = e^x$.

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των πολυωνύμων αυτών και τις συνάρτησης f, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Παράδειγμα 1

Λύση

Έχουμε $f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x$

$f^{(3)}(x) = e^x$.

Επομένως,

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 1$$

Παράδειγμα 1

Το πολυώνυμο Maclaurin τάξης $n \in \{1,2,\dots,N\}$ που παράγεται από την f είναι το

$$\boldsymbol{P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

Άρα

Παράδειγμα 1

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = x + 1$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^2 =$$

$$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

Παράδειγμα 1

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = e^x$ και των πολυώνυμων Maclaurin τάξης $n = 1,2,3$ που παράγονται από την f

$$\boldsymbol{P_1(x) = x + 1}$$

$$\boldsymbol{P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1}$$

$$\boldsymbol{P_3(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1}$$

Παράδειγμα 1

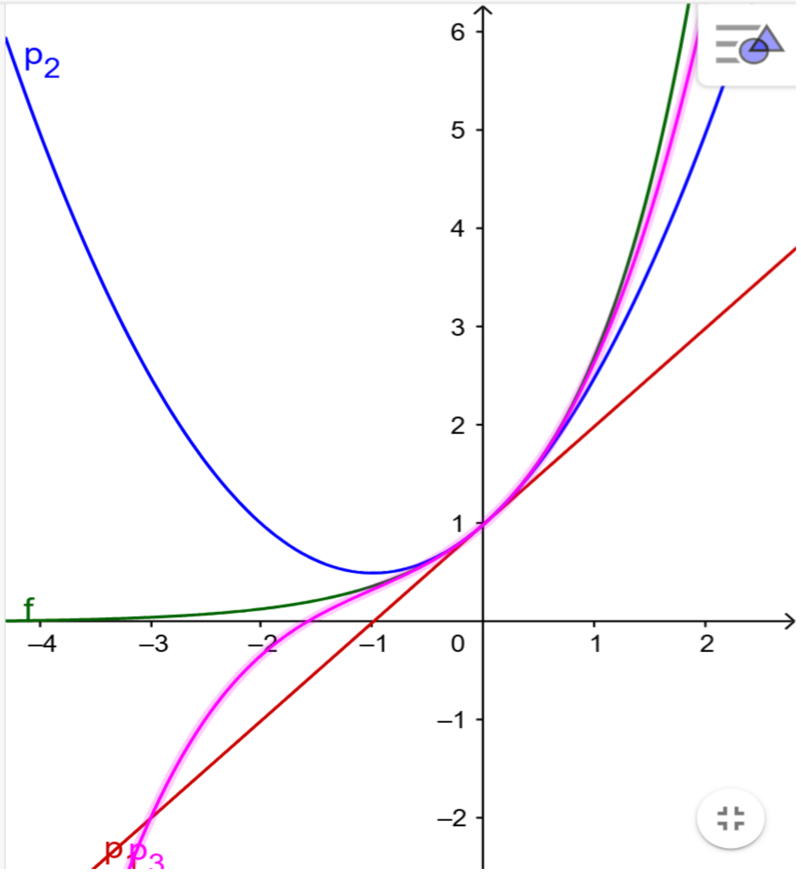
$f(x) = e^x$

$p_1(x) = x + 1$

$p_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

$p_3(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

Input...



Παράδειγμα 1

Η σχετική ακρίβεια αυτών των προσεγγίσεων της $f(x) = e^x$ φαίνεται από τις γραφικές παραστάσεις.

Παράδειγμα $\mathbf{2}$ (Χρήση του πολυώνυμου Taylor για την προσέγγιση ολοκληρώματος)

Με την βοήθεια του πολυώνυμου Maclaurin τάξης 2 προσεγγίστε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = sin(x^2)$, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.

Παράδειγμα 2

Λύση

Έχουμε $f(x) = sin(x^2),\ f'(x) = 2xcos(x^2)$,

$f''(x) = 2cos(x^2) - 4x^2 sin(x^2)$

Επομένως,

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 2$$

Παράδειγμα 2

Το πολυώνυμο Maclaurin τάξης $n = 2$ που παράγεται από την f είναι το

$$\boldsymbol{P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2}$$

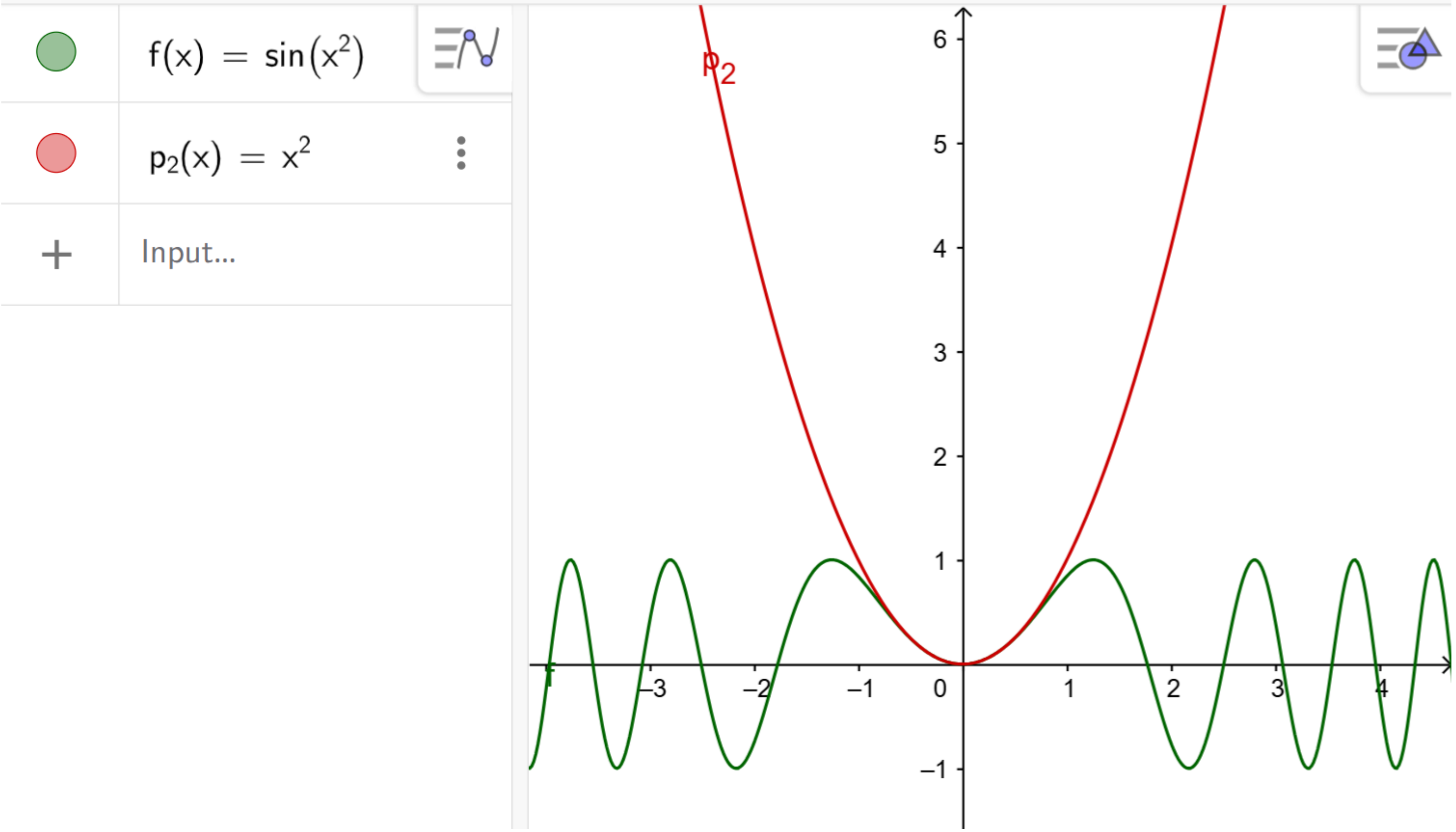
Δηλαδή το

$$\boldsymbol{P_2(x) = x^2}$$

Παράδειγμα 2

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = sin(x^2)$ και του πολυωνύμου Maclaurin τάξης $n = 2$ που παράγεται από την f.

Παράδειγμα 2



Παράδειγμα 2

Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = sin(x^2)$ και του πολυωνύμου Maclaurin τάξης $n = 2$ που παράγεται από την f, $P_2(x) = x^2$ είναι πολύ κοντά.

Συνεπώς,

$$E(\Omega) = \int_0^1 sin(x^2)dx \cong \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}\tau.\mu.$$

Παράδειγμα 3

Με την βοήθεια του πολυώνυμου Maclaurin τάξης 1, χωρίς χρήση υπολογιστή να εκτιμήσετε την τιμή $\sqrt{1,02}$.

Παράδειγμα 3

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$

Θα βρούμε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 1$ που παράγεται από την f στο $x = 1$

(Διότι το 1 είναι αρκετά κοντά στο $1{,}02$).

Παράδειγμα 3

Έχουμε $f(x) = \sqrt{x},\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Επομένως,

$$f(1) = 1, \qquad f'(1) = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα 3

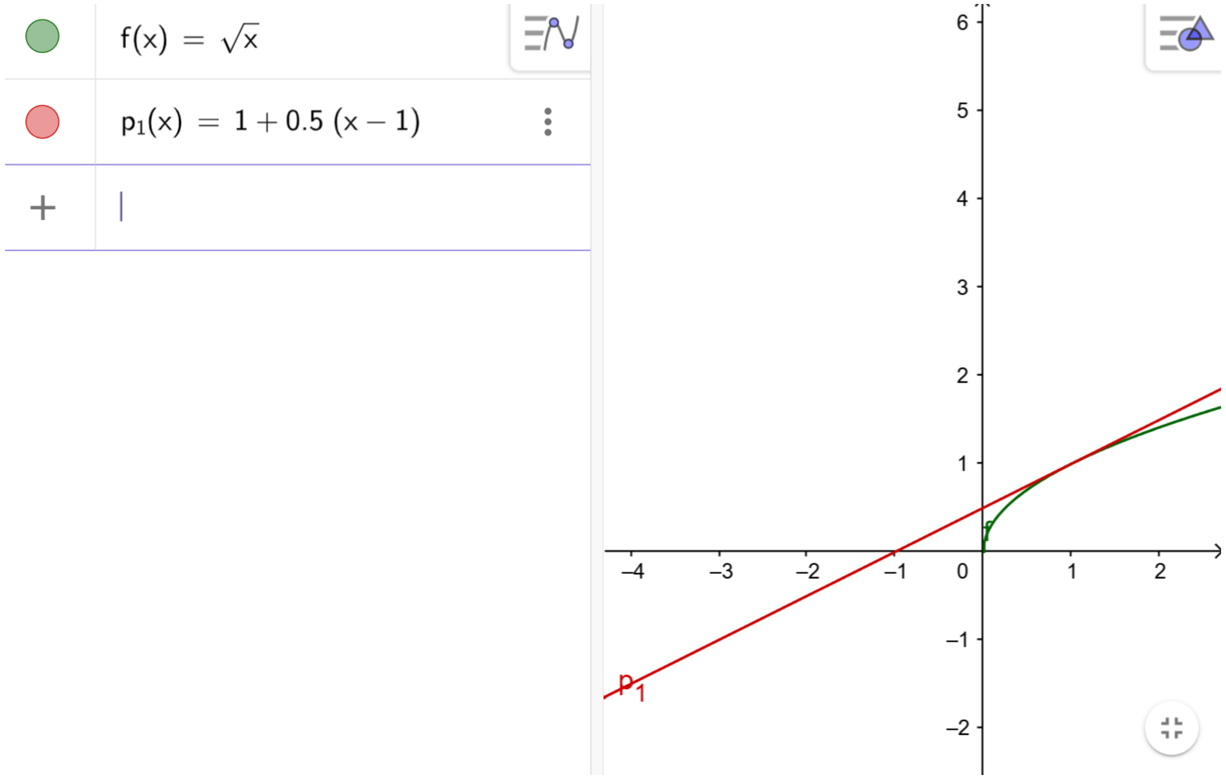
Το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 1$ που παράγεται από την f στο $x = 1$ είναι το

$$\boldsymbol{P_2(x) = \frac{1}{2}(x - 1) + 1}$$

Παράδειγμα 3

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ και του Taylor τάξης $n = 1$που παράγεται από την f στο $x = 1$.

Παράδειγμα 3



Παράδειγμα 3

Όπως φαίνεται και από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι

$$f(1,02) \cong P_1(1,02)$$

Επομένως,

$$\sqrt{1,02} = \frac{1}{2}(1,02 - 1) + 1 =$$
$$= 0,01 + 1 = 1,01$$

Παράδειγμα $\mathbf{4}$

Με την βοήθεια του πολυώνυμου Maclaurin τάξης 2, χωρίς χρήση υπολογιστή να εκτιμήσετε την τιμή $\sqrt{1{,}02}$.

Παράδειγμα 4

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$

Θα βρούμε το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 2$ που παράγεται από την f στο $x = 1$

(Διότι το 1 είναι αρκετά κοντά στο $1{,}02$).

Παράδειγμα $\mathbf{4}$

Έχουμε $f(x) = \sqrt{x},\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x}^3}$

Επομένως,

$$f(1) = 1, \qquad f'(1) = \frac{1}{2},\ f''(1) = -\frac{1}{4}$$

Παράδειγμα $\mathbf{4}$

Το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 2$ που παράγεται από την f στο $x = 1$ είναι το

$$\boldsymbol{P_2(x) = -\frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1) + 1}$$

Παράδειγμα 4

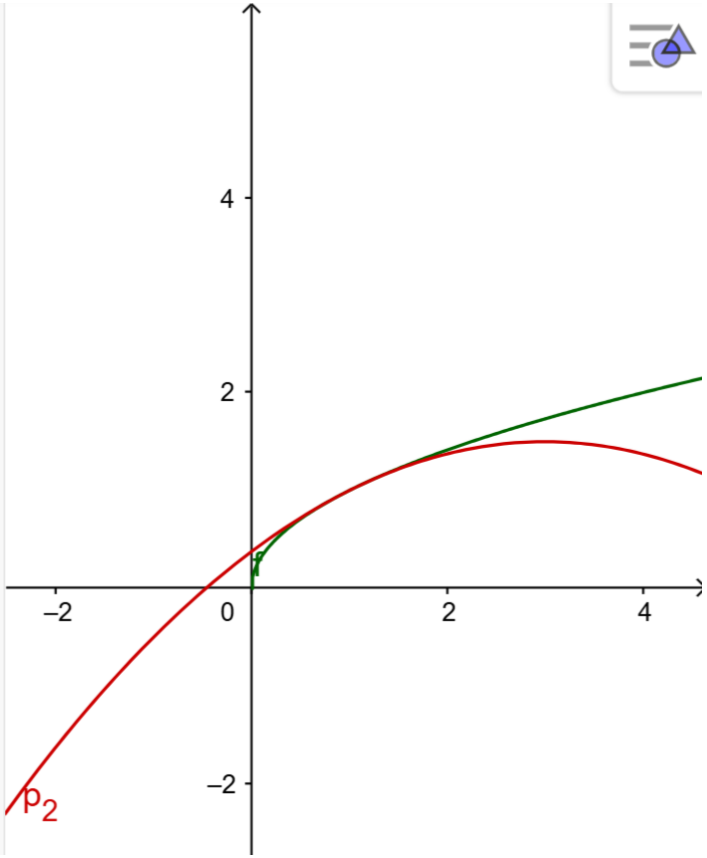
Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ και του Taylor τάξης $n = 2$ που παράγεται από την f στο $x = 1$.

Παράδειγμα 4

$f(x) = \sqrt{x}$

$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$

Input...



Παράδειγμα 4

Όπως φαίνεται και από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι

$$f(1{,}02) \cong P_2(1{,}02)$$

Επομένως,

$$\sqrt{1{,}02} \cong -\frac{1}{8}(1{,}02-1)^2+\frac{1}{2}(1{,}02-1)+1=$$
$$=-0{,}00005+0{,}01+1=1{,}00995$$

Σειρές Taylor και Maclaurin

- Σε πολλές περιπτώσεις, μία συνάρτηση f μπορεί να αντικατασταθεί από μία σειρά της μορφής

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

- Η παραπάνω σειρά ονομάζεται δυναμοσειρά (επειδή περιλαμβάνει δυνάμεις του x).

Σειρές Taylor και Maclaurin

- Αποδεικνύεται ότι όταν μία συνάρτηση $f(x)$ αναπαρίσταται με δυναμοσειρά, τότε οι συντελεστές της $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ προσδιορίζονται μοναδικά από την $f(x)$ και τις παραγώγους της $f(x)$ στο σημείο $x = 0$.

Σειρές Taylor και Maclaurin

- Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι

$$a_0 = f(x), a_1 = f'(0), a_2 = \frac{\boldsymbol{f''(0)}}{\boldsymbol{2!}}$$

και γενικά

$$a_n = \frac{\boldsymbol{f^{(n)}(0)}}{\boldsymbol{n!}}$$

Σειρές Taylor και Maclaurin

- Μία συνάρτηση σε αρκετές περιπτώσεις προσεγγίζεται κοντά σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της $x_0 = a$ με την σειρά Taylor.

Σειρές Taylor και Maclaurin

<u>Ορισμός:</u>

Έστω συνάρτηση f με παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα διάστημα $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$

Και a ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος I.

Η **σειρά Taylor που παράγεται από την $\boldsymbol{f}$ στο $\boldsymbol{x = a}$** είναι η

Σειρές Taylor και Maclaurin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Σειρές Taylor και Maclaurin

- **Η σειρά Taylor για $a = 0$ ονομάζεται σειρά Maclaurin**.

Επομένως έχουμε τον παρακάτω ορισμό

Σειρές Taylor και Maclaurin

Ορισμός:

Έστω συνάρτηση f με παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα διάστημα $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$

Και 0 εσωτερικό σημείο του διαστήματος I.

Σειρές Taylor και Maclaurin

Η **σειρά Maclaurin που παράγεται από την** f είναι

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί η σειρά Taylor την οποία παράγει η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $x = 2$.

Παράδειγμα 5

Λύση

Χρειάζεται να βρούμε τις τιμές $f(2), f'(2), f''(2)$ και γενικά την τιμή $f^{(n)}(2)$

Έχουμε:

Παράδειγμα 5

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} = -1!\,x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3} = 2!\,x^{-3},\ f^{(3)}(x) = -6x^{-4} = -3!\,x^{-4}$

$f^{(4)}(x) = 24x^{-5} = 4!\,x^{-5}$

Και γενικά

$$\boldsymbol{f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-n-1}}$$

Παράδειγμα 5

Επομένως για $x = 2$ προκύπτουν τα εξής:

$f(2) = \frac{1}{2},\ f'(2) = -\frac{1}{4} = -2^{-2}$

$f''(2) = 2!\,2^{-3},\ f^{(3)}(2) = -3!\,2^{-4}$

$f^{(4)}(2) = 4!\,2^{-5}$

Και γενικά

$$\boldsymbol{f^{(n)}(2) = (-1)^n n!\,2^{-n-1}}$$

Παράδειγμα 5

Συνεπώς η **σειρά Taylor που παράγεται από την**$f(x)=\frac{1}{x}$ **στο** $x=\mathbf{2}$ είναι

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k=$$

Παράδειγμα 5

$$= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \cdots =$$

Παράδειγμα 5

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{2!\,2^{-3}}{2!}(x-2)^2 - \frac{3!\,2^{-4}}{3!}(x-2)^3 + \cdots + \frac{(-1)^n n!\ 2^{-n-1}}{n!}(x-2)^n + \cdots =$$

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^k}$$

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί η σειρά Maclaurin την οποία παράγει η συνάρτηση $f(x) = e^x$

Παράδειγμα 6

Λύση

Χρειάζεται να βρούμε τις τιμές $f(0), f'(0), f''(0)$ και γενικά την τιμή $f^{(n)}(0)$

Έχουμε:

Παράδειγμα 6

$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x$

$f^{(3)}(x) = e^x,\ f^{(4)}(x) = e^x$

Και γενικά

$$\boldsymbol{f^{(n)}(x) = e^x}$$

Παράδειγμα 6

Επομένως για $x = 0$ προκύπτουν τα εξής:

$f(0) = 1,\ \ f'(0) = 1$

$f''(0) = 1,\ f^{(3)}(0) = 1$

Και γενικά

$$\boldsymbol{f^{(n)}(0) = 1}$$

Παράδειγμα 6

Συνεπώς η **σειρά Maclaurin που παράγεται από την** $f(x) = e^x$ είναι

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots =$$

Παράδειγμα 6

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{x^n}}{\boldsymbol{n}!}$$

Παράδειγμα 7

Να βρεθεί η σειρά και το πολυώνυμο Taylor τάξης 8 την οποία παράγει η συνάρτηση $f(x) = cosx$

Παράδειγμα 7

Λύση

Χρειάζεται να βρούμε τις τιμές $f(0), f'(0), f''(0)$ και γενικά την τιμή $f^{(n)}(0)$

Έχουμε:

Παράδειγμα 7

$f(x) = cosx, \quad f'(x) = -sinx, \; f''(x) = -cosx$

$f^{(3)}(x) = sinx, \; f^{(4)}(x) = cosx$

Και γενικά

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n cosx$ και $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} sinx$

Παράδειγμα 7

Επομένως για $x = 0$ προκύπτουν τα εξής:

$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1$

$f^{(3)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1$

Και γενικά

$$\boldsymbol{f^{(2n)}(0) = (-1)^{n}}\ \textbf{και}\ \boldsymbol{f^{(2n+1)}(x) = 0}$$

Παράδειγμα 7

Συνεπώς **το πολυώνυμο Maclaurin τάξης 8 που παράγεται από την** $f(x) = cosx$ είναι

$$P_8(x) = \sum_{k=0}^{8} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Παράδειγμα 7

Δηλαδή,

$$P_8(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(8)}(0)}{8!}x^8$$

ή

$$\boldsymbol{P_8(x) == 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{4!}}$$

Παράδειγμα 8

Αντίστοιχα η **σειρά Maclaurin που παράγεται από την** $f(x) = cosx$ **έχει μόνο άρτιες δυνάμεις του** x και είναι

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k =$$

Παράδειγμα 8

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Παράδειγμα 8

<u>Παρατήρηση</u>

Εφόσον $f^{(2n+1)}(0) = 0$ τα πολυώνυμα Maclaurin της $f(x) = cosx$ τάξης $2n$ και $2n + 1$ ταυτίζονται και είναι πολυώνυμα βαθμού $2n$.

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Παράδειγμα 9

Να βρεθεί η σειρά και το πολυώνυμο Maclaurin τάξης 8 την οποία παράγει η συνάρτηση $f(x) = sinx$

Παράδειγμα 9

Λύση

Χρειάζεται να βρούμε τις τιμές $f(0), f'(0), f''(0)$ και γενικά την τιμή $f^{(n)}(0)$

Έχουμε:

Παράδειγμα 9

$f(x) = sinx,\ f'(x) = cosx,\ f''(x) = -sinx$

$f^{(3)}(x) = -cosx,\ f^{(4)}(x) = sinx$

Και γενικά

$$\boldsymbol{f^{(2n)}(x) = (-1)^n sinx} \textbf{ και } \boldsymbol{f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n cosx}$$

Παράδειγμα 9

Επομένως για $x = 0$ προκύπτουν τα εξής:

$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0$

$f^{(3)}(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0$

Και γενικά

$$\boldsymbol{f^{(2n)}(0) = 0} \text{ **και** } \boldsymbol{f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n}$$

Παράδειγμα 9

Συνεπώς **το πολυώνυμο Maclaurin τάξης 8 που παράγεται από την** $\boldsymbol{f(x) = sinx}$ είναι

$$P_8(x) = \sum_{k=0}^{8} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Παράδειγμα 9

Δηλαδή,

$$P_8(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(8)}(0)}{8!}x^8$$

ή

$$P_8(x) \ = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Το οποίο είναι πολυώνυμο βαθμού 7.

Παράδειγμα 9

Αντίστοιχα η **σειρά Maclaurin που παράγεται από την** $f(x) = sinx$ **έχει μόνο περιττές δυνάμεις του** $\boldsymbol{x}$ και είναι

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k =$$

Παράδειγμα 9

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Πίνακας Σειρών Maclaurin

- Ο παρακάτω πίνακας περιέχει μερικές από τις πιο χρήσιμες σειρές Maclaurin.

- Με δεδομένες τις σειρές αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε σειρές άλλων συναρτήσεων που είναι συνδυασμός των συναρτήσεων του παρακάτω πίνακα.

Πίνακας Σειρών Maclaurin

Συνάρτηση	Σειρά Maclaurin	Συμβολισμός $\sum$
$f(x) = e^x$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Πίνακας Σειρών Maclaurin

Συνάρτηση	Σειρά Maclaurin	Συμβολισμός $\sum$
$f(x) = sinx$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$f(x) = cosx$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

Πίνακας Σειρών Maclaurin

Συνάρτηση	Σειρά Maclaurin	Συμβολισμός $\sum$
$f(x) = ln(x+1)$ $x \in (-1,1)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$ $+ (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = arctanx$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ $+ \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

Πίνακας Σειρών Maclaurin

Συνάρτηση	Σειρά Maclaurin	Συμβολισμός $\sum$
$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $x \in (-1,1)$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ $x \in (-1,1)$	$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + \cdots$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$

Παράδειγμα $\mathbf{10}$

Να βρεθεί η σειρά Maclurin την οποία παράγει η συνάρτηση $f(x) = x(e^{x} - 1)$.

Παράδειγμα $\mathbf{10}$

Λύση

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η σειρά Maclurin της e^x είναι η

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Παράδειγμα 10

Άρα της $e^x - 1$, είναι η

$$-1 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots =$$

$$= x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Παράδειγμα 10

Συνεπώς η σειρά Maclurin την οποία παράγει η συνάρτηση $f(x) = x(e^x - 1)$ είναι η

$$x\left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) =$$

$$= x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n!} + \cdots$$

Παράδειγμα 10

Δηλαδή,

$$x(e^x - 1) = x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n!} + \cdots$$

Άρα

$$x(e^x - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

Παράδειγμα 11

Να βρεθεί η σειρά Maclurin την οποία παράγει η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$

Παράδειγμα 11

Λύση

Για να βρούμε τη σειρά Maclurin της $f(x) = e^{x^2}$

Θα αντικαταστήσουμε στη σειρά Maclurin της e^x το x με x^2.

Παράδειγμα 11

Έχουμε:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Άρα

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x^2)^n}{n!} + \cdots$$

Παράδειγμα 11

Συνεπώς η σειρά Maclurin την οποία παράγει η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$ είναι η

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

Παράδειγμα 11

Δηλαδή,

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

Βιβλιογραφία

- Θεμιστοκλής Μ. Ρασσιάς, Μαθηματική Ανάλυση Ι, Τεύχος Α, Εκδόσεις Σαββάλα, Αθήνα 2004
- H. L. Royden, Real Analysis, The Macmillan Company, London 1968
- Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι, Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα 1995
- George B. Thomas, Jr Απειροστικός Λογισμός , Τόμος Ι , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης , Ηράκλειο 2012
- L. Goldestein, D. Lay, D. Schneider, N. Asmar, Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Θεωρία και Εφαρμογές. Broken Hill 2020