Σειρές Fourier

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ε. ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ – Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΎ

Σειρές Fourier

- Ένας άλλος τρόπος για την προσέγγιση μιας συνάρτησης f είναι η χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων με το ανάπτυγμα σε σειρές Fourier της f.

Σειρές Fourier

- Σε αυτή την περίπτωση αντί να χρησιμοποιήσουμε πολυώνυμα του x ως βασικές συναρτήσεις, χρησιμοποιούμε τριγωνομετρικές συναρτήσεις.
- Δηλαδή συναρτήσεις της μορφής $sin(kx), cos(kx)$ για $k \in \mathbb{N}$.

Περιοδικές Συναρτήσεις

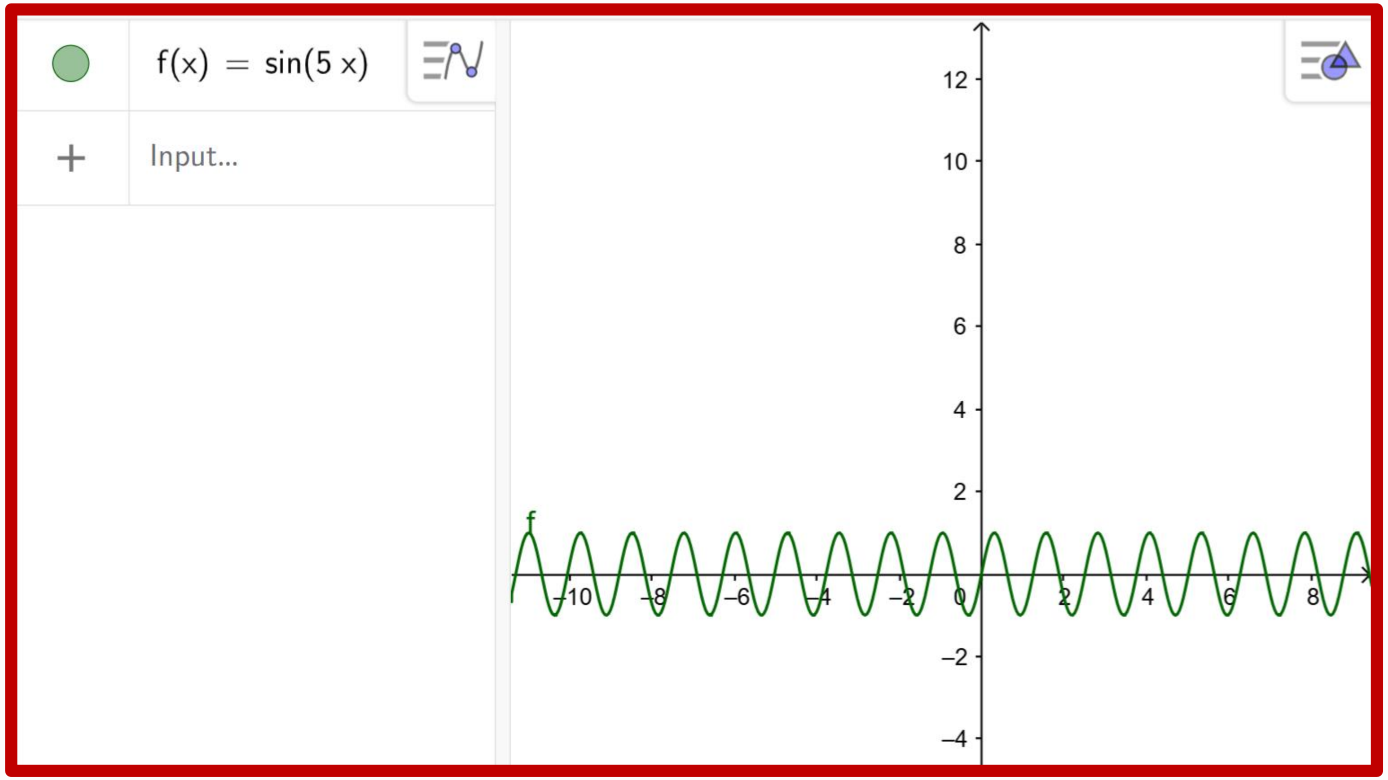
- Υπενθυμίζεται ότι **μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A ονομάζεται περιοδική με περίοδο T**, αν
  - **Για κάθε $x \in A$ και $x + T \in A$ και**
  - $f(x+T) = f(x)$ **για κάθε $x \in A$.**

Περιοδικές Συναρτήσεις

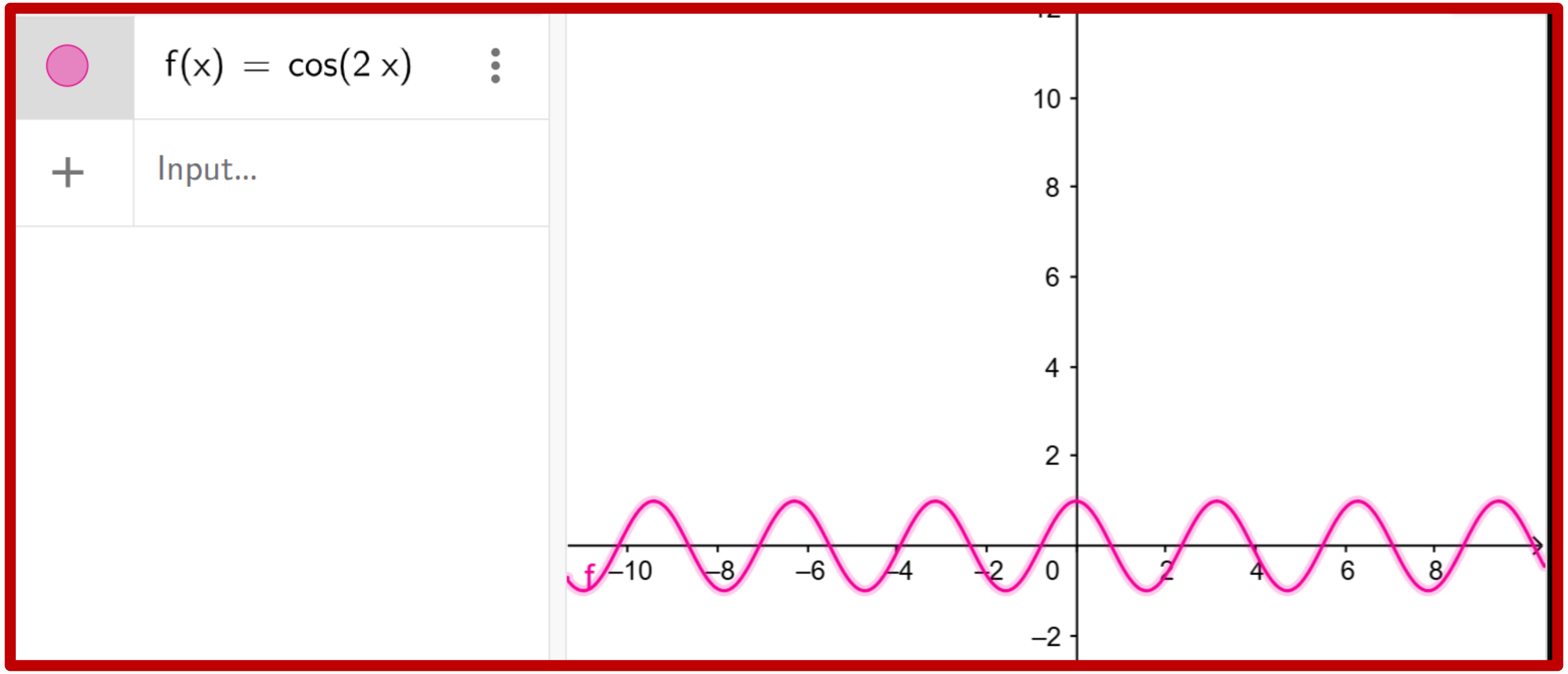
- Οι συναρτήσεις $f(x) = sin(nx)$ και $g(x) = cos(nx)$ με $n \in \mathbb{N}$ είναι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο $T = \frac{2\pi}{n}$.
- Δύο παραδείγματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι οι συναρτήσεις $f(x) = sin(5x)$ και $g(x) = cos(2x)$.

Στα επόμενα σχήματα βλέπουμε τα γραφήματα τους.

Περιοδικές Συναρτήσεις



Περιοδικές Συναρτήσεις



Σειρές Fourier

<u>Ορισμός</u>

Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη στο διάστημα $[-L, L]$, όπου $L > 0$. **Η σειρά Fourier της συνάρτησης $\boldsymbol{f}$** ορίζεται να είναι η

$$\boldsymbol{\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]}$$

Όπου:

Σειρές Fourier

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$$

Σύγκλιση Σειράς Fourier

- Ένα βασικό ερώτημα που τίθεται είναι υπό ποιες συνθήκες η τιμή της $f(x)$ ισούται με την τιμή της σειράς Fourier της f στο σημείο αυτό.
- Απάντηση στο παραπάνω ερώτημα δίνει η παρακάτω πρόταση.

Σύγκλιση Σειράς Fourier

Πρόταση

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f, ορισμένη στο διάστημα $[-L, L]$, όπου $L > 0$. Αν η f και η f' είναι τμηματικά συνεχής τότε:

- Σε όλα τα σημεία που η f είναι συνεχής ισούται με τη σειρά Fourier που της αντιστοιχεί. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]}$$

Σύγκλιση Σειράς Fourier

- Στα σημεία $x_0 \in [-L, L]$ που η f δεν είναι συνεχής, η σειρά Fourier της f ισούται με

$$\frac{\lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^-} f(x)}{2}$$

Σύγκλιση Σειράς Fourier

Δηλαδή,

$$\frac{\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \right]$$

Για όλα τα $x_0 \in [-L, L]$ που η f δεν είναι συνεχής.

Χρήσιμα Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα

- $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$
- $$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Χρήσιμα Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα

- $$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$
- $$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \end{cases}$$

Χρήσιμα Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα

- $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \end{cases}$$

Χρήσιμες Τριγωνομετρικές Σχέσεις

- $\boldsymbol{sin(n\pi) = 0}, \qquad \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$
- $\boldsymbol{cos(n\pi) = (-1)^{n}}, \qquad \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Υπενθύμιση – Ολοκλήρωμα Άρτιας και Περιττής Συνάρτησης

- $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$, **αν** f **άρτια στο** $[-L, L]$

- $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$, **αν** f **περιττή στο** $[-L, L]$

Παράδειγμα 1:

Α. Να βρεθεί το ανάπτυγμα της σειράς $Fourier$ της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, -\pi \leq x \leq 0 \\ x, 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

Β. Να ελέγξετε τη σύγκλιση της σειράς Fourier της f.

Παράδειγμα 1:

Γ. Να δείξετε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Παράδειγμα 1:

<u>Λύση</u>

Α. Η f ορίζεται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Επομένως,

η σειρά Fourier της συνάρτησης f είναι η

$$\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) \right]$$

Παράδειγμα $\mathbf{1}$:

Δηλαδή η

$$\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n cos(nx) + b_n sin(nx)].$$

Παράδειγμα $\mathbf{1}$:

Όπου:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx$$

Επομένως,

$$\boldsymbol{a_0 = 1 + \frac{\pi}{2}}$$

Παράδειγμα 1:

Επίσης έχουμε,

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xcos(nx)dx}$$

Παράδειγμα 1:

Δηλαδή,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}sin(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n\pi}[xsin(nx)]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} sin(nx)dx$$

Άρα,

$$a_n = -\frac{1}{n^2\pi}[cos(nx)]_{-\pi}^{0} = \frac{cos(n\pi) - 1}{n^2\pi}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}.$$

Παράδειγμα 1:

Για τον υπολογισμό του συντελεστή b_n έχουμε ότι,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xsin(nx)dx$$

Παράδειγμα 1:

Δηλαδή,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}[xcos(nx)]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} cos(nx)dx$$

Άρα,

$$b_n = \frac{cos(n\pi) - 1}{n\pi} - \frac{\pi cos(n\pi)}{n\pi}$$

ή

$$\boldsymbol{b_n = \frac{(1-\pi)(-1)^n - 1}{n\pi}}.$$

Παράδειγμα $\mathbf{1}$:

Συνεπώς η ζητούμενη σειρά Fourier είναι η

$$\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} + \sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{+\infty} \left[\frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^2 \boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{x}) + \frac{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\pi})(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{1}}{\boldsymbol{n}\boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{x}) \right].$$

Παράδειγμα 1:

Β. Για $x \in [-\pi, 0) \cup (0,\pi]$ η f είναι συνεχής. Άρα,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} cos(nx) + \frac{(1-\pi)(-1)^n - 1}{n\pi} sin(nx)\right].$$

Για κάθε $x \in [-\pi, 0) \cup (0,\pi]$.

Παράδειγμα 1:

Για $x = 0$,

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Γ. Άρα,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\right].$$

Παράδειγμα 1:

Δηλαδή,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\right]=-\frac{\pi}{4}$$

ή

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right]=-\frac{\pi^2}{4}$$

Παράδειγμα $\mathbf{1}$:

Επομένως

$$-2-\frac{2}{9}-\frac{2}{25}-\frac{2}{49}=-\frac{\pi^2}{4}$$

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

ή

$$\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{+\infty}\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}}=\frac{\boldsymbol{\pi}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{8}}$$

Παράδειγμα 2:

Να βρεθεί το ανάπτυγμα της σειράς Fourier της συνάρτησης

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x^2}{4}, -\pi \leq x \leq \pi$$

Στη συνέχεια να δείξετε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Παράδειγμα 2:

Λύση

Η f ορίζεται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Επομένως,

η σειρά Fourier της συνάρτησης f είναι η

$$\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) + b_n sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)\right]$$

Παράδειγμα $\mathbf{2}$:

Δηλαδή η

$$\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n cos(nx) + b_n sin(nx)].$$

Παράδειγμα 2:

Όπου:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4}dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{x^2}{4}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^3}{3}$$

Επομένως,

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{\pi^2}{6}}$$

Παράδειγμα 2:

Επίσης έχουμε,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{4}cos(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}x^2cos(nx)dx$$

Παράδειγμα 2:

Δηλαδή,

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[x^2 \frac{1}{n} sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} 2xsin(nx)dx$$

Άρα,

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}[xcos(nx)]_0^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi} cos(nx)dx$$

Παράδειγμα 2:

Δηλαδή,

$$a_n = \frac{1}{n^2\pi}[xcos(nx)]_0^{\pi}$$

Άρα,

$$\boldsymbol{a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}}$$

Παράδειγμα 2:

Επίσης έχουμε,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} sin(nx) dx = 0$$

Διότι η συνάρτηση $\frac{x^2}{4} sin(nx)$ είναι περιττή.

Παράδειγμα 2:

Συνεπώς η ζητούμενη σειρά Fourier είναι η

$$\hat{f}(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\right].$$

Παράδειγμα 2:

Για $x \in [-\pi, \pi]$, η f είναι συνεχής.

Άρα,

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{4}} = \frac{\boldsymbol{\pi^2}}{\mathbf{12}} + \sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{+\infty} \left[\frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n^2}} \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{nx}) \right]$$

για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

Παράδειγμα 2:

Για $x = \pi$,   έχουμε

$$\boldsymbol{\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n^2}cos(n\pi)\right]}$$

Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n\right]}$$

Παράδειγμα 2:

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Βιβλιογραφία

- Rothos, V., & Sfyrakis, C. (2015). ΣΕΙΡΕΣ FOURIER ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ [Chapter]. In Rothos, V., & Sfyrakis, C. 2015. Διαφορικές εξισώσεις [Undergraduate textbook]. Kallipos, Open Academic Editions. https://hdl.handle.net/11419/3916
- George B. Thomas, Jr Απειροστικός Λογισμός , Τόμος II , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης , Ηράκλειο 2012