Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

Μαθηματική Μοντελοποίηση

Γ΄ Μάχιμων – Γ΄ Μηχανικών

Διδασκοντες: Γ. Γαλάνης, Δ. Κουλουμπού

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδοι Runge - Kutta

- Η μέθοδος **Runge – Kutta** είναι μια κλασική μέθοδος με πολύ καλή ακρίβεια και χρησιμοποιείται ευρύτατα.

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδοι Runge - Kutta

- Με τη μέθοδο Runge – Kutta προσπαθούμε να αντικαταστήσουμε τις παραγώγους ανώτερης τάξης που εμφανίζονται στη μέθοδο Taylor με κατάλληλους συνδυασμούς των $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ τα οποία είναι γνωστά.
- Έτσι, αποφεύγουμε τον υπολογισμό των παραγώγων ανώτερης τάξης.

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδοι Runge - Kutta

Πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Runge-Kutta δεύτερης τάξης:

$$\boldsymbol{y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + \frac{\mathbf{h}}{2} \cdot \left[f(x_i, y_i) + f\big(x_{i+1}, y_i + \mathbf{h} \cdot f(x_i, y_i)\big)\right]}$$

Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδοι Runge - Kutta

Range-Kutta τρίτης τάξης:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{\mathrm{h}}{2}, y_i + \frac{\mathrm{h}}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + hk_2)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\mathrm{h}}{6}[k_1 + 4k_2 + k_3]$$

Μέθοδοι Runge - Kutta

<u>Παράδειγμα 1</u>:

Να λυθεί στο διάστημα [0,4] το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-4x} \quad ; \quad y(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-4x} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-4x} - 2y = f(x, y)$$

Μέθοδοι Runge - Kutta

Διακριτοποιούμε το διάστημα σε υποδιαστήματα μήκους h=0.5 και χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις διαφορών **Runge – Kutta δεύτερης τάξης**:

$$y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + \frac{0.5}{2} \cdot \left[f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_i + \mathrm{h} \cdot f(x_i, y_i)\right)\right]$$

Μέθοδοι Runge - Kutta

x_i	y_i	x_i	y_i
0	1	2.5	0.034145182
0.5	0.533833821	3	0.017074127
1	0.27149582	3.5	0.008537271
1.5	0.136367598	4	0.004268664
2	0.068267665	2.5	0.034145182

Μέθοδοι Runge - Kutta

Η υλοποίηση της μεθόδου Runga – Kutta για το συγκεκριμένο παράδειγμα με χρήση Octave ή Matlab επιτυγχάνεται με τον παρακάτω αλγόριθμο

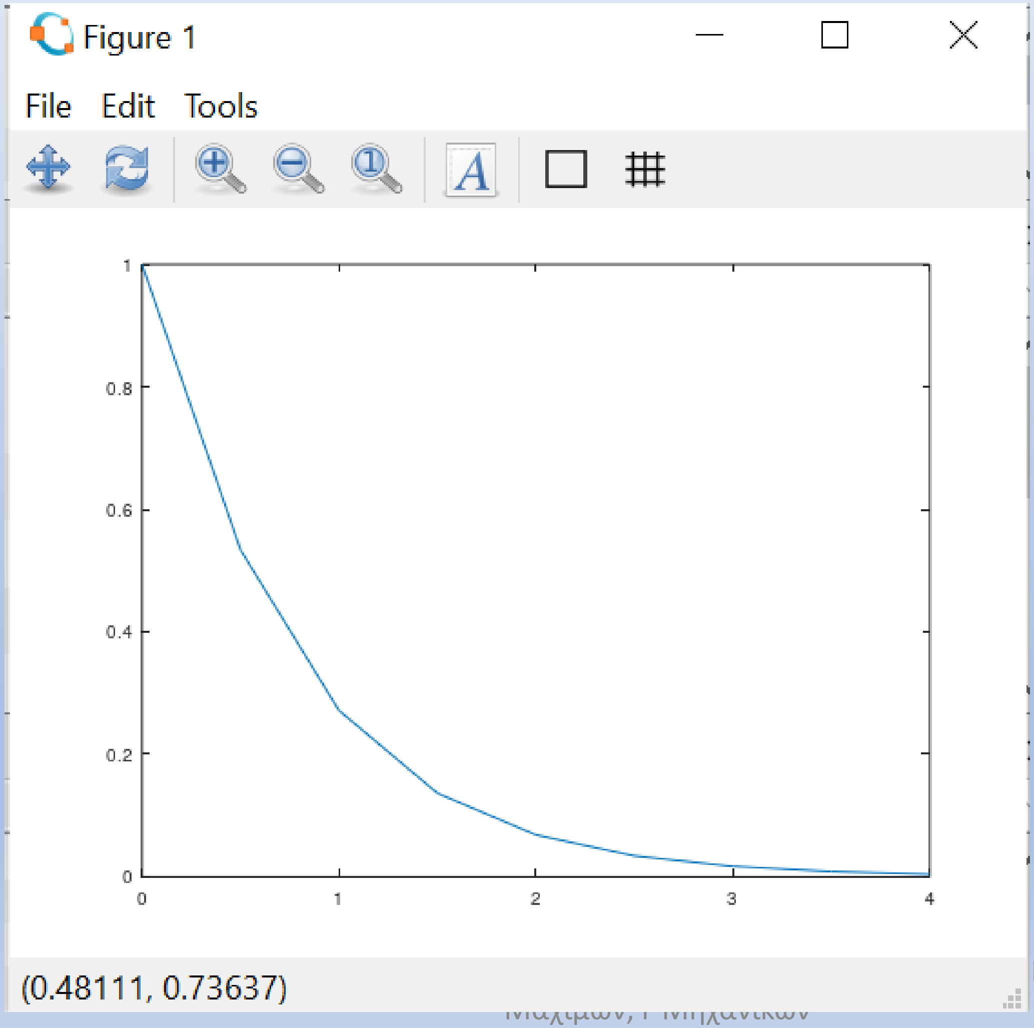
Μέθοδοι Runge - Kutta

```
>> a=0;
>> b=4;
>> h=0.5;
>> N=(b-a)/h;
>> f=@(x,y)exp(-4*x)-2*y;
>> x(1)=a;
>> y(1)=1;
>> for n=1:N
z(n)=f(x(n),y(n));
x(n+1)=a+n*h;
y(n+1)=y(n)+(h/2)*(z(n)+f(x(n+1),y(n)+h*z(n)));
end
```

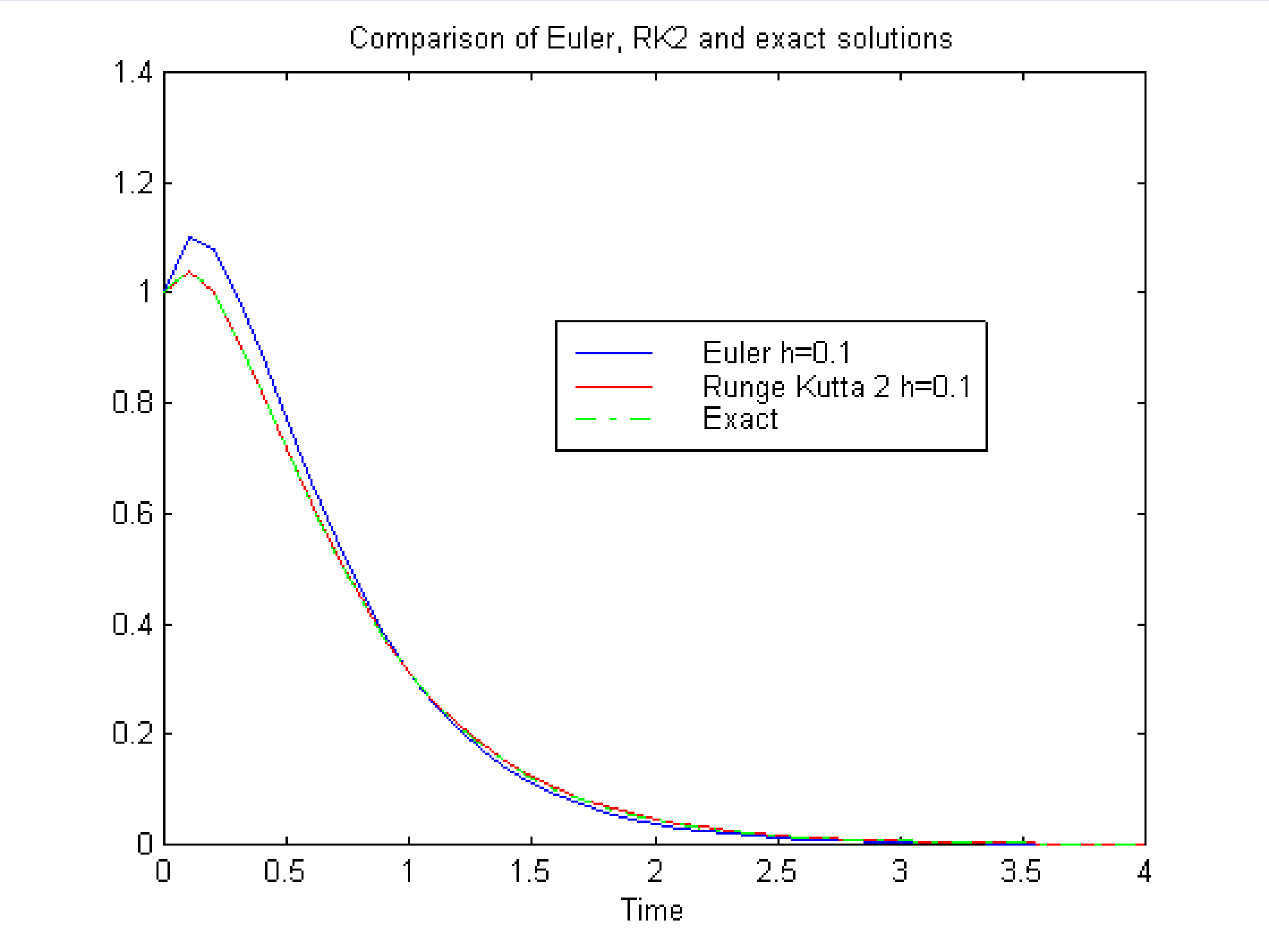
Μέθοδοι Runge - Kutta

```
>> a=0;
>> b=4;
>> h=0.5;
>> N=(b-a)/h;
>> f=@(x,y)exp(-4*x)-2*y;
>> x(1)=a;
>> y(1)=1;
>> for n=1:N
z(n)=f(x(n),y(n));
x(n+1)=a+n*h;
y(n+1)=y(n)+(h/2)*(z(n)+f(x(n+1),y(n)+h*z(n)));
end
>> x
x =

 Columns 1 through 8:

        0    0.5000    1.0000    1.5000    2.0000    2.5000    3.0000    3.5000

 Column 9:

   4.0000

>> y
y =

 Columns 1 through 5:

   1.0000e+00   5.3383e-01   2.7150e-01   1.3637e-01   6.8268e-02

 Columns 6 through 9:

   3.4145e-02   1.7074e-02   8.5373e-03   4.2687e-03
```

Μέθοδοι Runge - Kutta



Μέθοδοι Runge - Kutta



Μέθοδοι Runge - Kutta

Εφαρμόστε την μέθοδο Euler και την Runge-Kutta 2ης τάξης για την επίλυση των επόμενων προβλημάτων:

1. $y' = y + e^x$ $\quad y(0) = 1$
2. $y' = x - \dfrac{y}{x}$ $\quad y(1) = 0$
3. $y' = y + e^x\sqrt{y}$ $\quad y(0) = 0$
4. $y' = \dfrac{y}{4x} + \dfrac{x}{y^3}$ $\quad y(1) = 1$
5. $y' = \dfrac{y + xy^2}{x}$ $\quad y(1) = 1$
6. $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x}$ $\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$
7. $y' = y - \dfrac{1}{4}y^{3/2}$, $\quad y(0) = \dfrac{1}{4}$
8. $y' = \dfrac{2y}{t} + t\tan\left(\dfrac{y}{t^2}\right)$ $\quad y(1) = 2$
9. $(t-3)y'' + y = 0$ $\quad y(1) = 1$ $\quad y'(1) = -3$
10. $y'' + x^3 = 0$ $\quad y(1) = 1$ $\quad y'(1) = 0$.