Μαθηματικό Μοντέλο Ανταγωνιστικών Εξοπλισμών Richardson's

Γ' Μαχίμων
Γ' Μηχανικών
2024 - 2025

Σοφία Κυρίτση- Γιάλλουρου

1. Μαθηματικό Μοντέλο Ανταγωνιστικών Εξοπλισμών Richardson's

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ky - ax + g \\ \frac{dy}{dt} &= lx - \beta y + h \end{aligned} \qquad (1)}$$

X, Y χώρες με $x(t)$, $y(t)$ κόστος εξοπλισμών σε σχέση με το χρόνο

k, l, a, β, g, h πραγματικές σταθερές

k, l : επιθυμία της χώρας X, Y αντίστοιχα, να αυξήσει τις στρατιωτικές της δυνάμεις με ρυθμό ανάλογο με το μέγεθος των δυνάμεων που κατέχει η αντίπαλη χώρα Y, X.

a, β συντελεστές συγκράτησης ή κόπωσης που εκφράζουν την επιθυμία ενός έθνους να μειώσουν τα αποθέματα των στρατιωτικών του δυνάμεων με ρυθμό ανάλογο του μεγέθους που ήδη κατέχει

g, h σταθερές που αντιπροσωπεύουν τα αισθήματα και τις διαθέσεις της μιας χώρας προς την άλλη. Μπορεί να περιέχουν φιλοδοξία, εξωτερικές πιέσεις και άλλους παράγοντες, οι οποίοι μπορεί να να μην σχετίζονται με τους εξοπλισμούς της άλλης χώρας

$g, h > 0$ εχθρικές διαθέσεις

$g, h < 0$ φιλικές διαθέσεις

Λύση του Συστήματος Διαφορικών Εξισώσεων (1), το οποίο γραμμικό, με σταθερούς συντελεστές και μη ομογενές λόγω της παρουσίας g, h.

$$\frac{dx}{dt} = ky - ax + g = -ax + ky + g$$

$$\frac{dy}{dt} = lx - \beta y + h = lx - \beta y + h$$

Η γενική λύση του Συστήματος είναι της μορφής

$$\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{Y}_{ομ}(t) - A^{-1} \cdot G$$

όπου $\vec{Y}_{ομ}(t)$ είναι η λύση του ομογενούς συστήματος

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + ky \\ \frac{dy}{dt} &= lx - \beta y \end{aligned}\right| \quad (2) \qquad G = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$$

το οποίο γνωρίζουμε πώς να το επιλύουμε

$A = \begin{bmatrix} -a & k \\ l & -\beta \end{bmatrix}$, οπότε ο πίνακας A^{-1} είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} -\beta & -k \\ -\ell & -a \end{bmatrix}$$ και

$$\det A = (-a)(-\beta) - k\ell \Rightarrow \det A = a\beta - k\ell$$

και τέλος $G = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$

Εφαρμογή

Δυο χώρες X, Y εξοπλίζονται με κόστος $x(t)$, $y(t)$ αντίστοιχα συναρτήσει του χρόνου. Ο ρυθμός μεταβολής των εξοπλισμών ακολουθεί το μοντέλο Richardson's.

$$\frac{dx}{dt} = 3y - 2x - 10$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x - 3y - 10$$

με $x(0) = 1$, $y(0) = 29$ σε δισ. δολλάρια

Να λυθεί το σύστημα και να προβλεφθεί αν είναι δυνατόν η εξέλιξη των εξοπλιστικών δαπανών τους.

$$\dot{x} = -2x + 3y - 10 \qquad x(0)=1,$$
$$\dot{y} = 4x - 3y - 10 \qquad y(0)=29$$

1. Προσδιορίζουμε τους πίνακες A και Θ

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \Theta = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

2. Γενική λύση $\vec{Y}(t) = \vec{Y}_{ομ}(t) - A^{-1}\Theta$

$\vec{Y}_{ομ}(t)$ είναι η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς

$$\dot{x} = -2x + 3y \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\dot{y} = 4x - 3y$$

$$3.\quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (-2)(-3) - 12 = -6$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{και } A^{-1}\cdot G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -A^{-1}\cdot G = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

3. Επίλυση του ομογενούς συστήματος

$$\dot{x} = -2x + 3y$$
$$\dot{y} = 4x - 3y$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 4 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow (-2-\lambda)(-3-\lambda) - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -6 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$ Ιδιοτιμές

Ιδιοδιανύσματα

Για $\lambda_1 = -6 \Longrightarrow (A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{O} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} -2+6 & 3 \\ 4 & -3+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 4a_1 + 3\beta_1 = 0 \\ 4a_1 + 3\beta_1 = 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a_1 = -\frac{3}{4}\beta_1, \ \beta_1 = 4 \\ a_1 = -3 \end{array}$$

Άρα $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ και αντίστοιχα για

$\lambda_2 = 1 \Longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ από $(A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = \vec{O}$

και $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

Επομένως η γενική λύση του ομογενούς

$$\boxed{\vec{Y}_{o\mu}(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{Y}_{o\mu}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-6t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

4. Οπότε η γενική λύση του μοντέλου (1)

είναι

$$\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-6t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

$$- \vec{A}^{-1} \cdot \vec{b}$$

Τελικά

$$x(t) = -3c_1 e^{-6t} + c_2 e^{t} + 10$$

$$y(t) = 4c_1 e^{-6t} + c_2 e^{t} + 10$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 29$$

$$\Rightarrow \quad 1 = -3c_1 + c_2 + 10$$

$$29 = 4c_1 + c_2 + 10$$

$$x(t) = -12e^{-6t} + 3e^{t} + 10$$
$$y(t) = 16e^{-6t} + 3e^{t} + 10$$

Η απάντηση στο ερώτημα της εφαρμογής σχετικά με την πρόβλεψη των εξοπλιστικών δαπανών θα χρειαστεί την παρακάτω διερεύνηση

Η διερεύνηση αυτή αφορά σε ισορροπία του συστήματος, η οποία εξαρτάται από το πρόσημο των ιδιοτιμών του πίνακα A και από το κρίσιμο σημείο του συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + ky + g \\ \dot{y} &= \ell x - \beta y + h \end{aligned} \qquad (1)$$

Το σύστημα (1) έχει κρίσιμο σημείο (x_0, y_0) όταν $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, άρα για το παραπάνω

Παράδειγμα έχουμε $\left| \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x + 3y - 10 \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - 3y - 10 \end{aligned} \right| \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$

$$\left.\begin{aligned} -2x+3y&=10 \\ 4x-3y&=10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x=20 \Rightarrow \boxed{x_0=10,\ y_0=10}$$

$$\boxed{(1)\Rightarrow} \left.\begin{aligned} -ax+ky+g&=0 \\ lx-\beta y+h&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -ax+ky&=-g \\ lx-\beta y&=-h \end{aligned}$$

$$\boxed{x_0=\frac{kh+\beta g}{a\beta-kl} \qquad y_0=\frac{ah+lg}{a\beta-kl}}$$

μοναδική λύση αν $\det A = a\beta - kl \neq 0$

Διακρίνουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις

1. Αν οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι πραγματικές και άνισες, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

1α. λ_1, λ_2 ετερόσημες, έστω $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, τότε το κρίσιμο σημείο του συστήματος (1) ονομάζεται σημείο σάγματος – saddle point – και η ισορροπία είναι ασταθής. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο χώρες X, Y κλιμακώνουν τους εξοπλισμούς τους μέσα στο χρόνο, οπότε δεν είναι δυνατή η συνύπαρξή τους και είναι πολύ πιθανή η πολεμική εμπλοκή τους.

1β. Δύο ρίζες ομόσημες

- αν $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, έστω $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, τότε το κρίσιμο σημείο (x_0, y_0) ονομάζεται ασταθής κόμβος.

Στην περίπτωση αυτή οι στρατιωτικές δαπάνες και των δύο χωρών αυξάνονται με τον χρόνο, ο ανταγωνισμός τους εντείνεται και οριακά – κάποια στιγμή στο μέλλον – δεν θα αποφευχθεί η πολεμική σύγκρουση.

• $\boxed{\text{Δυο ρίζες αρνητικές, } \lambda_1, \lambda_2 < 0.}$

Τότε το κρίσιμο σημείο είναι α-συμπτωματικά ευσταθής κόμβος.

Η φυσική σημασία σχετικά με τους εξοπλισμούς των δύο αντι-πάλων χωρών είναι ότι έχουμε πορεία προς σταθεροποίηση των εξοπλισμών, η μελλοντική συνύπαρξη είναι δυνατή, χωρίς περαιτέρω πολεμικές συγκρούσεις.

2. Αν η $\Delta = 0$, τότε ως γνωστό έχουμε διπλή ρίζα $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Και πάλι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

2a. $\boxed{\text{Αν } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0}$, τότε το κρίσιμο σημείο είναι νόθος κόμβος, ασυμπτωτικά ευσταθής. Άρα οι δύο χώρες οδεύουν προς σταθεροποίηση των εξοπλισμών με δυνατότητα ειρηνικής συνύπαρξης.

2 β. $\boxed{\text{Αν } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0}$, τότε το κρίσιμο σημείο είναι νόθος κόμβος ασυμπτωτικά ασταθής. Οι χώρες εξακολουθούν να εξοπλίζονται και μελλοντικά θα οδηγηθούν σε εμπόλεμη κατάσταση.

Επιστρέφοντας τώρα στην παραπάνω εφαρμογή θα απαντήσουμε στο ερώτημα πώς θα προβλέψουμε την εξέλιξη εξοπλιστικών δαπανών των δύο χωρών X, Y.

1. Οι ιδιοτιμές του Πίνακα A είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -6$, πραγματικές και ετερόσημες

2. Το κρίσιμο σημείο του συστήματος (1) είναι

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 3y - 10$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x - 3y - 10$$

Κρίσιμο σημείο

$$\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = 0$$

Οπότε για την εύρεση του κρίσιμου σημείου (x_0, y_0) πρέπει να λύσουμε το σύστημα

$$\left| \begin{array}{l} -2x + 3y - 10 = 0 \\ 4x - 3y - 10 = 0 \end{array} \right.$$

Άρα $\begin{array}{l} -2x+3y=10 \\ 4x-3y=-10 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0=10 \\ y_0=10 \end{array}$

Κρίσιμο σημείο $(x_0, y_0) = (10, 10)$

Με αυτά τα δεδομένα καταλήγουμε σχετικά με την εξέλιξη των εξοπλισμών των δύο χωρών

Επειδή, όπως αναφέραμε οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -6$, άρα ετερόσημες, τότε το σημείο ισορροπίας - κρίσιμο σημείο - $(x_0, y_0) = (10, 10)$ είναι σημείο σάγματος και η ισορροπία του συστήματος είναι ασταθής. Όπως γνωρίζουμε, σ' αυτή την περίπτωση οι δύο αντίπαλες χώρες X, Y οδηγούνται σε συνεχή κλιμάκωση των εξοπλισμών τους, οπότε με την πάροδο του χρόνου θα έχουν έντονα προβλήματα στις μεταξύ τους σχέσεις και υπάρχει μεγάλη πιθανότητα στο μέλλον να οδηγηθούν σε ένοπλη σύγκρουση.

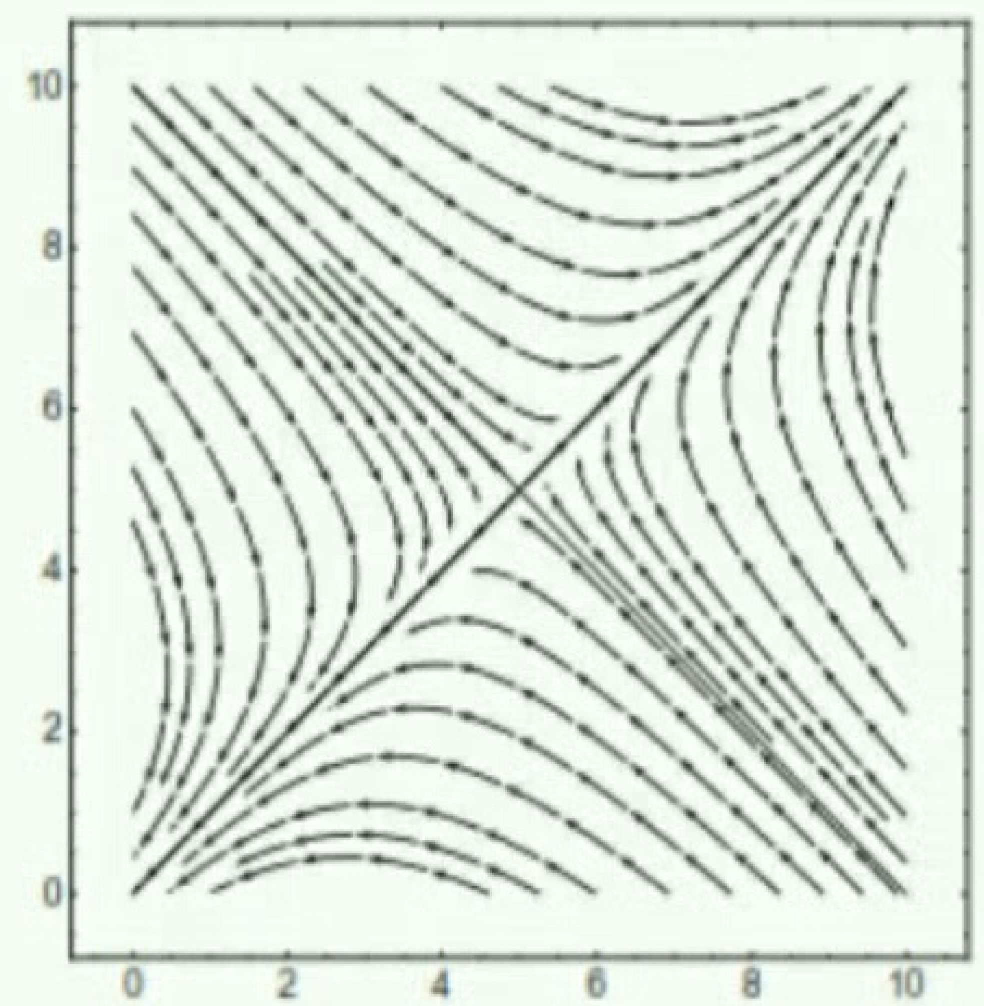
ΜΟΝΤΕΛΟ RICHARDSON

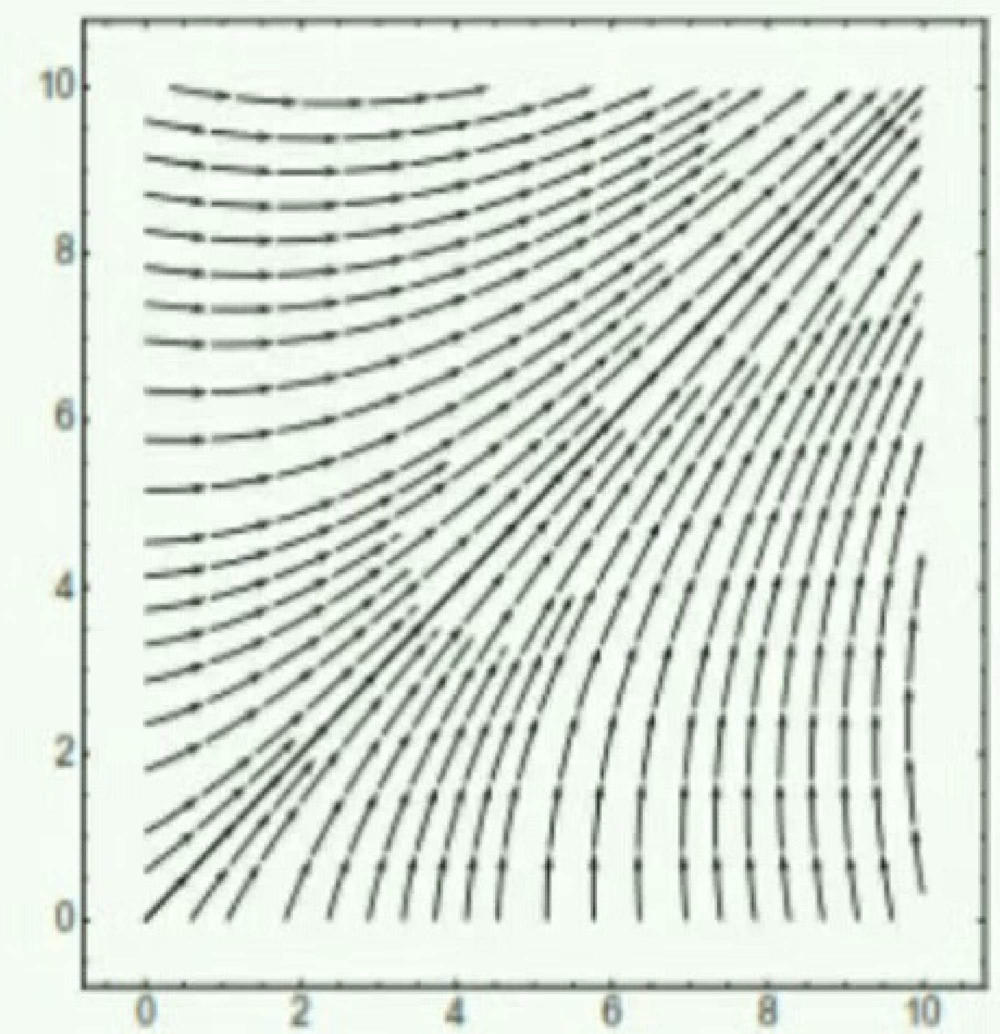
Περιγράφει 4 καταστάσεις

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

σημείο σάγματος

κλιμάκωση εξοπλισμών





διαρκής εξοπλιστικός αγώνας

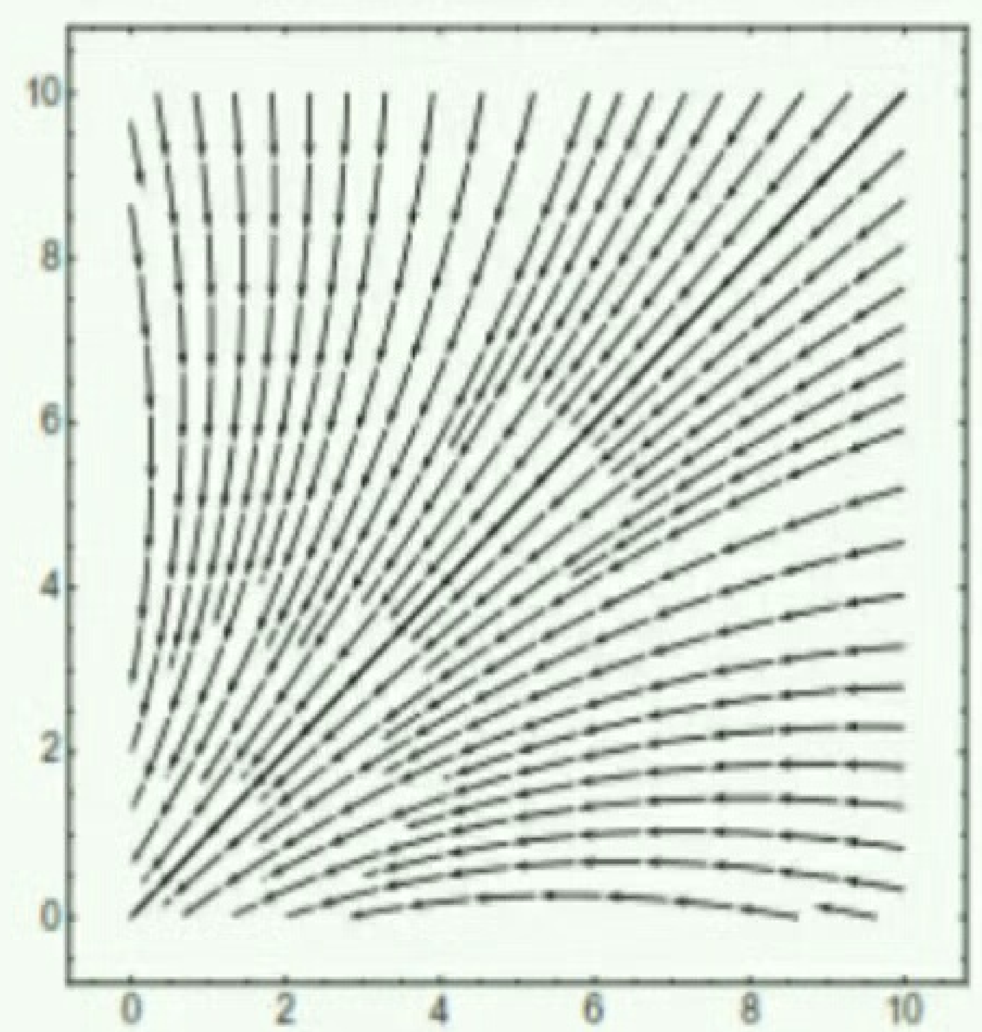
$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

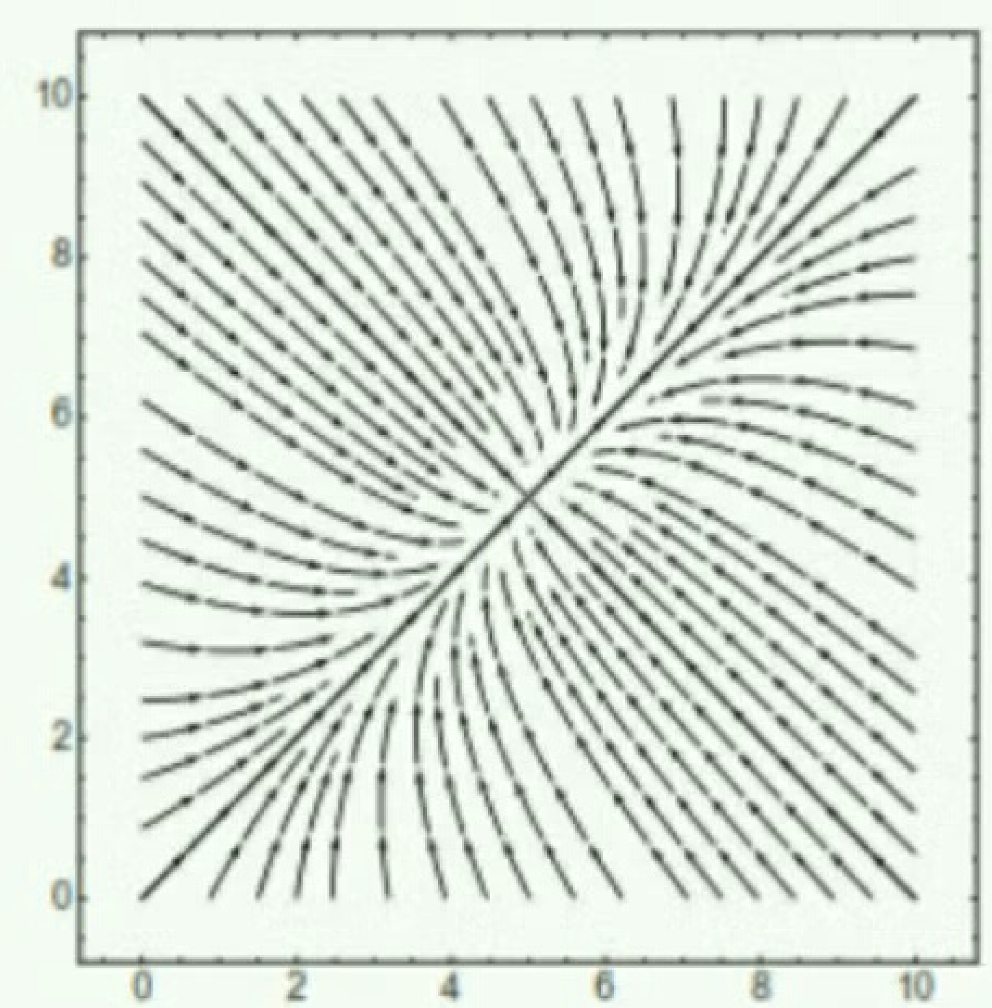
ασυμπτωματικά ασταθής κόμβος

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$

νόθος κόμβος

συνεχής μείωση εξοπλισμού παροπλισμός





σταθεροποίηση εξοπλισμών

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

ασυμπτωματικά ευσταθής κόμβος