# Κυρίαρχες και Κυριαρχούμενες Στρατηγικές

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

# Παράδειγμα 1:

Ας δούμε ένα αρχικό παράδειγμα για να κατανοήσουμε τις βασικές έννοιες της Θεωρίας Παιγνίων.

**Παράδειγμα 1:**

- Έστω δύο παίκτες $1,2$. Κάθε ένας από αυτούς διαθέτει $4€$.
- Εγώ διαθέτω $8\$$.
- Κάθε παίκτης $i$ τοποθετεί $w_i$ χρήματα σε έναν φάκελο. $i = 1,2$

# Παράδειγμα 1:

- Κάθε παίκτης $i$ τοποθετεί $w_i$ χρήματα σε έναν φάκελο. $i = 1,2$
- Εγώ δίνω σε κάθε παίκτη $i$, $\frac{8w_i}{w_1+w_2}$ αν $w_1 + w_2 \neq 0$, ενώ δίνω $0\$$ σε κάθε παίκτη αν $w_1 + w_2 = 0$.
- Ότι δεν έχει βάλει ο κάθε παίκτης στον φάκελο το κρατάει για τον εαυτό του.

# Παράδειγμα 1:

- Ποιο είναι το minimum κέρδος που έχει εξασφαλίσει κάθε παίκτης;
- Έχει νόημα να τοποθετήσουν και οι δύο 0$ στον φάκελο τους;
- Ποια στρατηγική είναι η πιο συμφέρουσα για κάθε παίκτη;
- Υπάρχει μία στρατηγική (ένα ποσό στον φάκελο) που κάποιος παίχτης δεν πρέπει να επιλέξει;
- Ποια είναι η ποιο από κοινού συμφέρουσα στρατηγική;

# Παράδειγμα 1:

- Τι πιστεύετε ότι θα συμβεί όταν πραγματοποιηθεί το παίγνιο αν θεωρήσουμε ότι οι παίκτες μας είναι νοήμονες;

# Παράδειγμα 1:

**<u>Λύση – Προσέγγιση Προβλήματος</u>**

Ας δούμε ποιο θα είναι το κέρδος του παίκτη 1, μετά την πραγματοποίηση του παίγνιου.

- Ο παίκτης 1 είχε $4\$$, τοποθέτησε στον φάκελο, άρα έχασε $w_1\$$ από την κατοχή του
- Ενώ δέχθηκε $\frac{8w_1}{w_1+w_2}\$$ από εμένα.

# Παράδειγμα 1:

- Άρα συνολικά το κέρδος του είναι:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{8}\boldsymbol{w}_{\mathbf{1}}}{\boldsymbol{w}_{\mathbf{1}}+\boldsymbol{w}_{\mathbf{2}}}+\mathbf{4}-\boldsymbol{w}_{\mathbf{1}}, & \boldsymbol{\alpha\nu} \quad \boldsymbol{w}_{\mathbf{1}}+\boldsymbol{w}_{\mathbf{2}} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{4}, & \boldsymbol{\alpha\nu} \quad \boldsymbol{w}_{\mathbf{1}}+\boldsymbol{w}_{\mathbf{2}} = \mathbf{0} \end{cases}$$

# Παράδειγμα 1:

- Για τις διάφορες επιλογές (στρατηγικές) των δύο παικτών στον παρακάτω βλέπουμε τα διαφορετικά κέρδη του παίκτη 1.

| | | Player 2's bid | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **$0** | **$1** | **$2** | **$3** | **$4** |
| Player 1's bid | **$0** | $4.00 | $4.00 | $4.00 | $4.00 | $4.00 |
| | **$1** | $11.00 | $7.00 | $5.67 | $5.00 | $4.60 |
| | **$2** | $10.00 | $7.33 | $6.00 | $5.20 | $4.67 |
| | **$3** | $9.00 | $7.00 | $5.80 | $5.00 | $4.43 |
| | **$4** | $8.00 | $6.40 | $5.33 | $4.57 | $4.00 |

# Παράδειγμα 1:

**Παρατήρηση:** Αντίστοιχος είναι και ο πίνακας κερδών του παίκτη 2.

- Από τον πίνακα κερδών βλέπουμε ότι το minimum κέρδος που έχει εξασφαλίσει κάθε παίκτης είναι 4$.
- Δεν έχει νόημα να τοποθετήσουν και οι δύο 0$ στον φάκελο τους, εφόσον τότε το κέρδος τους θα είναι το ελάχιστο δυνατό. Υπάρχουν άλλες στρατηγικές αρκετά ποιο συμφέρουσες και για τους δύο παίκτες.

# Παράδειγμα 1:

- Το μεγαλύτερο κέρδος που μπορεί να έχει ο κάθε παίκτης είναι 11$. Όμως αν ο ένας παίκτης έχει maximum κέρδος 11$, σύμφωνα με τον πίνακα ο άλλος παίκτης θα έχει minimum κέρδος 4$.
- Επομένως καταλαβαίνουμε ότι κανένας νοήμον παίκτης δεν θα διαλέξει μια τέτοια στρατηγική.

| Player 1's bid \ Player 2's bid | **$0** | **$1** | **$2** | **$3** | **$4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **$0** | $4.00 | $4.00 | $4.00 | $4.00 | $4.00 |
| **$1** | $11.00 | $7.00 | $5.67 | $5.00 | $4.60 |
| **$2** | $10.00 | $7.33 | $6.00 | $5.20 | $4.67 |
| **$3** | $9.00 | $7.00 | $5.80 | $5.00 | $4.43 |
| **$4** | $8.00 | $6.40 | $5.33 | $4.57 | $4.00 |

# Παράδειγμα 1:

- Για τον παίκτη 1 έχει μεγαλύτερο κέρδος να βάλει στον φάκελο 2\$ από το να βάλει 0\$, 3\$ ή 4\$. Ανεξάρτητα από την επιλογή του δεύτερου παίκτη.
- Άρα οι στρατηγικές αυτές είναι στρατηγικές που

Δεν θα επιλέξει ο παίκτης 1.

| Player 1's bid \ Player 2's bid | **\$0** | **\$1** | **\$2** | **\$3** | **\$4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **\$0** | \$4.00 | \$4.00 | \$4.00 | \$4.00 | \$4.00 |
| **\$1** | \$11.00 | \$7.00 | \$5.67 | \$5.00 | \$4.60 |
| **\$2** | \$10.00 | \$7.33 | \$6.00 | \$5.20 | \$4.67 |
| **\$3** | \$9.00 | \$7.00 | \$5.80 | \$5.00 | \$4.43 |
| **\$4** | \$8.00 | \$6.40 | \$5.33 | \$4.57 | \$4.00 |

# Παράδειγμα 1:

| Player 1's bid \ Player 2's bid | $0 | $1 | $2 | $3 | $4 |
|---|---|---|---|---|---|
| ~~$0~~ | ~~$4.00~~ | ~~$4.00~~ | ~~$4.00~~ | ~~$4.00~~ | ~~$4.00~~ |
| $1 | $11.00 | $7.00 | $5.67 | $5.00 | $4.60 |
| $2 | $10.00 | $7.33 | $6.00 | $5.20 | $4.67 |
| ~~$3~~ | ~~$9.00~~ | ~~$7.00~~ | ~~$5.80~~ | ~~$5.00~~ | ~~$4.43~~ |
| ~~$4~~ | ~~$8.00~~ | ~~$6.40~~ | ~~$5.33~~ | ~~$4.57~~ | ~~$4.00~~ |

# Παράδειγμα $\mathbf{1}$:

- Αντίστοιχα όμως και για τον παίκτη $2$ , οι στρατηγικές $0\$, 3\$$ ή $4\$$ δεν είναι συμφέρουσες και δεν θα της επιλέξει.
- Γεγονός που είναι γνωστό και στον παίκτη $1$.
- Επομένως και αυτές οι στρατηγικές διαγράφονται από το παίγνιο.

# Παράδειγμα 1:

Player 2's bid

| Player 1's bid | $0 | $1 | $2 | $3 | $4 |
|---|---|---|---|---|---|
| **$0** | $4.00 | $4.00 | $4.00 | $4.00 | $4.00 |
| **$1** | $11.00 | $7.00 | $5.67 | $5.00 | $4.60 |
| **$2** | $10.00 | $7.33 | $6.00 | $5.20 | $4.67 |
| **$3** | $9.00 | $7.00 | $5.80 | $5.00 | $4.43 |
| **$4** | $8.00 | $6.40 | $5.33 | $4.57 | $4.00 |

# Παράδειγμα 1:

- Από τις δύο στρατηγικές που έμειναν, για τον κάθε παίκτη η στρατηγική $2\$$ είναι πιο συμφέρουσα από την στρατηγική $1\$$.
- Γεγονός που είναι γνωστό και στους δύο παίκτες.
- Επομένως οι στρατηγικές $1\$$ διαγράφονται από το παίγνιο και για τους δύο παίκτες.

# Παράδειγμα 1:

| | | | Player 2's bid | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | ~~$0~~ | $1 | $2 | ~~$3~~ | ~~$4~~ |
| Player 1's bid | ~~$0~~ | ~~$4.00~~ | ~~$4.00~~ | ~~$4.00~~ | ~~$4.00~~ | ~~$4.00~~ |
| | ~~$1~~ | ~~$11.00~~ | ~~$7.00~~ | ~~$5.67~~ | ~~$5.00~~ | ~~$4.00~~ |
| | $2 | ~~$10.00~~ | $7.33 | $6.00 | ~~$5.20~~ | ~~$4.67~~ |
| | ~~$3~~ | ~~$9.00~~ | ~~$7.00~~ | ~~$5.80~~ | ~~$5.00~~ | ~~$4.43~~ |
| | ~~$4~~ | ~~$8.00~~ | ~~$6.40~~ | ~~$5.33~~ | ~~$4.57~~ | ~~$4.00~~ |

# Παράδειγμα 1:

Player 2's bid

| Player 1's bid | **$0** | **$1** | **$2** | **$3** | **$4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **$0** | $4.00 | $4.00 | $4.00 | $4.00 | $4.00 |
| **$1** | $11.00 | $7.00 | $5.67 | $5.00 | $4.60 |
| **$2** | $10.00 | $7.33 | $6.00 | $5.20 | $4.67 |
| **$3** | $9.00 | $7.00 | $5.80 | $5.00 | $4.43 |
| **$4** | $8.00 | $6.40 | $5.33 | $4.57 | $4.00 |

# Παράδειγμα 1:

- Άρα η από κοινού ποιο συμφέρουσα στρατηγική είναι κάθε παίκτης να βάλει στον φάκελο του 2$.
- Σε αυτή την περίπτωση τα κέρδη των παικτών θα είναι

$$\frac{\boldsymbol{8w_i}}{\boldsymbol{w_1 + w_2}} + \mathbf{4} - \boldsymbol{w_i} = \frac{\mathbf{8 \cdot 2}}{\mathbf{2 + 2}} + \mathbf{4} - \mathbf{2} = \mathbf{6\$}$$

Για τον κάθε παίκτη.

# Επίλυση Παιγνίου

- Ως επίλυση ενός παιγνίου ορίζουμε τον προσδιορισμό των επιλογών που θα κάνουν οι παίκτες στο παίγνιο.
- Η πιο απλή έννοια επίλυσης χρησιμοποιεί τις οριζόμενες ως **κυρίαρχες** και **κυριαρχούμενες στρατηγικές**
- **Τι είναι όμως κυρίαρχες** και **κυριαρχούμενες στρατηγικές;**

**Ας τις κατανοήσουμε μέσω του επόμενου παραδείγματος**

# Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες Στρατηγικές – Παράδειγμα 2:

**Παράδειγμα 2:**

Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2\}$.

- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$.
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων.**

# Παράδειγμα 2:

| | $\mathbf{A_2}$ | $\mathbf{B_2}$ | $\mathbf{\Gamma_2}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A_1}$ | 2,0 | 2,1 | 1,2 |
| $\mathbf{B_1}$ | 0,0 | 1,1 | 0,0 |
| $\mathbf{\Gamma_1}$ | 3,2 | 0,1 | 1,1 |

# Παράδειγμα 2:

- Στον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι ανεξάρτητα της στρατηγικής του παίκτη $2$, η στρατηγική $A_1$ του παίκτη $1$ αποφέρει μεγαλύτερη απόδοση από τη στρατηγική $\mathrm{B}_1$.

| | $\mathbf{A_2}$ | $\mathbf{B_2}$ | $\mathbf{\Gamma_2}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A_1}$ | $\mathbf{2}, 0$ | $\mathbf{2}, 1$ | $\mathbf{1}, 2$ |
| $\mathbf{B_1}$ | $\mathbf{0}, 0$ | $\mathbf{1}, 1$ | $\mathbf{0}, 0$ |
| $\mathbf{\Gamma_1}$ | 3,2 | 0,1 | 1,1 |

# Παράδειγμα 2:

- Σε αυτήν την περίπτωση θα λέμε ότι **η στρατηγική $A_1$ κυριαρχεί αυστηρά επί της στρατηγικής $\mathrm{B}_1$** ή ότι **η στρατηγική $B_1$ είναι αυστηρά κυριαρχούμενη από την $A_1$** .

| | $\mathbf{A_2}$ | $\mathbf{B_2}$ | $\mathbf{\Gamma_2}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A_1}$ | $\mathbf{2}, 0$ | $\mathbf{2}, 1$ | $\mathbf{1}, 2$ |
| $\mathbf{B_1}$ | $\mathbf{0}, 0$ | $\mathbf{1}, 1$ | $\mathbf{0}, 0$ |
| $\mathbf{\Gamma_1}$ | 3,2 | 0,1 | 1,1 |

# Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες Στρατηγικές

**Συμβολισμοί:**

- Ως $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ορίζουμε έναν συνδυασμό στρατηγικών όλων των παικτών.
- Συχνά θα γράφουμε $x = (x_i, x_{-i})$ όπου ο συνδυασμός $x_{-i}$ εμπεριέχει τις στρατηγικές όλων των παικτών, εκτός του $i$.
- Ορίζουμε $\mathrm{X}_{-\iota} = \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2 \times \cdots \times \mathrm{X}_{\iota-1} \times \mathrm{X}_{\iota+1} \times \cdots \times \mathrm{X}_n$, δηλαδή το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων των στρατηγικών όλων των παικτών εκτός του $i$.

# Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες Στρατηγικές

**Ορισμός:**

Έστω ένα παίγνιο $\Gamma = \{\mathrm{N}, (\mathrm{X}_\iota, u_i)_{i\in\mathbb{N}^*}\}$. Θα λέμε ότι **η στρατηγική $x_i$ του παίκτη $i$ κυριαρχεί αυστηρά επί της στρατηγικής $\widetilde{x}_i$** εάν και μόνο εάν

$$u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(\widetilde{x}_i, x_{-i}) \text{ για κάθε } x_{-i} \in \mathrm{X}_{-\iota}.$$

# Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες Στρατηγικές

**Ορισμός:**

Έστω ένα παίγνιο $\Gamma = \{\mathrm{N}, (\mathrm{X}_\iota, u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}\}$. Θα λέμε ότι **η στρατηγική $x_i$ του παίκτη $i$ κυριαρχεί ασθενώς επί της στρατηγικής $\widetilde{x}_i$** εάν και μόνο εάν

$$u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(\widetilde{x}_i, x_{-i}) \text{ για κάθε } x_{-i} \in \mathrm{X}_{-\iota}$$

και

$$u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(\widetilde{x}_i, x_{-i}) \text{ για ένα τουλάχιστον } x_{-i} \in \mathrm{X}_{-\iota}.$$

# Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες Στρατηγικές – Παράδειγμα 3:

**Παράδειγμα 3:**

Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2\}$.

- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$.
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων.**

# Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες Στρατηγικές – Παράδειγμα 3:

| | $\mathbf{A_2}$ | $\mathbf{B_2}$ | $\mathbf{\Gamma_2}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A_1}$ | 0,0 | 1,1 | 1,2 |
| $\mathbf{B_1}$ | 0,2 | 1,1 | 0,0 |
| $\mathbf{\Gamma_1}$ | 1,2 | 0,1 | 0,1 |

Παρατηρούμε ότι η στρατηγική $\mathbf{A_1}$ κυριαρχεί ασθενώς επί της στρατηγικής $\mathrm{B}_1$, αφού:

$$u_1(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}) = 0 = u_i(\mathbf{B_1}, \mathbf{A_2})$$
$$u_1(\mathbf{A_1}, \mathbf{B_2}) = 1 = u_i(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2})$$
$$u_1(\mathbf{A_1}, \mathbf{\Gamma_2}) = \mathbf{1} > 0 = u_i(\mathbf{B_1}, \mathbf{\Gamma_2})$$

# Άσκηση 1

**<u>Άσκηση 1:</u>**

Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2\}$. Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη $1$ είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ και του παίκτη $2$ είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$. Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων.**

# Άσκηση 1

| | $\mathbf{A_2}$ | $\mathbf{B_2}$ | $\mathbf{\Gamma_2}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{A_1}$ | 2,0 | 2,1 | 1,2 |
| $\mathbf{B_1}$ | 0,0 | 1,1 | 1,1 |
| $\mathbf{\Gamma_1}$ | 0,2 | 1,1 | 0,3 |

Να βρείτε ποιες στρατηγικές των παικτών 1,2 κυριαρχούν αυστηρά και ποιες ασθενώς έναντι άλλων στρατηγικών.

# Άσκηση 2

**Άσκηση 2:**

Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2\}$. Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη $1$ είναι $X_1 = \{A_1, B_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2\}$. Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων.**

# Άσκηση 2

| | $\mathbf{A_2}$ | $\mathbf{B_2}$ |
|---|---|---|
| $\mathbf{A_1}$ | $1,-1$ | $-1,1$ |
| $\mathbf{B_1}$ | $-1,1$ | $1,-1$ |

Υπάρχουν στρατηγικές των παικτών 1,2 που κυριαρχούν αυστηρά ή ασθενώς έναντι άλλων στρατηγικών;

# Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες στρατηγικές

- Μπορούμε να δεχτούμε την σύμβαση ότι οι παίκτες δεν χρησιμοποιούν αυστηρά κυριαρχούμενες στρατηγικές.
- Αυτή η αρχή θα μας επιτρέψει να αναπτύξουμε μία μέθοδο με την οποία θα επιλύουμε με εύκολο τρόπο ορισμένες κατηγορίες παιγνίων.
- Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **μέθοδος της διαδοχικής απαλοιφής αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών**.

# Βιβλιογραφία


- Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα. www.kallipos.gr