

# ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ *minimax*

---

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΓΑΛΑΝΗΣ, Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

# Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος

---

- **Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος** ονομάζεται το παίγνιο κατά το οποίο το άθροισμα όλων των αποδόσεων σε κάθε συνδυασμό στρατηγικών ισούται με 0.
- Σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος το κέρδος του ενός παίκτη ισούται με την ζημιά του άλλου ή των άλλων παικτών.
- Σε αντίθετη περίπτωση το παίγνιο λέγεται παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος.

# Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος

---

## Παράδειγμα 1:

- Έστω το σύνολο των δύο παικτών  $N = \{A, B\}$ .
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη A είναι  $X_A = \{A_1, A_2\}$  και του παίκτη B είναι  $X_B = \{B_1, B_2\}$ .
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων**.

# Πίνακας Πληρωμών

---

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>
A <sub>1</sub>	2, -2	-1, 1
A <sub>2</sub>	4, -4	5, -5

- Παρατηρούμε ότι το παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος. (Σε κάθε στρατηγική το κέρδος του παίκτη A είναι ίσο με την ζημιά του παίκτη B).
- Σε περιπτώσεις μηδενικού αθροίσματος μπορούμε να απλοποιήσουμε τον πίνακα ως εξής

# Πίνακας Πληρωμών

---

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	2	-1
<b>A<sub>2</sub></b>	4	5

- Ο παραπάνω πίνακας ονομάζεται **πίνακας πληρωμών** και αναφέρεται στο κέρδος του παίκτη A (και ζημία του παίκτη B) στο παίγνιο μηδενικού αθροίσματος.

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

---

- Παρατηρούμε ότι το καλύτερο στοιχείο του πίνακα για τον παίκτη A είναι το 5.
- Όμως αν ο A επιλέξει την στρατηγική  $A_2$  προκειμένου να επιδιώξει κέρδος 5, ο B θα επιλέξει την  $B_1$  ώστε να ελαχιστοποιήσει την ζημιά του.

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	2	-1
<b>A<sub>2</sub></b>	4	5

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

---

- Αν δούμε τώρα τον πίνακα από την σκοπιά του B το καλύτερο στοιχείο είναι το  $-1$  (κέρδος 1 για τον B, ζημιά 1 για τον A).
- Όμως αν ο B επιλέξει την στρατηγική  $B_2$  ώστε να επιδιώξει κέρδος  $-1$  τότε ο A θα επιλέξει την  $A_2$  για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

	$B_1$	$B_2$
$A_1$	2	-1
$A_2$	4	5

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Επομένως η κατάλληλη στρατηγική για τον παίκτη A είναι να επιλέξει από το ελάχιστο κάθε γραμμής, το μέγιστο (*maximin*), (αφού για οποιαδήποτε στρατηγική επιλέξει ο A, τότε ο B θα επιλέξει αυτή που ελαχιστοποιεί την ζημιά του).

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>	<b><i>min</i></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	2	-1	-1
<b>A<sub>2</sub></b>	4	5	4
<b><i>maximin</i></b>			4



# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Αντίστοιχα η κατάλληλη στρατηγική για τον παίκτη B είναι να επιλέξει από το μέγιστο κάθε στήλης, το ελάχιστο (*minimax*), (αφού για οποιαδήποτε στρατηγική επιλέξει ο B, τότε ο A θα επιλέξει αυτή που μεγιστοποιεί το κέρδος του).

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>	<i>minimax</i>
<b>A<sub>1</sub></b>	2	-1	
<b>A<sub>2</sub></b>	4	5	
<i>max</i>	4	5	<b>4</b>

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Αν το *minimax* είναι ίσο με το *maximin*, δηλαδή στο παίγνιο ισχύει η σχέση

$$\mathit{minimax} = \mathit{maximin}$$

τότε υπάρχει σημείο ισορροπίας και προκύπτει αυτόματα και η τιμή του παιγνίου.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	<i>min</i>
A <sub>1</sub>	2	-1	-1
A <sub>2</sub>	4	5	4
<i>maximin</i>			4

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	<u>minmax</u>
A <sub>1</sub>	2	-1	
A <sub>2</sub>	4	5	
max	4	5	4

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Στο παράδειγμά μας το παίγνιο καταλήγει στη λήψης της απόφασης για τον παίκτη A να χρησιμοποιήσει την στρατηγική  $A_2$  και για τον παίκτη B να ακολουθήσει την  $B_1$ .
- Το σημείο  $(A_2, B_1)$  ονομάζεται σημείο ισορροπίας ή σημείο σάγγματος του παίγνιου.

	$B_1$	$B_2$	<i>min</i>
$A_1$	2	-1	-1
$A_2$	4	5	4
<i>maximin</i>			4

	$B_1$	$B_2$	<u>minmax</u>
$A_1$	2	-1	
$A_2$	4	5	
max	4	5	4

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Οι παίκτες ακολουθούν αμιγή στρατηγική.
- Η τιμή του παιχνιδιού θα είναι  $V = 4$  (κέρδος 4 μονάδες για τον παίκτη A και αντίστοιχα ζημιά 4 μονάδες για τον παίκτη B).

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>	<b><i>min</i></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	2	-1	-1
<b>A<sub>2</sub></b>	4	5	4
<b><i>maximin</i></b>			<b>4</b>

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>	<b><u>minmax</u></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	2	-1	
<b>A<sub>2</sub></b>	4	5	
<b>max</b>	4	5	<b>4</b>

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

---

- Βέβαια δεν υπάρχει σε κάθε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος σημείο ισορροπίας (π.χ. αν *minimax*  $\neq$  *maximin*)
- Στην περίπτωση αυτή οι παίκτες αναγκάζονται να ακολουθούν μίγμα στρατηγικών.

# Παίγνια Σταθερού Αθροίσματος

---

- **Παίγνιο σταθερού αθροίσματος** ονομάζεται το παίγνιο κατά το οποίο το άθροισμα όλων των αποδόσεων σε κάθε συνδυασμό στρατηγικών ισούται με έναν σταθερό αριθμό  $c$ .
- Τα παίγνια σταθερού αθροίσματος αποτελούν γενίκευση των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος.

# Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος

---

## Παράδειγμα 2:

- Έστω το σύνολο των δύο παικτών  $N = \{A, B\}$ .
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη A είναι  $X_A = \{A_1, A_2\}$  και του παίκτη B είναι  $X_B = \{B_1, B_2\}$ .
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων**.

# Πίνακας Πληρωμών

---

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	2,3	1,4
<b>A<sub>2</sub></b>	4,1	5,0

- Παρατηρούμε ότι το παίγνιο είναι σταθερού αθροίσματος. (Σε κάθε στρατηγική το άθροισμα των αποδόσεων των δύο παικτών είναι ίσο με 5).
- Σε περιπτώσεις σταθερού αθροίσματος μπορούμε να απλοποιήσουμε τον πίνακα ως εξής



# Πίνακας Πληρωμών

---

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	2	1
<b>A<sub>2</sub></b>	4	5

- Ο παραπάνω πίνακας ονομάζεται **πίνακας πληρωμών** και αναφέρεται στο κέρδος του παίκτη A στο παίγνιο σταθερού αθροίσματος.

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Παρατηρούμε ότι το καλύτερο στοιχείο του πίνακα για τον παίκτη A είναι το 5.
- Όμως αν ο A επιλέξει την στρατηγική  $A_2$  προκειμένου να επιδιώξει κέρδος 5, ο B θα επιλέξει την  $B_1$  ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	2	1
<b>A<sub>2</sub></b>	4	5

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

---

- Αν δούμε τώρα τον πίνακα από την σκοπιά του B το καλύτερο στοιχείο είναι το 4 (κέρδος 4 για τον B, κέρδος 1 για τον A).
- Όμως αν ο B επιλέξει την στρατηγική  $B_2$  ώστε να επιδιώξει κέρδος - 4 τότε ο A θα επιλέξει την  $A_2$  για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	2	1
<b>A<sub>2</sub></b>	4	5

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Επομένως η κατάλληλη στρατηγική για τον παίκτη A είναι να επιλέξει από το ελάχιστο κάθε γραμμής, το μέγιστο (*maximin*), (αφού για οποιαδήποτε στρατηγική επιλέξει ο A, τότε ο B θα επιλέξει αυτή που ελαχιστοποιεί την ζημιά του).

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>	<b><i>min</i></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	2	1	1
<b>A<sub>2</sub></b>	4	5	4
<b><i>maximin</i></b>			4

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Αντίστοιχα η κατάλληλη στρατηγική για τον παίκτη B είναι να επιλέξει από το μέγιστο κάθε στήλης, το ελάχιστο (*minimax*), (αφού για οποιαδήποτε στρατηγική επιλέξει ο B, τότε ο A θα επιλέξει αυτή που μεγιστοποιεί το κέρδος του).

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>	<i>minimax</i>
<b>A<sub>1</sub></b>	2	1	
<b>A<sub>2</sub></b>	4	5	
<i>max</i>	4	5	<b>4</b>

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Αν το *minimax* είναι ίσο με το *maximin*, δηλαδή στο παίγνιο ισχύει η σχέση

$$\mathit{minimax} = \mathit{maximin}$$

τότε υπάρχει σημείο ισορροπίας και προκύπτει αυτόματα και η τιμή του παιγνίου.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	<i>min</i>
A <sub>1</sub>	2	1	1
A <sub>2</sub>	4	5	4
<i>maximin</i>			4

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	<u>minmax</u>
A <sub>1</sub>	2	1	
A <sub>2</sub>	4	5	
max	4	5	4

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Στο παράδειγμά μας το παίγνιο καταλήγει στη λήψης της απόφασης για τον παίκτη A να χρησιμοποιήσει την στρατηγική  $A_2$  και για τον παίκτη B να ακολουθήσει την  $B_1$ .
- Το σημείο  $(A_2, B_1)$  ονομάζεται σημείο ισορροπίας ή σημείο σάγγματος του παίγνιου.

	$B_1$	$B_2$	<i>min</i>
$A_1$	2	1	1
$A_2$	4	5	4
<i>maximin</i>			4

	$B_1$	$B_2$	<u>minmax</u>
$A_1$	2	1	
$A_2$	4	5	
<i>max</i>	4	5	4

# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Οι παίκτες ακολουθούν αμιγή στρατηγική.
- Η τιμή του παιχνιδιού θα είναι  $V = 4$  (κέρδος 4 μονάδες για τον παίκτη A και αντίστοιχα κέρδος 1 μονάδα για τον παίκτη B).

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	<i>min</i>
A <sub>1</sub>	2	1	1
A <sub>2</sub>	4	5	4
<i>maximin</i>			4

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	<u>minmax</u>
A <sub>1</sub>	2	1	
A <sub>2</sub>	4	5	
max	4	5	4



# Στρατηγική *minimax* και *maximin*

---

- Βέβαια δεν υπάρχει σε κάθε παίγνιο σταθερού αθροίσματος σημείο ισορροπίας (π.χ. αν  $minimax \neq maximin$ ).
- Στην περίπτωση αυτή οι παίκτες αναγκάζονται να ακολουθούν μίγμα στρατηγικών.

# Άσκηση

---

- Έστω το σύνολο των δύο παικτών  $N = \{A, B\}$ .
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη A είναι  $X_A = \{A_1, A_2, A_3\}$  και του παίκτη B είναι  $X_B = \{B_1, B_2, B_3\}$ .
- Γνωρίζουμε ότι το παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος και δίνεται ο παρακάτω πίνακας πληρωμών που αναφέρεται στο κέρδος του παίκτη A.

# Άσκηση

---

	<b>B<sub>1</sub></b>	<b>B<sub>2</sub></b>	<b>B<sub>3</sub></b>
<b>A<sub>1</sub></b>	4	4	10
<b>A<sub>2</sub></b>	2	3	1
<b>A<sub>3</sub></b>	6	5	7

- A.** Ποιο είναι το μεγαλύτερο κέρδος που μπορεί να έχει ο παίκτης A;
- B.** Στην περίπτωση που ο παίκτης A επέλεξε την στρατηγική για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του ποια στρατηγική αναμένεται να επιλέξει ο παίκτης B;

# Άσκηση

---

- C. Ποια είναι η μικρότερη ζημία που μπορεί να έχει ο παίκτης B; Στην περίπτωση που ο παίκτης B επέλεγε την στρατηγική για να ελαχιστοποιήσει τη ζημία του ποια στρατηγική αναμένεται να επιλέξει ο παίκτης A;
- D. Να βρείτε εφόσον υπάρχει σημείο σάγγματος του παίγνιου. Ποια είναι η απόδοση του κάθε παίκτη στην περίπτωση αυτή;
- E. Αποτελεί το σημείο σάγγματος σημείο ισορροπίας Nash; Αιτιολογείστε.

	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
A <sub>1</sub>	4	4	10
A <sub>2</sub>	2	3	1
A <sub>3</sub>	6	5	7

# Βιβλιογραφία

---

- Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα. [www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr)
- - Αλιπράντης, Χ., Chakrabarti, S. (2004). Παίγνια και λήψη αποφάσεων. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Μαγείρου, Ε. (2012). Παίγνια και Αποφάσεις – Μια εισαγωγική προσέγγιση. Εκδόσεις Κριτική.
- Μηλολιδάκης, Κ. (2009). Θεωρία Παιγνίων – Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας. Εκδόσεις «Σοφία».