

Κυρίαρχες και Κυριαρχούμενες Στρατηγικές

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Παράδειγμα 1

Ας δούμε ένα αρχικό παράδειγμα για να κατανοήσουμε τις βασικές έννοιες της Θεωρίας Παιγνίων.

- Έστω δύο παίκτες 1,2 . Κάθε ένας από αυτούς διαθέτει 4\$.
- Εγώ διαθέτω 8\$.
- Κάθε παίκτης i τοποθετεί w_i χρήματα σε έναν φάκελο.
 $i = 1,2$

Παράδειγμα 1

- Κάθε παίκτης i τοποθετεί w_i χρήματα σε έναν φάκελο.
 $i = 1, 2$.
- Εγώ δίνω σε κάθε παίκτη i , $\frac{8w_i}{w_1 + w_2}$ αν $w_1 + w_2 \neq 0$, ενώ δίνω 0\$ σε κάθε παίκτη αν $w_1 + w_2 = 0$.
- Τα χρήματα που δεν έχει βάλει ο κάθε παίκτης στον φάκελο το κρατάει για τον εαυτό του.

Παράδειγμα 1

- Ποιο είναι το minimum κέρδος που έχει εξασφαλίσει κάθε παίκτης;
- Έχει νόημα να τοποθετήσουν και οι δύο 0\$ στον φάκελο τους;
- Ποια στρατηγική είναι η πιο συμφέρουσα για κάθε παίκτη;

Παράδειγμα 1

- Υπάρχει μία στρατηγική (ένα ποσό στον φάκελο) που κάποιος παίχτης δεν πρέπει να επιλέξει;
- Ποια είναι η από κοινού πιο συμφέρουσα στρατηγική;

Παράδειγμα 1

- Τι πιστεύετε ότι θα συμβεί όταν πραγματοποιηθεί το παίγνιο αν θεωρήσουμε ότι οι παίκτες μας είναι νοήμονες;

Παράδειγμα 1

Λύση – Προσέγγιση – Μοντελοποίηση Προβλήματος

Ας δούμε ποια θα είναι η απόδοση του παίκτη 1, μετά την πραγματοποίηση του παίγνιου.

- Ο παίκτης 1 είχε 4\$, τοποθέτησε στον φάκελο w_1 \$, άρα έχασε w_1 \$ από την κατοχή του
- Ενώ δέχθηκε $\frac{8w_1}{w_1+w_2}$ € από εμένα.

Παράδειγμα 1

- Άρα συνολικά τα χρήματα που θα έχει στην κατοχή του μετά τη λήξη του παίγνιου είναι:

$$\frac{8w_1}{w_1 + w_2} + 4 - w_1, \quad \text{αν } w_1 + w_2 \neq 0$$

$$4, \quad \text{αν } w_1 + w_2 = 0$$

Παράδειγμα 1

- Για τις διάφορες επιλογές (στρατηγικές) των δύο παικτών στον παρακάτω βλέπουμε τις διαφορετικές αποδόσεις του παίκτη 1.

		Player 2's bid				
		\$0	\$1	\$2	\$3	\$4
Player 1's bid	\$0	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00
	\$1	\$11.00	\$7.00	\$5.67	\$5.00	\$4.60
	\$2	\$10.00	\$7.33	\$6.00	\$5.20	\$4.67
	\$3	\$9.00	\$7.00	\$5.80	\$5.00	\$4.43
	\$4	\$8.00	\$6.40	\$5.33	\$4.57	\$4.00

Παράδειγμα 1

Παρατηρήσεις:

- Αντίστοιχος είναι και ο πίνακας αποδόσεων του παίκτη 2.
- Από τον πίνακα αποδόσεων βλέπουμε ότι η minimum απόδοση που έχει εξασφαλίσει κάθε παίκτης είναι 4\$. (Δηλαδή κέρδος 0\$).

Παράδειγμα 1

Παρατηρήσεις:

- Δεν έχει νόημα να τοποθετήσουν και οι δύο 0€ στον φάκελο τους, εφόσον τότε το κέρδος τους θα είναι το ελάχιστο δυνατό. Υπάρχουν άλλες στρατηγικές αρκετά πιο συμφέρουσες και για τους δύο παίκτες.

Παράδειγμα 1

- Η μεγαλύτερη απόδοση που μπορεί να έχει ο κάθε παίκτης είναι 11\$. Όμως αν ο ένας παίκτης έχει maximum απόδοση 11\$, σύμφωνα με τον πίνακα ο άλλος παίκτης θα έχει minimum απόδοση 4\$.

		Player 2's bid				
		\$0	\$1	\$2	\$3	\$4
Player 1's bid	\$0	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00
	\$1	\$11.00	\$7.00	\$5.67	\$5.00	\$4.60
	\$2	\$10.00	\$7.33	\$6.00	\$5.20	\$4.67
	\$3	\$9.00	\$7.00	\$5.80	\$5.00	\$4.43
	\$4	\$8.00	\$6.40	\$5.33	\$4.57	\$4.00

Παράδειγμα 1

- Επομένως καταλαβαίνουμε ότι κανένας νοήμον παίκτης δεν θα διαλέξει μια τέτοια στρατηγική.

		Player 2's bid				
		\$0	\$1	\$2	\$3	\$4
Player 1's bid	\$0	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00
	\$1	\$11.00	\$7.00	\$5.67	\$5.00	\$4.60
	\$2	\$10.00	\$7.33	\$6.00	\$5.20	\$4.67
	\$3	\$9.00	\$7.00	\$5.80	\$5.00	\$4.43
	\$4	\$8.00	\$6.40	\$5.33	\$4.57	\$4.00

Παράδειγμα 1

- Ο παίκτης 1 έχει μεγαλύτερη απόδοση να βάλει στον φάκελο 2\$ από το να βάλει 0\$, 3\$ ή 4\$. Ανεξάρτητα από την επιλογή του δεύτερου παίκτη.

		Player 2's bid				
		\$0	\$1	\$2	\$3	\$4
Player 1's bid	\$0	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00
	\$1	\$11.00	\$7.00	\$5.67	\$5.00	\$4.60
	\$2	\$10.00	\$7.33	\$6.00	\$5.20	\$4.67
	\$3	\$9.00	\$7.00	\$5.80	\$5.00	\$4.43
	\$4	\$8.00	\$6.40	\$5.33	\$4.57	\$4.00

Παράδειγμα 1

- Άρα οι στρατηγικές 0\$, 3\$ και 4\$. είναι στρατηγικές που δεν θα επιλέξει ο παίκτης 1.

		Player 2's bid				
		\$0	\$1	\$2	\$3	\$4
Player 1's bid	\$0	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00
	\$1	\$11.00	\$7.00	\$5.67	\$5.00	\$4.60
	\$2	\$10.00	\$7.33	\$6.00	\$5.20	\$4.67
	\$3	\$9.00	\$7.00	\$5.80	\$5.00	\$4.43
	\$4	\$8.00	\$6.40	\$5.33	\$4.57	\$4.00

Παράδειγμα 1

		Player 2's bid				
		\$0	\$1	\$2	\$3	\$4
Player 1's bid	\$0	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00
	\$1	\$11.00	\$7.00	\$5.67	\$5.00	\$4.60
	\$2	\$10.00	\$7.33	\$6.00	\$5.20	\$4.67
	\$3	\$9.00	\$7.00	\$5.80	\$5.00	\$4.43
	\$4	\$8.00	\$6.40	\$5.33	\$4.57	\$4.00

Παράδειγμα 1

- Αντίστοιχα όμως και για τον παίκτη 2 , οι στρατηγικές 0\$, 3\$ ή 4\$ δεν είναι συμφέρουσες και δεν θα της επιλέξει.
- Γεγονός που είναι γνωστό και στον παίκτη 1.
- Επομένως και αυτές οι στρατηγικές διαγράφονται από το παίγνιο.

Παράδειγμα 1

		Player 2's bid				
		\$0	\$1	\$2	\$3	\$4
Player 1's bid	\$0	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00
	\$1	\$11.00	\$7.00	\$5.67	\$5.00	\$4.60
	\$2	\$10.00	\$7.33	\$6.00	\$5.20	\$4.67
	\$3	\$0.00	\$7.00	\$5.80	\$5.00	\$4.40
	\$4	\$0.00	\$0.40	\$5.33	\$4.57	\$4.00

Παράδειγμα 1

- Από τις δύο στρατηγικές που έμειναν, για τον κάθε παίκτη η στρατηγική 2\$ είναι πιο συμφέρουσα από την στρατηγική 1\$.
- Γεγονός που είναι γνωστό και στους δύο παίκτες.
- Επομένως οι στρατηγικές 1\$ διαγράφονται από το παίγνιο και για τους δύο παίκτες.

Παράδειγμα 1

		Player 2's bid				
		\$0	\$1	\$2	\$3	\$4
Player 1's bid	\$0	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00
	\$1	\$11.00	\$7.00	\$5.07	\$5.00	\$4.00
	\$2	\$10.00	\$7.33	\$6.00	\$5.20	\$4.67
	\$3	\$0.00	\$7.00	\$5.80	\$5.00	\$4.40
	\$4	\$0.00	\$0.40	\$5.00	\$4.57	\$4.00

Παράδειγμα 1

		Player 2's bid				
		\$0	\$1	\$2	\$3	\$4
Player 1's bid	\$0	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00	\$4.00
	\$1	\$11.00	\$7.00	\$5.07	\$5.00	\$4.00
	\$2	\$10.00	\$7.33	\$6.00	\$5.20	\$4.67
	\$3	\$0.00	\$7.00	\$5.80	\$5.00	\$4.40
	\$4	\$0.00	\$0.40	\$5.00	\$4.57	\$4.00

Παράδειγμα 1

- Άρα η από κοινού ποιο συμφέρουσα στρατηγική είναι κάθε παίκτης να βάλει στον φάκελο του 2\$.
- Σε αυτή την περίπτωση οι αποδόσεις των παικτών θα είναι :

Παράδειγμα 1

$$\frac{8w_i}{w_1 + w_2} + 4 - w_i = \frac{8 \cdot 2}{2 + 2} + 4 - 2 = 6\$$$

Για τον κάθε παίκτη. (Δηλαδή κέρδος 2\$ ο κάθε ένας).

Επίλυση Παιγνίου

- Ως επίλυση ενός παιγνίου ορίζουμε τον προσδιορισμό των επιλογών που θα κάνουν οι παίκτες στο παίγνιο.
- Η πιο απλή έννοια επίλυσης χρησιμοποιεί τις οριζόμενες ως **κυρίαρχες** και **κυριαρχούμενες στρατηγικές**

Επίλυση Παιγνίου

- Τι είναι όμως κυρίαρχες και κυριαρχούμενες στρατηγικές;

Ας τις κατανοήσουμε μέσω του επόμενου παραδείγματος

Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες Στρατηγικές – Παράδειγμα 2

Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2\}$.

- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$.
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων**.

Παράδειγμα 2

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2, 0	2, 1	1, 2
B_1	0, 0	1, 1	0, 0
Γ_1	3, 2	0, 1	1, 1

Παράδειγμα 2

- Στον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι ανεξάρτητα της στρατηγικής του παίκτη 2, η στρατηγική A_1 του παίκτη 1 αποφέρει μεγαλύτερη απόδοση από τη στρατηγική B_1 .

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2, 0	2, 1	1, 2
B_1	0, 0	1, 1	0, 0
Γ_1	3, 2	0, 1	1, 1

Παράδειγμα 2

- Σε αυτήν την περίπτωση θα λέμε ότι η στρατηγική A_1 κυριαρχεί αυστηρά επί της στρατηγικής B_1 ή ότι η στρατηγική B_1 είναι αυστηρά κυριαρχούμενη από την A_1 .

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2, 0	2, 1	1, 2
B_1	0, 0	1, 1	0, 0
Γ_1	3, 2	0, 1	1, 1

Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες Στρατηγικές

Συμβολισμοί:

- Ως $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ορίζουμε έναν συνδυασμό στρατηγικών όλων των παικτών.
- Συχνά θα γράφουμε $x = (x_i, x_{-i})$ όπου ο συνδυασμός x_{-i} εμπεριέχει τις στρατηγικές όλων των παικτών, εκτός του i .

Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες Στρατηγικές

Συμβολισμοί:

- $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$, δηλαδή το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων των στρατηγικών όλων των παικτών εκτός του i .

Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες Στρατηγικές

Ορισμός:

Έστω ένα παίγνιο $\Gamma = \{N, (X_i, u_i)_{i \in N^*}\}$. Θα λέμε ότι η στρατηγική x_i του παίκτη i κυριαρχεί αυστηρά επί της στρατηγικής $\tilde{x}_i$ εάν και μόνο εάν

$$u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(\tilde{x}_i, x_{-i}) \text{ για κάθε } x_{-i} \in X_{-i}.$$

Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες Στρατηγικές

Ορισμός:

Έστω ένα παίγνιο $\Gamma = \{N, (X_i, u_i)_{i \in N^*}\}$. Θα λέμε ότι η στρατηγική x_i του παίκτη i κυριαρχεί ασθενώς επί της στρατηγικής $\tilde{x}_i$ εάν και μόνο εάν

$$u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(\tilde{x}_i, x_{-i}) \text{ για κάθε } x_{-i} \in X_{-i}$$

και

$$u_i(x_i, x_{-i}) > u_i(\tilde{x}_i, x_{-i}) \text{ για ένα τουλάχιστον } x_{-i} \in X_{-i}.$$

Παράδειγμα 3

Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2\}$.

- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$.
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων**.

Παράδειγμα 3

	A ₂	B ₂	Γ ₂
A ₁	0,0	1,1	1,2
B ₁	0,2	1,1	0,0
Γ ₁	1,2	0,1	0,1

Παρατηρούμε ότι η στρατηγική A₁ κυριαρχεί ασθενώς επί της στρατηγικής B₁, αφού:

$$u_1(A_1, A_2) = 0 = u_i(B_1, A_2)$$

$$u_1(A_1, B_2) = 1 = u_i(B_1, B_2)$$

$$u_1(A_1, \Gamma_2) = 1 > 0 = u_i(B_1, \Gamma_2)$$

Άσκηση 1

Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2\}$.

Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$.

Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων**.

Άσκηση 1

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2, 0	2, 1	1, 2
B_1	0, 0	1, 1	1, 1
Γ_1	0, 2	1, 1	0, 3

Να βρείτε ποιες στρατηγικές των παικτών 1,2 κυριαρχούν αυστηρά και ποιες ασθενώς έναντι άλλων στρατηγικών.

Άσκηση 2

Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2\}$.

Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι

$X_1 = \{A_1, B_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2\}$.

Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων**.

Άσκηση 2

	A_2	B_2
A_1	$1, -1$	$-1, 1$
B_1	$-1, 1$	$1, -1$

Υπάρχουν στρατηγικές των παικτών 1,2 που κυριαρχούν αυστηρά ή ασθενώς έναντι άλλων στρατηγικών;

Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες στρατηγικές

- Μπορούμε να δεχτούμε την σύμβαση ότι οι παίκτες δεν χρησιμοποιούν αυστηρά κυριαρχούμενες στρατηγικές.
- Αυτή η αρχή θα μας επιτρέψει να αναπτύξουμε μία μέθοδο με την οποία θα επιλύουμε με εύκολο τρόπο ορισμένες κατηγορίες παιγνίων.

Κυρίαρχες – Κυριαρχούμενες στρατηγικές

- Η μέθοδος αυτή ονομάζεται μέθοδος της διαδοχικής απαλοιφής αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών.

Βιβλιογραφία

- Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα. www.kallipos.gr