Ισορροπία Nash - Συνάρτηση Βέλτιστης Αντίδρασης

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Ισορροπία Nash – Παραδείγματα

Θα μελετήσουμε στην συνέχεια τις ισορροπίες Nash για ορισμένα απλά παραδείγματα παιγνίων.

Παράδειγμα 1

- Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι

$X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$.

- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων.**

Παράδειγμα 1

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	$0, 0$	$0, 1$	$1, 2$
B_1	$0, 2$	$1, 1$	$0, 0$
Γ_1	$1, 2$	$0, 1$	$0, 3$

Παράδειγμα 1

- Θα εξετάσουμε ποια ζεύγη στρατηγικών συνιστούν ισορροπία Nash.
- Ας δούμε πρώτα το ζεύγος $(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2})$.
- Το σημείο αυτό δεν συνιστά σημείο ισορροπίας. Ένας τουλάχιστον παίκτης έχει λόγο να επιλέξει διαφορετική ποιο συμφέρουσα στρατηγική.

Παράδειγμα 1

- Δεδομένης της στρατηγικής $\mathbf{A_2}$ του παίκτη 2, αν ο παίκτης 1 αλλάξει στρατηγική και από την $\mathbf{A_1}$ επιλέξει την $\mathbf{\Gamma_1}$ τότε έχει καλύτερη απόδοση, αφού

$$u_1(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}) = 0 < u_1(\mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{A_2}) = 1.$$

- Συνεπώς η στρατηγική $(\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2})$ δεν συνιστά συνδυασμό

αμοιβαία βέλτιστων στρατηγικών.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	0, 0	0, 1	1, 2
$\mathbf{B_1}$	0, 2	1, 1	0, 0
$\mathbf{\Gamma_1}$	1, 2	0, 1	0, 3

Παράδειγμα 1

- Ας δούμε τώρα το ζεύγος $(\mathbf{B_1}, \boldsymbol{A_2})$.
- Επίσης το σημείο αυτό δεν συνιστά σημείο ισορροπίας.

Παράδειγμα 1

- Δεδομένης της στρατηγικής $\mathbf{A_2}$ του παίκτη 2, αν ο παίκτης 1 αλλάξει στρατηγική και από την $\mathbf{B_1}$ επιλέξει την $\mathbf{\Gamma_1}$ τότε έχει καλύτερη απόδοση, αφού

$$u_1(\mathbf{B_1}, \mathbf{A_2}) = 0 < u_1(\mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{A_2}) = 1.$$

- Συνεπώς ούτε η στρατηγική $(\mathbf{B_1}, \mathbf{A_2})$ δεν συνιστά συνδυασμό

αμοιβαία βέλτιστων στρατηγικών.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{0, 0}$	$\mathbf{0, 1}$	$\mathbf{1, 2}$
$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{0, 2}$	$\mathbf{1, 1}$	$\mathbf{0, 0}$
$\mathbf{\Gamma_1}$	$\mathbf{1, 2}$	$\mathbf{0, 1}$	$\mathbf{0, 3}$

Παράδειγμα 1

- Ο $\sigma\upsilon\nu\delta\upsilon\alpha\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ $(\mathbf{A_1}, \mathbf{B_2})$ δίνει κίνητρο μονομερούς απόκλισης τόσο στον παίκτη 1 όσο και στον παίκτη 2.
- Επίσης το σημείο αυτό δεν συνιστά σημείο ισορροπίας.

Παράδειγμα 1

- Δεδομένης της στρατηγικής $\mathbf{B_2}$ του παίκτη 2, αν ο παίκτης 1 αλλάξει στρατηγική και από την $\mathbf{A_1}$ επιλέξει την $\mathbf{B_1}$ τότε έχει καλύτερη απόδοση, αφού

$$u_1(\mathbf{A_1}, \mathbf{B_2}) = 0 < u_1(\mathbf{B_1}, \mathbf{A_2}) = 1.$$

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	0, 0	0, 1	1, 2
$\mathbf{B_1}$	0, 2	1, 1	0, 0
$\mathbf{\Gamma_1}$	1, 2	0, 1	0, 3

Παράδειγμα 1

- Δεδομένης της στρατηγικής $\mathbf{A_1}$ του παίκτη 1, αν ο παίκτης 1 αλλάξει στρατηγική και από την $\mathbf{B_2}$ επιλέξει την $\mathbf{\Gamma_2}$ τότε έχει καλύτερη απόδοση, αφού

$$u_2(\mathbf{A_1}, \mathbf{B_2}) = 1 < u_2(\mathbf{A_1}, \mathbf{\Gamma_2}) = 2.$$

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	$0, 0$	$0, 1$	$1, 2$
$\mathbf{B_1}$	$0, 2$	$1, 1$	$0, 0$
$\mathbf{\Gamma_1}$	$1, 2$	$0, 1$	$0, 3$

Παράδειγμα 1

- Ας δούμε τέλος τον συνδυασμό $(\mathbf{A_1}, \mathbf{\Gamma_2})$. Για την περίπτωση αυτή δεν υπάρχει κίνητρο μονομερούς απόκλισης.
- Δεδομένης της στρατηγικής $\mathbf{\Gamma_2}$ του παίκτη 2 η βέλτιστη στρατηγική του παίκτη 1 είναι η $\mathbf{A_1}$.
- Δεδομένης της στρατηγικής $\mathbf{A_1}$ του παίκτη 1 η βέλτιστη στρατηγική του παίκτη 2 είναι η $\mathbf{\Gamma_2}$.

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	0, 0	0, 1	1, 2
$\mathbf{B_1}$	0, 2	1, 1	0, 0
$\mathbf{\Gamma_1}$	1, 2	0, 1	0, 3

Παράδειγμα 1

- Ο συνδυασμός $(\mathbf{A_1}, \mathbf{\Gamma_2})$ είναι συνεπώς συνδυασμός αμοιβαία βέλτιστων στρατηγικών, είναι δηλαδή **ισορροπία κατά Nash.**

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	$0, 0$	$0, 1$	$1, 2$
$\mathbf{B_1}$	$0, 2$	$1, 1$	$0, 0$
$\mathbf{\Gamma_1}$	$1, 2$	$0, 1$	$0, 3$

Ισορροπία Nash – Συνάρτηση Βέλτιστης Αντίδρασης

- Η συνάρτηση βέλτιστης αντίδρασης ενός παίκτη δίνει τις στρατηγικές εκείνες που μεγιστοποιούν την απόδοση των δεδομένων των στρατηγικών των άλλων παικτών.
- Ας δούμε τις βέλτιστες στρατηγικές στο προηγούμενο παράδειγμα.

Ισορροπία Nash – Συνάρτηση Βέλτιστης Αντίδρασης

- Συμβολίζουμε με $b_1(x_2)$ τη βέλτιστη στρατηγική του παίκτη 1 δεδομένης της στρατηγικής x_2 του παίκτη 2. $x_2 \in \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$
- Η συνάρτηση αυτή παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

x_2	$b_1(x_2)$
A_2	Γ_1
B_2	B_1
Γ_2	A_1

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0, 0	0, 1	1, 2
B_1	0, 2	1, 1	0, 0
Γ_1	1, 2	0, 1	0, 3

Ισορροπία Nash – Συνάρτηση Βέλτιστης Αντίδρασης

- Συμβολίζουμε με $b_2(x_1)$ τη βέλτιστη στρατηγική του παίκτη 2 δεδομένης της στρατηγικής x_1 του παίκτη 1. $x_1 \in \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$
- Η συνάρτηση αυτή παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

x_1	$b_2(x_1)$
A_1	Γ_2
B_1	A_2
Γ_1	Γ_2

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0, 0	0, 1	1, 2
B_1	0, 2	1, 1	0, 0
Γ_1	1, 2	0, 1	0, 3

Ισορροπία Nash – Συνάρτηση Βέλτιστης Αντίδρασης

- Όπως έχουμε ήδη πει, η ισορροπία επιτυγχάνεται σε κάθε προφίλ αμοιβαία βέλτιστων στρατηγικών.

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{b_2(x_1)}$
A_1	Γ_2
B_1	A_2
Γ_1	Γ_2

$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{b_1(x_2)}$
A_2	Γ_1
B_2	B_1
Γ_2	A_1

- Από τους πίνακες βλέπουμε ότι

$$\boldsymbol{b_1(\Gamma_2) = A_1} \text{ και } \boldsymbol{b_2(A_1) = \Gamma_2}$$

Ισορροπία Nash – Συνάρτηση Βέλτιστης Αντίδρασης

- Δηλαδή οι στρατηγικές (A_1, Γ_2) είναι αμοιβαία βέλτιστες. Άρα αποτελούν ισορροπία Nash.

Παράδειγμα 2

- Έστω το σύνολο των δύο παικτών $N = \{1,2\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι

$X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$ και του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$.

- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων.**

Παράδειγμα 2

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	$\mathbf{0,0}$	$\mathbf{0,1}$	$\mathbf{1,2}$
$\mathbf{B_1}$	$\mathbf{0,2}$	$\mathbf{1,1}$	$\mathbf{0,0}$
$\mathbf{\Gamma_1}$	$\mathbf{1,2}$	$\mathbf{0,1}$	$\mathbf{0,1}$

Παράδειγμα 2

- Η συνάρτηση $b_1(x_2)$ της βέλτιστης στρατηγική του παίκτη 1 δεδομένης της στρατηγικής x_2 του παίκτη 2, $x_2 \in \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$ παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{b_1(x_2)}$
$\boldsymbol{A_2}$	$\mathbf{\Gamma_1}$
$\boldsymbol{B_2}$	$\mathbf{B_1}$
$\boldsymbol{\Gamma_2}$	$\mathbf{A_1}$

	$\mathbf{A_2}$	$\mathbf{B_2}$	$\mathbf{\Gamma_2}$
$\mathbf{A_1}$	$0, 0$	$0, 1$	$1, 2$
$\mathbf{B_1}$	$0, 2$	$1, 1$	$0, 0$
$\mathbf{\Gamma_1}$	$1, 2$	$0, 1$	$0, 1$

Παράδειγμα 2

- Η συνάρτηση $b_2(x_1)$ της βέλτιστης στρατηγική του παίκτη 2 δεδομένης της στρατηγικής x_1 του παίκτη 1, x_1 $\{A_1, B_1, \Gamma_1\}$

παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

x_1	$b_2(x_1)$
A_1	Γ_2
B_1	A_2
Γ_1	A_2

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0, 0	0, 1	1, 2
B_1	0, 2	1, 1	0, 0
Γ_1	1, 2	0, 1	0, 1

Παράδειγμα 2

x_2	$b_1(x_2)$
A_2	Γ_1
B_2	B_1
Γ_2	A_1

x_1	$b_2(x_1)$
A_1	Γ_2
B_1	A_2
Γ_1	A_2

- Από τους πίνακες βλέπουμε ότι
  - $b_1(\Gamma_2) = A_1$ και $b_2(A_1) = \Gamma_2$
  - $b_1(\mathrm{A}_2) = \Gamma_1$ και $b_2(\Gamma_1) = \mathrm{A}_2$

Παράδειγμα 2

- Δηλαδή, στο παίγνιο αυτό υπάρχουν δύο προφίλ αμοιβαία βέλτιστων στρατηγικών.
- Οι στρατηγικές (A_1, Γ_2) και (Γ_1, A_2)είναι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές.

Παράδειγμα 2

<u>Παρατήρηση:</u>

Το παίγνιο δεν είναι επιλύσιμο με διαδοχική απαλοιφή ισχυρά ή ασθενών κυριαρχούμενων στρατηγικών. Ούτε απλοποιείται με την συγκεκριμένη μεθοδολογία.

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	0, 0	0, 1	1, 2
B_1	0, 2	1, 1	0, 0
Γ_1	1, 2	0, 1	0, 1

Παράδειγμα 3

- Έστω το σύνολο των παικτών $N = \{1,2,3\}$. Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη 1 είναι $X_1 = \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$, του παίκτη 2 είναι $X_2 = \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$ και του παίκτη 3 είναι $X_3 = \{A_3, B_3\}$.
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στους παρακάτω **πίνακες αποδόσεων.** (Ο παίκτης 1, επιλέγει γραμμές , ο παίκτης 2, επιλέγει στήλες, ο παίκτης 3 επιλέγει πίνακα).

Παράδειγμα 3

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	$2, 0, 0$	$0, 1, 0$	$1, 2, 1$
B_1	$0, 0, 2$	$-1, 1, 0$	$0, 0, 2$
Γ_1	$0, 2, 2$	$-1, 3, 1$	$-1, 1, 1$

A_3

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	$2, 3, 1$	$0, 4, 1$	$0, 3, 2$
B_1	$3, 1, 1$	$2, 2, 1$	$0, 0, 1$
Γ_1	$3, 1, 0$	$1, 2, 0$	$1, 1, 0$

B_3

Παράδειγμα 3

- Η συνάρτηση $b_1(x_2, x_3)$ της βέλτιστης στρατηγική του παίκτη 1 δεδομένων των στρατηγικών x_2, x_3των παικτών $2, 3$, $x_2 \in \{A_2, B_2, \Gamma_2\}$, $x_3 \in \{A_3, B_3\}$

παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

Παράδειγμα 3

x_2	x_3	$b_1(x_2, x_3)$
A_2	A_3	A_1
B_2	A_3	A_1
Γ_2	A_3	A_1
A_2	B_3	B_1, Γ_1
B_2	B_3	B_1
Γ_2	B_3	Γ_1

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	$2, 0, 0$	$0, 1, 0$	$1, 2, 1$
B_1	$0, 0, 2$	$-1, 1, 0$	$0, 0, 2$
Γ_1	$0, 2, 2$	$-1, 3, 1$	$-1, 1, 1$

A_3

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	$2, 3, 1$	$0, 4, 1$	$0, 3, 2$
B_1	$3, 1, 1$	$2, 2, 1$	$0, 0, 1$
Γ_1	$3, 1, 0$	$1, 2, 0$	$1, 1, 0$

B_3

Παράδειγμα 3

- Η συνάρτηση $b_2(x_1, x_3)$ της βέλτιστης στρατηγική του παίκτη 2 δεδομένων των στρατηγικών x_1, x_3των παικτών $1, 3,\ x_1 \in \{A_1, B_1, \Gamma_1\}$, $x_3 \in \{A_3, B_3\}$παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα.

Παράδειγμα 3

x_1	x_3	$b_2(x_1, x_3)$
A_1	A_3	Γ_2
B_1	A_3	B_2
Γ_1	A_3	B_2
A_1	B_3	B_2
B_1	B_3	B_2
Γ_1	B_3	B_2

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2, 0, 0	0, 1, 0	1, 2, 1
B_1	0, 0, 2	−1, 1, 0	0, 0, 2
Γ_1	0, 2, 2	−1, 3, 1	−1, 1, 1

A_3

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2, 3, 1	0, 4, 1	0, 3, 2
B_1	3, 1, 1	2, 2, 1	0, 0, 1
Γ_1	3, 1, 0	1, 2, 0	1, 1, 0

B_3

Παράδειγμα 3

x_2	x_3	$b_1(x_2, x_3)$
A_2	A_3	A_1
B_2	A_3	A_1
Γ_2	A_3	A_1
A_2	B_3	B_1, Γ_1
B_2	B_3	B_1
Γ_2	B_3	Γ_1

x_1	x_3	$b_2(x_1, x_3)$
A_1	A_3	Γ_2
B_1	A_3	B_2
Γ_1	A_3	B_2
A_1	B_3	B_2
B_1	B_3	B_2
Γ_1	B_3	B_2

- Από τους δύο πίνακες βλέπουμε ότι
  - $b_1(\Gamma_2, \mathrm{A}_3) = \mathrm{A}_1$ **και** $b_2(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_3) = \Gamma_2$
  - $b_1(\mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3) = \mathrm{B}_1$ **και** $b_2(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_3) = \mathrm{B}_2$

Παράδειγμα 3

- Επομένως αρκεί να βρούμε τις τιμές της βέλτιστης συνάρτησης $\boldsymbol{b_3}$ για τις πιθανές ισορροπίες Nash.
- Έχουμε: $\boldsymbol{b_3}(\mathbf{A_1}, \mathbf{\Gamma_2}) = \mathbf{B_3} \neq \boldsymbol{A_3}$
- Και $\boldsymbol{b_3}(\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}) = \mathbf{B_3}$

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2, 0, 0	0, 1, 0	1, 2, 1
B_1	0, 0, 2	−1, 1, 0	0, 0, 2
Γ_1	0, 2, 2	−1, 3, 1	−1, 1, 1

A_3

	A_2	B_2	Γ_2
A_1	2, 3, 1	0, 4, 1	0, 3, 2
B_1	3, 1, 1	2, 2, 1	0, 0, 1
Γ_1	3, 1, 0	1, 2, 0	1, 1, 0

B_3

Παράδειγμα 3

- Δηλαδή, στο παίγνιο αυτό υπάρχει μία ισορροπία κατά Nash η στρατηγική $(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3)$.

Παρατήρηση:

Το παίγνιο δεν επιλύεται με διαδοχική απαλοιφή ισχυρά ή ασθενών κυριαρχούμενων στρατηγικών.

Βιβλιογραφία

- Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα. www.kallipos.gr
- \- Αλιπράντης, Χ., Chakrabarti, S. (2004). Παίγνια και λήψη αποφάσεων. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Μαγείρου, Ε. (2012). Παίγνια και Αποφάσεις – Μια εισαγωγική προσέγγιση. Εκδόσεις Κριτική.
- Μηλολιδάκης, Κ. (2009). Θεωρία Παιγνίων – Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας. Εκδόσεις «Σοφία».