

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΚΑΙ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ *minimax*

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος

- **Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος** ονομάζεται το παίγνιο κατά το οποίο το άθροισμα όλων των αποδόσεων σε κάθε συνδυασμό στρατηγικών ισούται με 0.

Παίγνια Μηδενικού Αθροίσματος

- Σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος το κέρδος του ενός παίκτη ισούται με την ζημιά του άλλου ή των άλλων παικτών.
- Σε αντίθετη περίπτωση, το παίγνιο λέγεται παίγνιο μη μηδενικού αθροίσματος.

Παράδειγμα 1

- Έστω το σύνολο των δύο παικτών $N = \{A, B\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη A είναι $X_A = \{A_1, A_2\}$ και του παίκτη B είναι $X_B = \{B_1, B_2\}$.
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων**.

Πίνακας Πληρωμών

	B_1	B_2
A_1	$2, -2$	$-1, 1$
A_2	$4, -4$	$5, -5$

Πίνακας Πληρωμών

- Παρατηρούμε ότι το παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος. (Σε κάθε στρατηγική το κέρδος του παίκτη A είναι ίσο με την ζημιά του παίκτη B).
- Σε περιπτώσεις μηδενικού αθροίσματος μπορούμε να απλοποιήσουμε τον πίνακα ως εξής

	B ₁	B ₂
A ₁	2, -2	-1, 1
A ₂	4, -4	5, -5

Πίνακας Πληρωμών

- Ο διπλανός πίνακας ονομάζεται **πίνακας πληρωμών** και αναφέρεται στο κέρδος του παίκτη A (ή αντίστοιχα ζημία του παίκτη B) στο παίγνιο μηδενικού αθροίσματος.

	B₁	B₂
A₁	2	-1
A₂	4	5

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Παρατηρούμε ότι το καλύτερο στοιχείο του πίνακα για τον παίκτη A είναι το 5.
- Όμως αν ο A επιλέξει την στρατηγική A_2 προκειμένου να επιδιώξει κέρδος 5, ο B θα επιλέξει την B_1 ώστε να ελαχιστοποιήσει την ζημιά του.

	B_1	B_2
A_1	2	-1
A_2	4	5

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Αν δούμε τώρα τον πίνακα από την σκοπιά του B το καλύτερο στοιχείο είναι το -1 (κέρδος 1 για τον B, ζημιά 1 για τον A).
- Όμως αν ο B επιλέξει την στρατηγική B_2 ώστε να επιδιώξει κέρδος -1 τότε ο A θα επιλέξει την A_2 για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

	B_1	B_2
A_1	2	-1
A_2	4	5

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Επομένως η κατάλληλη στρατηγική για τον παίκτη Α είναι να επιλέξει από το ελάχιστο κάθε γραμμής, το μέγιστο (*maximin*), (αφού για οποιαδήποτε στρατηγική επιλέξει ο Α, τότε ο Β θα επιλέξει αυτή που ελαχιστοποιεί την ζημιά του).

	B_1	B_2	<i>min</i>
A_1	2	-1	-1
A_2	4	5	4
<i>maximin</i>			4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

	B_1	B_2	<i>min</i>
A_1	2	-1	-1
A_2	4	5	4
<i>maximin</i>			4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Αντίστοιχα η κατάλληλη στρατηγική για τον παίκτη B είναι να επιλέξει από το μέγιστο κάθε στήλης, το ελάχιστο (*minimax*), (αφού για οποιαδήποτε στρατηγική επιλέξει ο B, τότε ο A θα επιλέξει αυτή που μεγιστοποιεί το κέρδος του).

	B ₁	B ₂	<i>minimax</i>
A ₁	2	-1	
A ₂	4	5	
<i>max</i>	4	5	4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

	B_1	B_2	<i>minimax</i>
A_1	2	-1	
A_2	4	5	
<i>max</i>	4	5	4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Αν το *minimax* είναι ίσο με το *maximin*, δηλαδή στο παίγνιο ισχύει η σχέση

$$\mathit{minimax} = \mathit{maximin}$$

τότε υπάρχει σημείο ισορροπίας και προκύπτει αυτόματα και η τιμή του παιγνίου.

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

	B₁	B₂	<i>min</i>
A₁	2	-1	-1
A₂	4	5	4
<i>maximin</i>			4

	B₁	B₂	<i>minimax</i>
A₁	2	-1	
A₂	4	5	
<i>max</i>	4	5	4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Στο παράδειγμά μας το παίγνιο καταλήγει στη λήψης της απόφασης για τον παίκτη A να χρησιμοποιήσει την στρατηγική A_2 και για τον παίκτη B να ακολουθήσει την B_1 .
- Το σημείο (A_2, B_1) ονομάζεται σημείο ισορροπίας ή σημείο σάγγματος του παίγνιου.

	B_1	B_2	<i>min</i>
A_1	2	-1	-1
A_2	4	5	4
<i>maximin</i>			4

	B_1	B_2	<i>minimax</i>
A_1	2	-1	
A_2	4	5	
<i>max</i>	4	5	4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Οι παίκτες ακολουθούν αμιγή στρατηγική.
- Η τιμή του παιγνίου θα είναι $V = 4$ (κέρδος 4 μονάδες για τον παίκτη A και αντίστοιχα ζημιά 4 μονάδες για τον παίκτη B).

	B ₁	B ₂	<i>min</i>
A ₁	2	-1	-1
A ₂	4	5	4
<i>maximin</i>			4

	B ₁	B ₂	<i>minimax</i>
A ₁	2	-1	
A ₂	4	5	
<i>max</i>	4	5	4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Βέβαια δεν υπάρχει σε κάθε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος σημείο ισορροπίας (π.χ. αν $\text{minimax} \neq \text{maximin}$)
- Στην περίπτωση αυτή οι παίκτες αναγκάζονται να ακολουθούν μίγμα στρατηγικών.

Παίγνια Σταθερού Αθροίσματος

- **Παίγνιο σταθερού αθροίσματος** ονομάζεται το παίγνιο κατά το οποίο το άθροισμα όλων των αποδόσεων σε κάθε συνδυασμό στρατηγικών ισούται με έναν σταθερό αριθμό c .
- Τα παίγνια σταθερού αθροίσματος αποτελούν γενίκευση των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος.

Παράδειγμα 2

- Έστω το σύνολο των δύο παικτών $N = \{A, B\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη A είναι $X_A = \{A_1, A_2\}$ και του παίκτη B είναι $X_B = \{B_1, B_2\}$.
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω **πίνακα αποδόσεων**.

Παράδειγμα 2

	B_1	B_2
A_1	2, 3	1, 4
A_2	4, 1	5, 0

Πίνακας Πληρωμών

- Παρατηρούμε ότι το παίγνιο είναι σταθερού αθροίσματος. (Σε κάθε στρατηγική το άθροισμα των αποδόσεων των δύο παικτών είναι ίσο με 5).
- Σε περιπτώσεις σταθερού αθροίσματος μπορούμε να απλοποιήσουμε τον πίνακα ως εξής

	B ₁	B ₂
A ₁	2, 3	1, 4
A ₂	4, 1	5, 0

Πίνακας Πληρωμών

- Ο διπλανός πίνακας ονομάζεται **πίνακας πληρωμών** και αναφέρεται στο κέρδος του παίκτη A στο παίγνιο σταθερού αθροίσματος.

	B_1	B_2
A_1	2	1
A_2	4	5

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Παρατηρούμε ότι το καλύτερο στοιχείο του πίνακα για τον παίκτη A είναι το 5.
- Όμως αν ο A επιλέξει την στρατηγική A_2 προκειμένου να επιδιώξει κέρδος 5, ο B θα επιλέξει την B_1 ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

	B_1	B_2
A_1	2	1
A_2	4	5

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Αν δούμε τώρα τον πίνακα από την σκοπιά του B το καλύτερο στοιχείο είναι το 4 (κέρδος 4 για τον B, κέρδος 1 για τον A).
- Όμως αν ο B επιλέξει την στρατηγική **B₂** ώστε να επιδιώξει κέρδος -4 τότε ο A θα επιλέξει την **A₂** για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

	B₁	B₂
A₁	2	1
A₂	4	5

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Επομένως η κατάλληλη στρατηγική για τον παίκτη Α είναι να επιλέξει από το ελάχιστο κάθε γραμμής, το μέγιστο (*maximin*), (αφού για οποιαδήποτε στρατηγική επιλέξει ο Α, τότε ο Β θα επιλέξει αυτή που ελαχιστοποιεί την ζημιά του).

	B_1	B_2	<i>min</i>
A_1	2	1	1
A_2	4	5	4
<i>maximin</i>			4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

	B_1	B_2	<i>min</i>
A_1	2	1	1
A_2	4	5	4
<i>maximin</i>			4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Αντίστοιχα η κατάλληλη στρατηγική για τον παίκτη B είναι να επιλέξει από το μέγιστο κάθε στήλης, το ελάχιστο (*minimax*), (αφού για οποιαδήποτε στρατηγική επιλέξει ο B, τότε ο A θα επιλέξει αυτή που μεγιστοποιεί το κέρδος του).

	B ₁	B ₂	<i>minimax</i>
A ₁	2	1	
A ₂	4	5	
<i>max</i>	4	5	4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

	B₁	B₂	<i>minimax</i>
A₁	2	1	
A₂	4	5	
<i>max</i>	4	5	4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Αν το *minimax* είναι ίσο με το *maximin*, δηλαδή στο παίγνιο ισχύει η σχέση

$$\mathit{minimax} = \mathit{maximin}$$

τότε υπάρχει σημείο ισορροπίας και προκύπτει αυτόματα και η τιμή του παιγνίου.

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

	B ₁	B ₂	<i>min</i>
A ₁	2	1	1
A ₂	4	5	4
<i>maximin</i>			4

	B ₁	B ₂	<i>minimax</i>
A ₁	2	1	
A ₂	4	5	
<i>max</i>	4	5	4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Οι παίκτες ακολουθούν αμιγή στρατηγική.
- Η τιμή του παιγνίου θα είναι $V = 4$ (κέρδος 4 μονάδες για τον παίκτη A και αντίστοιχα κέρδος 1 μονάδα για τον παίκτη B).

	B ₁	B ₂	<i>min</i>
A ₁	2	1	1
A ₂	4	5	4
<i>maximin</i>			4

A₁ A₂ *max*

	B ₁	B ₂	<i>minimax</i>
A ₁	2	1	
A ₂	4	5	
	4	5	4

Στρατηγική *minimax* και *maximin*

- Βέβαια δεν υπάρχει σε κάθε παίγνιο σταθερού αθροίσματος σημείο ισορροπίας (π.χ. αν *minimax* $\neq$ *maximin*).
- Στην περίπτωση αυτή οι παίκτες αναγκάζονται να ακολουθούν μίγμα στρατηγικών.

Άσκηση

- Έστω το σύνολο των δύο παικτών $N = \{A, B\}$.
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη A είναι $X_A = \{A_1, A_2, A_3\}$ και του παίκτη B είναι $X_B = \{B_1, B_2, B_3\}$.
- Γνωρίζουμε ότι το παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος και δίνεται ο παρακάτω πίνακας πληρωμών που αναφέρεται στο κέρδος του παίκτη A.

Άσκηση

	B₁	B₂	B₃
A₁	4	4	10
A₂	2	3	1
A₃	6	5	7

Άσκηση

A. Ποιο είναι το μεγαλύτερο κέρδος που μπορεί να έχει ο παίκτης A;

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	4	10
A_2	2	3	1
A_3	6	5	7

Άσκηση

B. Στην περίπτωση που ο παίκτης Α επέλεγε την στρατηγική για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του ποια στρατηγική αναμένεται να επιλέξει ο παίκτης Β;

	B₁	B₂	B₃
A₁	4	4	10
A₂	2	3	1
A₃	6	5	7

Άσκηση

C. Ποια είναι η μικρότερη ζημία που μπορεί να έχει ο παίκτης B; Στην περίπτωση που ο παίκτης B επέλεγε την στρατηγική για να ελαχιστοποιήσει τη ζημία του ποια στρατηγική αναμένεται να επιλέξει ο παίκτης A;

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	4	10
A_2	2	3	1
A_3	6	5	7

Άσκηση

D. Να βρείτε εφόσον υπάρχει σημείο σάγγματος του παίγνιου. Ποια είναι η απόδοση του κάθε παίκτη στην περίπτωση αυτή;

E. Αποτελεί το σημείο σάγγματος σημείο ισορροπίας Nash; Αιτιολογείστε.

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	4	10
A_2	2	3	1
A_3	6	5	7

Βιβλιογραφία

- Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα. www.kallipos.gr
- - Αλιπράντης, Χ., Chakrabarti, S. (2004). Παίγνια και λήψη αποφάσεων. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Μαγείρου, Ε. (2012). Παίγνια και Αποφάσεις – Μια εισαγωγική προσέγγιση. Εκδόσεις Κριτική.
- Μηλολιδάκης, Κ. (2009). Θεωρία Παιγνίων – Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας. Εκδόσεις «Σοφία».