

Ειδικά Θέματα Θεωρίας Παιγνίων

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

Ειδικά Θέματα στην Θεωρία Παιγνίων

- Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια παίγνια τα οποία είναι χαρακτηριστικά της Θεωρίας Παιγνίων
- Τα παίγνια αυτά επικεντρώνονται σε θέματα των μη συνεργατικών παιγνίων πλήρους πληροφόρησης, της ισορροπίας Nash και της βέλτιστης κατά Pareto Στρατηγικής.

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Δύο άτομα συλλαμβάνονται ως ύποπτα για ένα παράπτωμα.
- Η αστυνομία δεν έχει επαρκή στοιχεία για να τα καταδικάσει, εκτός εάν τουλάχιστον ένα άτομο ομολογήσει.



1. Δίλημμα Φυλακισμένου

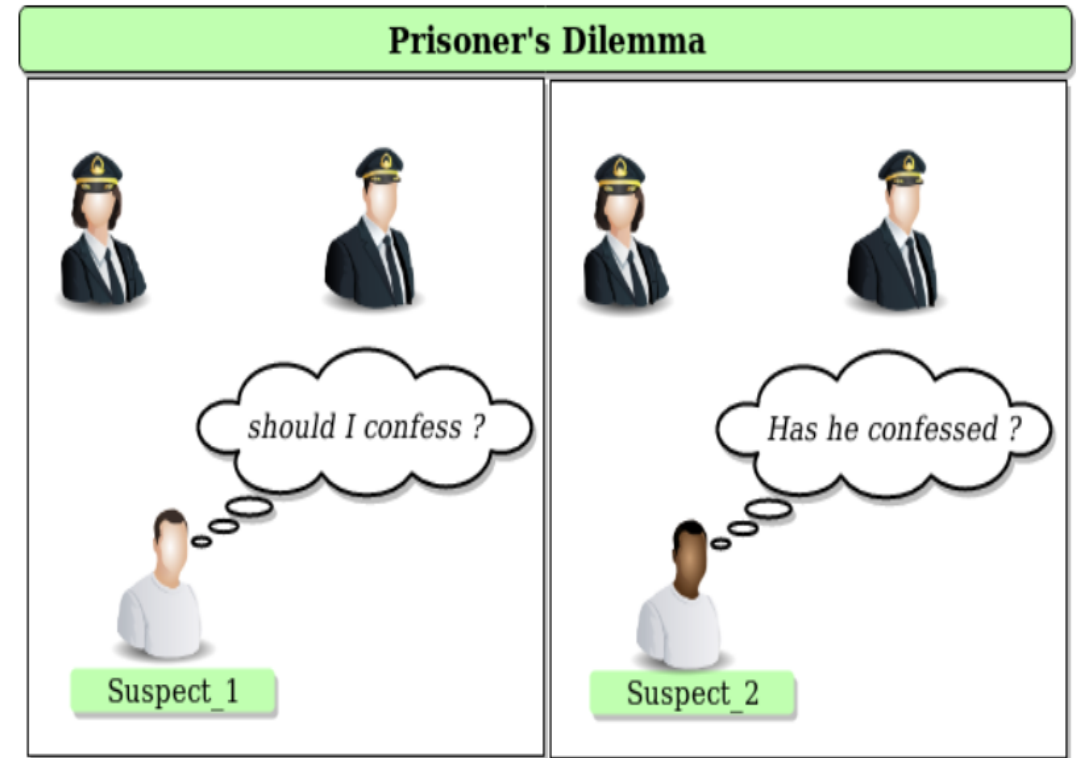
- Η αστυνομία κρατάει τους δύο ύποπτους σε χωριστά κελιά και τους ανακοινώνει τα εξής:
- Εάν και οι δύο καταθέσουν εναντίον του άλλου, τότε θα καταδικαστούν σε 6 χρόνια φυλάκισης ο κάθε ένας.

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Αν κανένας δεν ομολογήσει τότε θα καταδικαστούν από 1 χρόνο ο κάθε ένας, λόγω αμφιβολιών.
- Τέλος αν μόνο ένας από τους δύο καταθέσει εναντίον του άλλου, τότε αυτός που ομολόγησε θα αφεθεί ελεύθερος και ο άλλος θα καταδικαστεί για 9 χρόνια φυλάκισης.

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Οι στρατηγικές του κάθε ενός «παίκτη» είναι δύο: Να καταθέσει εναντίον του άλλου **(Κ)** ή να παραμείνει σιωπηλός **(Σ)**.



1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Θεωρώντας ως ζημιά για τον κάθε παίχτη τα χρόνια της ποινής φυλάκισης, ο πίνακας αποδόσεων φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.



1. Δίλημμα Φυλακισμένου

	Σ_2	K_2
Σ_1	$-1, -1$	$-9, 0$
K_1	$0, -9$	$-6, -6$

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Το παίγνιο είναι επιλύσιμο με Διαδοχική Απαλοιφή αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών:
 - Απλοποιείται η Σ_1 γιατί είναι αυστηρά κυριαρχούμενη της K_1
 - Απλοποιείται η Σ_2 γιατί είναι αυστηρά κυριαρχούμενη της K_2
 - Άρα (K_1, K_2) η λύση του παίγνιου.

	Σ_2	K_2
Σ_1	-1, -1	-9, 0
K_1	0, -9	-6, -6

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Το παίγνιο αυτό έχει μία ισορροπία Nash , την επιλογή στρατηγικής και οι δύο παίκτες να καταθέσουν ο ένας εναντίον του άλλου (K_1, K_2) .

	Σ_2	K_2
Σ_1	-1, -1	-9, 0
K_1	0, -9	-6, -6

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Παρατηρείστε όμως ότι η στρατηγική (Σ_1, Σ_2) δίνει καλύτερες αποδόσεις και για τους δύο «παίκτες» από ότι η στρατηγική (K_1, K_2) .

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η (Σ_1, Σ_2) κυριαρχεί κατά Pareto από την στρατηγική (K_1, K_2) .
- Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι αν οι «παίκτες» είχαν συνεννοηθεί ή συνεργαστεί η στρατηγική (Σ_1, Σ_2) θα ήταν αυτή που θα τους ωφελούσε.

	Σ_2	K_2
Σ_1	-1, -1	-9, 0
K_1	0, -9	-6, -6

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Το ζεύγος όμως (Σ_1, Σ_2) δεν είναι ισορροπία Nash.
- Αν ένας παίκτης σιωπήσει, η βέλτιστη αντίδραση του άλλου είναι να ομολογήσει.

	Σ_2	K_2
Σ_1	-1, -1	-9, 0
K_1	0, -9	-6, -6

1. Δίλημμα Φυλακισμένου

- Τέτοιου είδους παίγνια των οποίων οι ισορροπίες Nash είναι μη αποτελεσματικές κατά Pareto συναντιούνται πολύ συχνά στην οικονομική ανάλυση, στην θεωρία του ολιγοπωλίου, σε παίγνια παροχής δημόσιων αγαθών κλπ.

Κυρίαρχη Στρατηγική Κατά Pareto

Ορισμός

Μια στρατηγική $s^{(1)}$ λέμε ότι **κυριαρχεί κατά Pareto** της $s^{(2)}$ αν και μόνο αν για κάθε παίκτη i

$$u_i(s^{(1)}) \geq u_i(s^{(2)})$$

Δηλαδή για κάθε παίκτη η απόδοση που δίνει η στρατηγική $s^{(1)}$ είναι μεγαλύτερη ή ίση της απόδοσης που δίνει η στρατηγική $s^{(2)}$.

Βέλτιστη Στρατηγική Κατά Pareto

Ορισμός

Μια στρατηγική $s^{(*)}$ λέμε ότι είναι **Pareto βέλτιστη** αν και μόνο αν δεν υπάρχει στρατηγική s διαφορετική της $s^{(*)}$ η οποία κυριαρχεί της $s^{(*)}$ κατά **Pareto**.

- Δηλαδή ένα σημείο είναι **Pareto βέλτιστο** αν και μόνο αν κανείς παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει το κέρδος του χωρίς να ελαττώσει το κέρδος κάποιου άλλου παίκτη.

Βέλτιστη Στρατηγική Κατά Pareto

- Στο προηγούμενο παράδειγμα, στο δίλημμα του φυλακισμένου η στρατηγική (Σ_1, Σ_2) κυριαρχεί κατά Pareto από την στρατηγική (K_1, K_2) αφού

$$u_1(\Sigma_1, \Sigma_2) = -1 > u_1(K_1, K_2) = -6$$

$$u_2(\Sigma_1, \Sigma_2) = -1 > u_2(K_1, K_2) = -6$$

	Σ_2	K_2
Σ_1	-1, -1	-9, 0
K_1	0, -9	-6, -6

Βέλτιστη Στρατηγική Κατά Pareto

- Επιπλέον η στρατηγική (Σ_1, Σ_2) είναι βέλτιστη κατά Pareto αφού δεν υπάρχει στρατηγική s η οποία κυριαρχεί της (Σ_1, Σ_2) κατά **Pareto**.
- Άλλες στρατηγικές που είναι βέλτιστες κατά Pareto είναι οι στρατηγικές (Σ_1, K_2) και (K_1, Σ_2)

	Σ_2	K_2
Σ_1	-1, -1	-9, 0
K_1	0, -9	-6, -6

Nash Equilibrium – Pareto Optimality

Παρατηρήσεις

- Ισορροπία Nash στο δίλημμα του φυλακισμένου αποτελεί η στρατηγική (K_1, K_2) η οποία δεν είναι βέλτιστη κατά Pareto στρατηγική.

	Σ_2	K_2
Σ_1	-1, -1	-9, 0
K_1	0, -9	-6, -6

Nash Equilibrium – Pareto Optimality

Παρατηρήσεις

- Όλες οι άλλες στρατηγικές είναι βέλτιστες κατά Pareto , δεν είναι όμως σημεία Ισορροπίας Nash.
- Συνεπώς μια βέλτιστη κατά Pareto στρατηγική δεν αποτελεί κατά ανάγκη και ισορροπία Nash και αντίστροφα.

	Σ_2	K_2
Σ_1	-1, -1	-9, 0
K_1	0, -9	-6, -6

2. Κυνήγι

- Δύο κυνηγοί, ο κυνηγός 1 και ο κυνηγός 2 έχουν την επιλογή είτε να κυνηγήσουν από κοινού ένα ελάφι είτε να κυνηγήσει ο καθένας μόνο του ένα πιο μικρό θήραμα όπως είναι ο λαγός.
- Η πρώτη επιλογή απαιτεί την συνεργασία των δύο κυνηγών, ενώ για την δεύτερη επιλογή δεν χρειάζεται συνεργασία.



2. Κυνήγι

- Η αξία του ελαφιού είναι σαφώς μεγαλύτερη από την αξία του λαγού.
- Παρακάτω βλέπουμε τον πίνακα αποδόσεων για το παραπάνω παίγνιο.



2. Κυνήγι

	E_2	Λ_2
E_1	7, 7	0, 3
Λ_1	3, 0	3, 3

2. Κυνήγι

- Το παίγνιο αυτό δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.
- Το παίγνιο έχει βέλτιστη κατά Pareto στρατηγική την (E_1, E_2) .
- Στο παίγνιο υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας Nash. Οι στρατηγικές (E_1, E_2) και (Λ_1, Λ_2)

	E_2	Λ_2
E_1	7, 7	0, 3
Λ_1	3, 0	3, 3

2. Κυνήγι

- Το κυνήγι αποτελεί μία περίπτωση παιγνίου καθαρού συντονισμού. Οι παίκτες προτιμούν να διαλέξουν όμοιες και όχι διαφορετικές στρατηγικές.
- Η στρατηγική (E_1, E_2) επιπλέον κυριαρχεί και κατά Pareto επί της (Λ_1, Λ_2) .



2. Κυνήγι

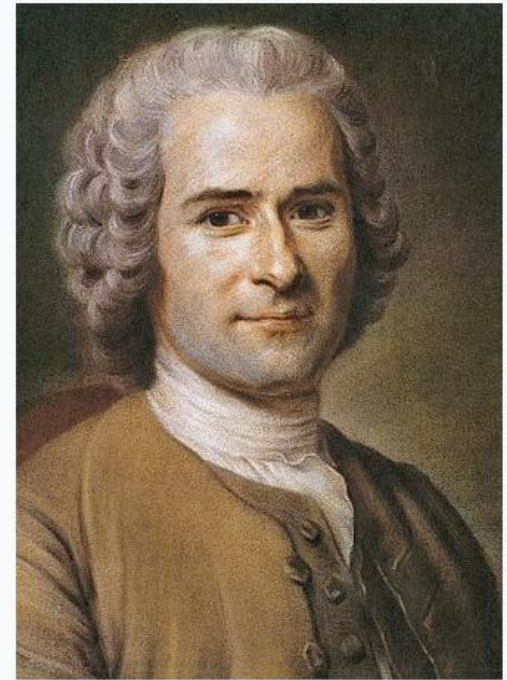
- Παρόλα αυτά η στρατηγική (Λ_1, Λ_2) εμπεριέχει χαμηλότερο ρίσκο. Μία ενδεχόμενη αποτυχία συντονισμού αφήνει την απόδοση του ενός από τους δύο παίκτες ανεπηρέαστη, σε αντίθεση με την στρατηγική (E_1, E_2) όπου σε πιθανή αποτυχία συντονισμού χάνουν και οι δύο παίκτες.

	E_2	Λ_2
E_1	7, 7	0, 3
Λ_1	3, 0	3, 3

2. Κυνήγι

- Το παίγνιο των κυνηγών παρουσιάστηκε πρώτη φορά από τον φιλόσοφο Jean-Jacques-Rousseau (1712 – 1778) στο βιβλίο του «Το Κοινωνικό Συμβόλαιο» το 1762 χωρίς ο ίδιος να κάνει χρήση της θεωρίας παιγνίων.

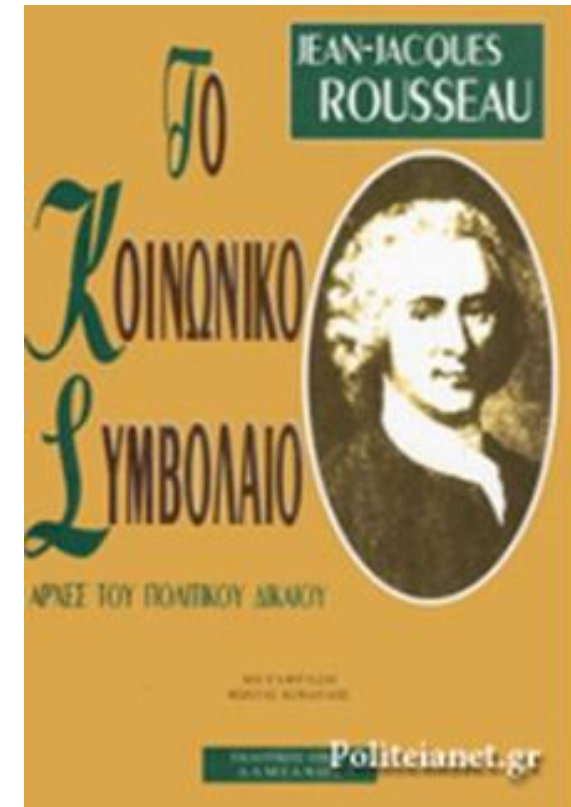
Jean-Jacques Rousseau



1753 portrait

2. Κυνήγι

- Το παίγνιο του κυνηγού αποτελεί ένα τυπικό παράδειγμα επιλογής μιας στρατηγικής χαμηλού ρίσκου (κυνήγι λαγού) και μιας πιο προσοδοφόρου στρατηγικής (κυνήγι ελαφιού), η οποία όμως απαιτεί την συνεργασία των παικτών.



3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Δύο άτομα ο Άρης (**A**) και η Βαλέρια (**B**) κανονίζουν την βραδινή τους έξοδο.
- Μπορούν να επιλέξουν μεταξύ μιας χορευτικής παράστασης Tango (T) και ενός αγώνα μπάσκετ (M).

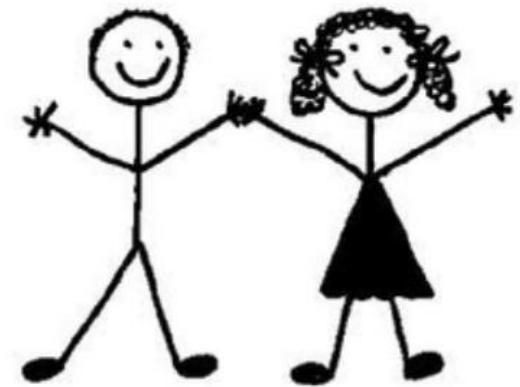
Battle of the Sexes



3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Η Βαλέρια προτιμάει την χορευτική παράσταση και ο Άρης τον αγώνα μπάσκετ.
- Και οι δύο όμως προτιμούν να επιλέξουν από κοινού μία δραστηριότητα.

Battle of the Sexes



3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Προκειμένου να αποφασίσουν πώς θα περάσουν τελικά το βράδυ, οι δύο παίκτες θα καταγράψουν σε ένα χαρτί την επιλογή τους κρυφά ο ένας από τον άλλο.



3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας αποδόσεων του παίγνιου.

		Βαλέρια	
		T	M
Άρης	T	1, 2	0, 0
	M	0, 0	2, 1

3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Το παίγνιο αυτό δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.
- Το παίγνιο έχει βέλτιστες κατά Pareto στρατηγικές τις (T_1, T_2) και (M_1, M_2) .

		Βαλέρια	
		T	M
Άρης	T	1, 2	0, 0
	M	0, 0	2, 1

3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Στο παίγνιο υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας Nash. Είτε επιλέγουν και οι δύο παίκτες την παράσταση Tango, είτε τον αγώνα μπάσκετ.
- Δηλαδή οι βέλτιστες κατά Pareto στρατηγικές αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash.

		Βαλέρια	
		T	M
Άρης	T	1, 2	0, 0
	M	0, 0	2, 1

3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Το παίγνιο αυτό είναι ένα παράδειγμα παίγνιου συντονισμού, δηλαδή ενός παίγνιου στο οποίο οι παίκτες προτιμούν να επιλέξουν, να συντονιστούν σε όμοιες στρατηγικές.

		Βαλέρια	
		T	M
Άρης	T	1, 2	0, 0
	M	0, 0	2, 1

3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Παρόλα αυτά στο παίγνιο υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας. Είτε επιλέγουν και οι δύο παίκτες την παράσταση Tango, είτε τον αγώνα μπάσκετ.

		Βαλέρια	
		T	M
Άρης	T	1, 2	0, 0
	M	0, 0	2, 1

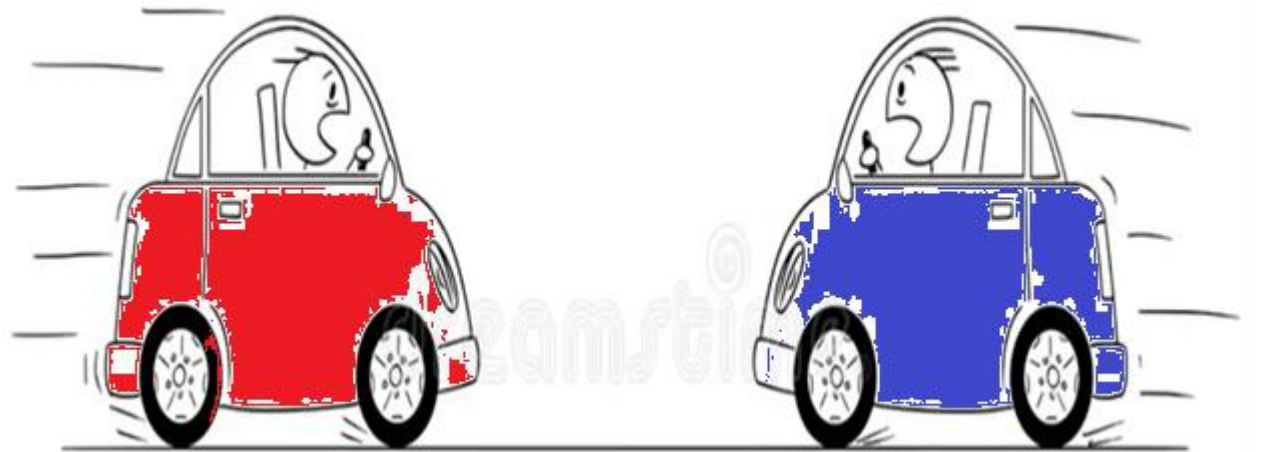
3. Η Μάχη των δύο Φύλων

- Το δυνητικό πρόβλημα είναι ότι οι παίκτες ενδέχεται να αποτύχουν στον μεταξύ τους συντονισμό, επιλέγοντας ανόμοιες στρατηγικές, το οποίο θα είναι και επιλογή με την μικρότερη απόδοση και για τους δύο.

		Βαλέρια	
		T	M
Άρης	T	1, 2	0, 0
	M	0, 0	2, 1

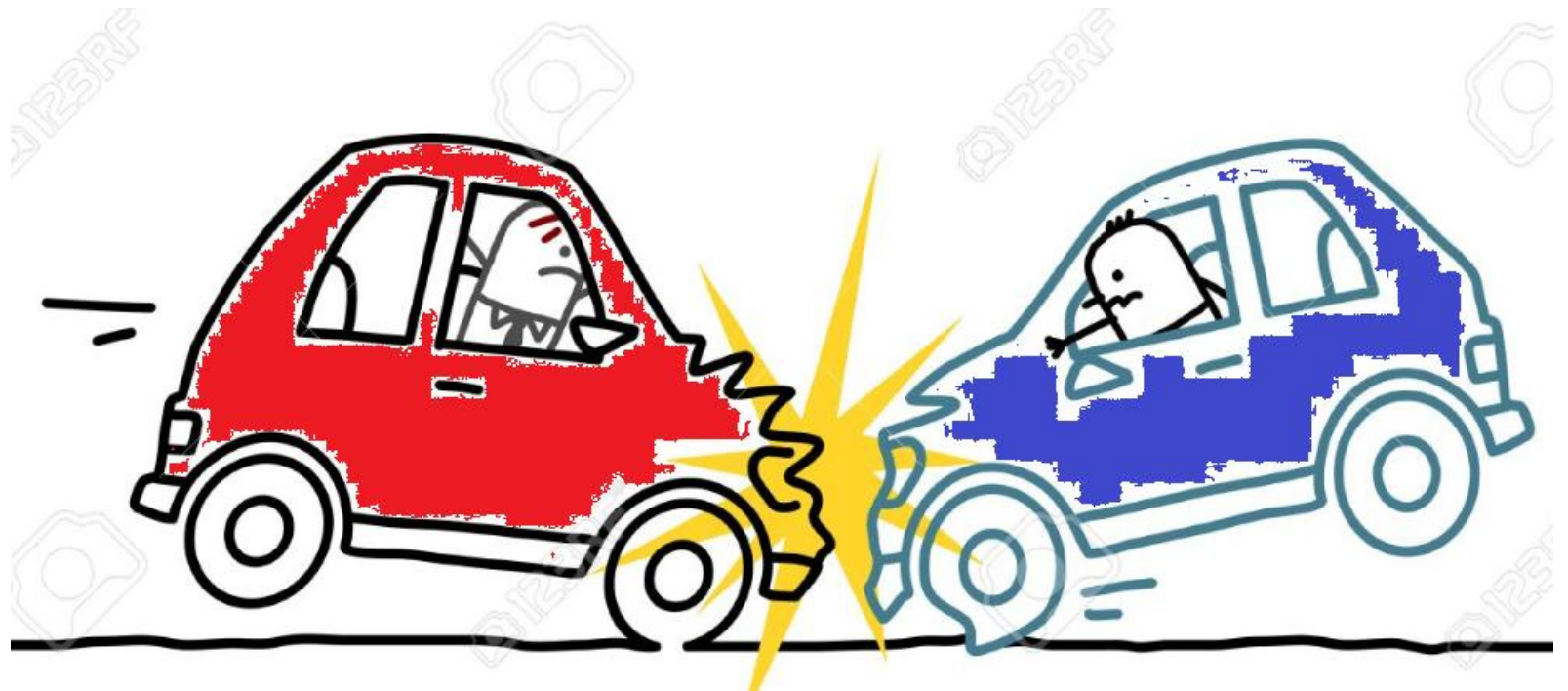
4. Παιχνίδι Θάρρους

- Δύο οδηγοί, ο A , και ο B συμμετέχουν σε ένα παιχνίδι θάρρους.
- Οδηγούν τα αυτοκίνητά τους σε πορεία μετωπικής σύγκρουσης, έχοντας ως επιλογή να αλλάξουν κατεύθυνση λίγο πριν τη σύγκρουση.



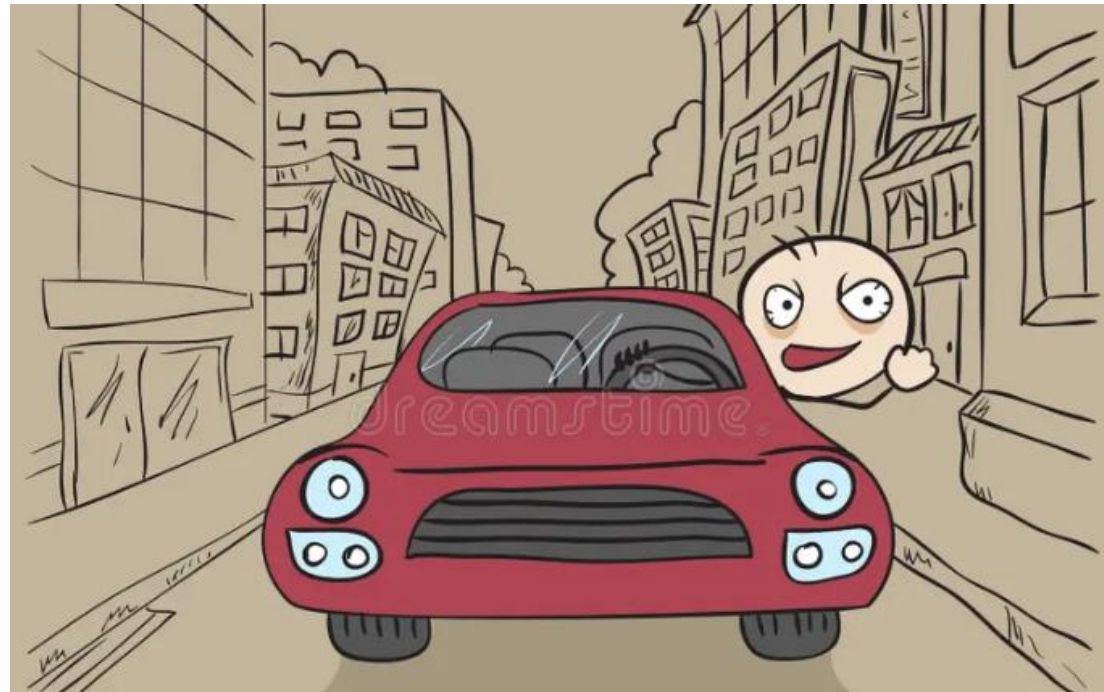
4. Παιχνίδι Θάρρους

- Αν κανένας δεν αλλάξει κατεύθυνση, τότε χάνουν και οι δύο γιατί θα επέλθει σύγκρουση



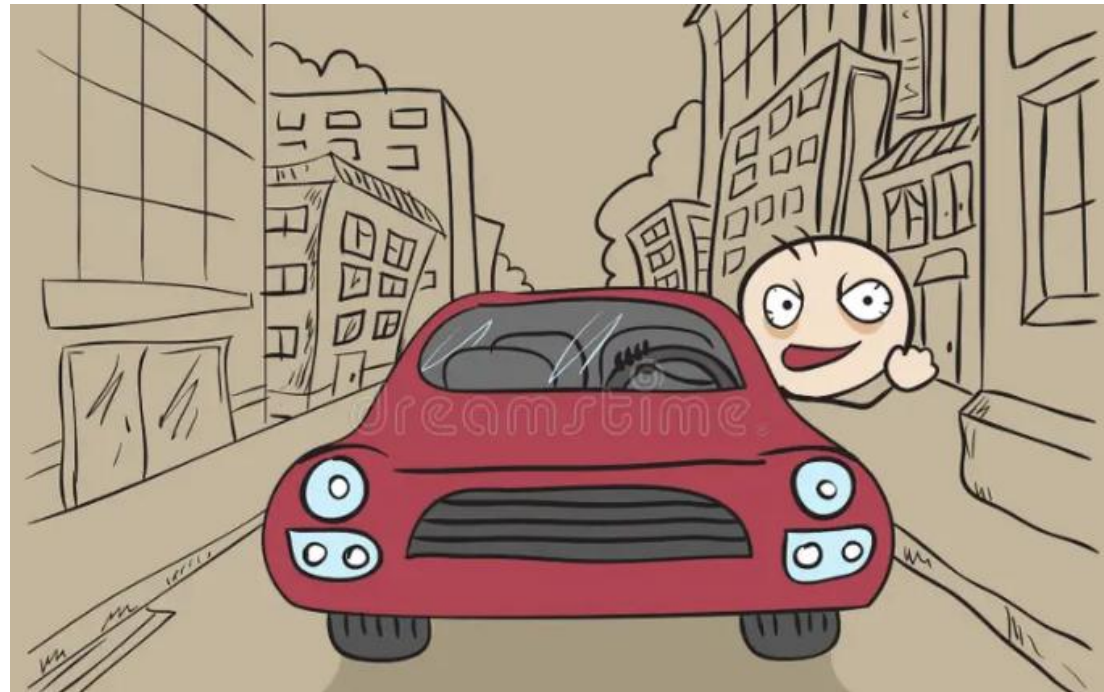
4. Παιχνίδι Θάρρους

- Αν μόνο ο ένας από τους δύο αλλάξει κατεύθυνση, τότε ο ίδιος χάνει γιατί θα θεωρηθεί δειλός, ενώ ο άλλος κερδίζει γιατί θα θεωρηθεί θαρραλέος.



4. Παιχνίδι Θάρρους

- Κάθε οδηγός έχει δύο στρατηγικές.
 - Να παραμείνει στην **ευθεία** πορεία της σύγκρουσης μέχρι τέλους **(Ε)** ή
 - Να **στρίψει** την τελευταία στιγμή **(Σ)**.



4. Παιχνίδι Θάρρους

- Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας αποδόσεων του παίγνιου.

	E_2	Σ_2
E_1	$-10, -10$	$5, -5$
Σ_1	$-5, 5$	$0, 0$

4. Παιχνίδι Θάρρους

- Το παίγνιο αυτό δεν έχει κυρίαρχες στρατηγικές.
- Το παίγνιο έχει βέλτιστες κατά Pareto στρατηγικές τις (E_1, Σ_2) , (Σ_1, E_2) και (Σ_1, Σ_2)

	E_2	Σ_2
E_1	$-10, -10$	$5, -5$
Σ_1	$-5, 5$	$0, 0$

4. Παιχνίδι Θάρρους

- Στο παίγνιο υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας Nash. (E_1, Σ_2) , (Σ_1, E_2) .
- Σε κάθε μία από αυτές ο ένας οδηγός στρίβει και ο άλλος παραμένει σταθερός στην πορεία του.

	E_2	Σ_2
E_1	$-10, -10$	$5, -5$
Σ_1	$-5, 5$	$0, 0$

4. Παιχνίδι Θάρρους

- Τα σημεία ισορροπίας Nash βέλτιστες αποτελούν και κατά Pareto στρατηγικές.

	E_2	Σ_2
E_1	$-10, -10$	$5, -5$
Σ_1	$-5, 5$	$0, 0$

4. Παιχνίδι Θάρρους

- Παρατηρείστε ότι σε κάθε ισορροπία οι παίκτες επιλέγουν διαφορετικές στρατηγικές, (ο ένας στρίβει και ο άλλος παραμένει στην ευθεία της σύγκρουσης).

	E_2	Σ_2
E_1	$-10, -10$	$5, -5$
Σ_1	$-5, 5$	$0, 0$

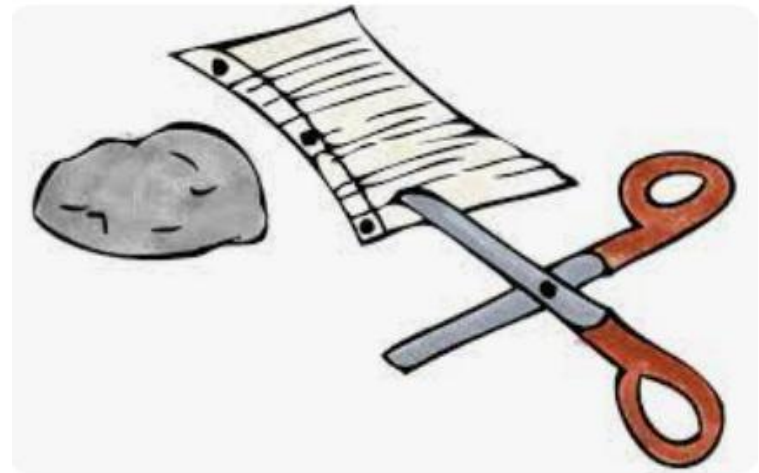
4. Παιχνίδι Θάρρους

- Το παίγνιο αυτό είναι ένα παράδειγμα παίγνιου **αντι – συντονισμού**. Η επιλογή όμοιων στρατηγικών επιφέρει κόστος και όχι όφελος.

	E_2	Σ_2
E_1	$-10, -10$	$5, -5$
Σ_1	$-5, 5$	$0, 0$

5. Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

- Οι παίκτες A, B παίζουν το γνωστό παιγνίδι πέτρα (Π) – ψαλίδι (Ψ) – χαρτί (Χ). (Η πέτρα νικάει το ψαλίδι, το ψαλίδι νικάει το χαρτί, το χαρτί νικάει την πέτρα. Οι δύο παίκτες ανακοινώνουν ταυτόχρονα την επιλογή τους).



5. Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

- Οι αμοιβές των παικτών είναι: 1 σε περίπτωση νίκης, – 1 σε περίπτωση ήττας και 0 σε περίπτωση ισοπαλίας.



5. Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

- Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας αποδόσεων του παίγνιου.

	Π	Ψ	Χ
Π	0, 0	1, -1	-1, 1
Ψ	-1, 1	0, 0	1, -1
Χ	1, -1	-1, 1	0, 0

5. Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

- Το παίγνιο αυτό είναι παίγνιο μηδενικού αθροίσματος.
- Στο παίγνιο αυτό ισχύει $\text{maximin} \neq \text{minimax}$
- Το παίγνιο αυτό δεν έχει αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές.

	Π	Ψ	Χ
Π	0, 0	1, -1	-1, 1
Ψ	-1, 1	0, 0	1, -1
Χ	1, -1	-1, 1	0, 0

5. Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

- Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι το παίγνιο αυτό δεν έχει ισορροπία.
- Για κάθε ζεύγος στρατηγικών υπάρχει κίνητρο σε τουλάχιστον ένα παίκτη να αλλάξει την επιλογή του.

	Π	Ψ	Χ
Π	0, 0	1, -1	-1, 1
Ψ	-1, 1	0, 0	1, -1
Χ	1, -1	-1, 1	0, 0

5. Πέτρα – Ψαλίδι – Χαρτί

- Το παίγνιο αυτό είναι παράδειγμα παίγνιου χωρίς ισορροπία Nash (με καθαρές στρατηγικές).
- Επιπλέον στο παίγνιο όλες οι στρατηγικές είναι βέλτιστες κατά Pareto στρατηγικές.

	Π	Ψ	Χ
Π	0, 0	1, -1	-1, 1
Ψ	-1, 1	0, 0	1, -1
Χ	1, -1	-1, 1	0, 0

Προτεινόμενα Διδακτικά Βίντεο

- https://youtu.be/17o8CleXV2Y?si=_g3pHun_-Y1kjGcG
- <https://youtu.be/LDxOgGd9yEg?si=uzEOapyLXB2xnwtr>
- <https://youtu.be/yb6SuLhQAY8?si=3T3uMZwE4e9WDIBQ>

Βιβλιογραφία

- Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα. www.kallipos.gr
- Αλιπράντης, Χ., Chakrabarti, S. (2004). Παίγνια και λήψη αποφάσεων. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Μαγείρου, Ε. (2012). Παίγνια και Αποφάσεις – Μια εισαγωγική προσέγγιση. Εκδόσεις Κριτική.
- Μηλολιδάκης, Κ. (2009). Θεωρία Παιγνίων – Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας. Εκδόσεις «Σοφία».

Εικονογραφία

- Από το διαδίκτυο