

# ΜΕΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ – Ισορροπία Nash

---

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

ΔΙΔΑΣΚΟΥΣΑ: Δ. ΚΟΥΛΟΥΜΠΟΥ

# Μικτές Στρατηγικές

---

- Στα παραδείγματα που έχουμε αναφερθεί έως τώρα οι παίκτες αποφασίζουν στρατηγική με τρόπο ντετερμινιστικό.
- Θα επεκτείνουμε στην ενότητα αυτή την έννοια της στρατηγικής επιτρέποντας στους παίκτες να επιλέγουν στρατηγικές με στοχαστικό τρόπο.

# Μεικτές Στρατηγικές

---

- Σε τέτοιες περιπτώσεις μια στρατηγική ενός παίκτη είναι μια κατανομή πιθανότητας με δειγματικό χώρο το σύνολο των δυνατών στρατηγικών του.
- Αυτού του είδους οι στρατηγικές ονομάζονται **μεικτές στρατηγικές**.

# Μεικτές Στρατηγικές

---

- Έστω για παράδειγμα ο παίκτης 1 διαθέτει το σύνολο καθαρών στρατηγικών  $X_1 = \{A_1, B_1\}$
- Αν ο παίκτης διαλέγει την στρατηγική  $A_1$  με πιθανότητα  $p$  και τη στρατηγική  $B_1$  με πιθανότητα  $1 - p$ , τότε λέμε ότι **το διάνυσμα  $(p, 1 - p)$  είναι η μεικτή στρατηγική του παίκτη 1 για τις στρατηγικές του  $A_1, B_1$  αντίστοιχα.**

# Μεικτές Στρατηγικές

---

- Αν για παράδειγμα  $p = \frac{1}{3}$  τότε η μικτή στρατηγική του παίκτη 1 είναι το διάνυσμα  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

# Παράδειγμα 1

---

- Δύο παίκτες οι 1,2 ανακοινώνουν ταυτόχρονα μία από τις δύο λέξεις. **«Κόκκινο»** ή **«Μαύρο»**.
- Αν οι ανακοινώσεις είναι ίδιες ο παίκτης 1 πληρώνει 1€ στον παίκτη 2.
- Αν οι ανακοινώσεις είναι διαφορετικές ο παίκτης 2 πληρώνει 1€ στον παίκτη 1.

# Παράδειγμα 1

---

■ Θεωρούμε τις εξής μεικτές στρατηγικές:

➤ Παίκτης 1:  $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ .

Δηλαδή ο παίκτης 1 επιλέγει «**Κόκκινο**» με πιθανότητα  $\frac{3}{4}$  και «**Μαύρο**» με πιθανότητα  $\frac{1}{4}$ .

# Παράδειγμα 1

---

➤ Παίκτης 2:  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

Δηλαδή ο παίκτης 2 επιλέγει **«Κόκκινο»** με πιθανότητα  $\frac{1}{3}$  και **«Μαύρο»** με πιθανότητα  $\frac{2}{3}$ .

# Παράδειγμα 1

---

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε σε πίνακα την αναπαράσταση του παίγνιου με μεικτές στρατηγικές.

# Παράδειγμα 1

---

|           |                                      | Παίκτης 2                            |                                    |
|-----------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
|           |                                      | «Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$ | «Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$ |
| Παίκτης 1 | «Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$ | -1, 1                                | 1, -1                              |
|           | Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$     | 1, -1                                | -1, 1                              |

# Παράδειγμα 1

- Η πιθανότητα να επιλέξουν και οι δύο παίκτες «Κόκκινο» είναι:

$$P(\text{Κόκκινο}, \text{Κόκκινο}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

- Η πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης «Κόκκινο» και ο δεύτερος «Μαύρο» είναι:

$$P(\text{Κόκκινο}, \text{Μαύρο}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

|           |                                      | Παίκτης 2                            |                                    |
|-----------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
|           |                                      | «Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$ | «Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$ |
| Παίκτης 1 | «Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$ | -1, 1                                | 1, -1                              |
|           | Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$     | 1, -1                                | -1, 1                              |

# Παράδειγμα 1

- Η πιθανότητα να επιλέξει ο πρώτος παίκτης «Μαύρο» και ο δεύτερος «Κόκκινο» είναι:

$$P(\text{Μαύρο}, \text{Κόκκινο}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

- Η πιθανότητα να επιλέξουν και οι δύο παίκτες «Μαύρο» είναι:

$$P(\text{Μαύρο}, \text{Μαύρο}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

|           |                                      | Παίκτης 2                            |                                    |
|-----------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
|           |                                      | «Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$ | «Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$ |
| Παίκτης 1 | «Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$ | -1, 1                                | 1, -1                              |
|           | Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$     | 1, -1                                | -1, 1                              |

# Παράδειγμα 1

- Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1,  $V_1$  με βάση τις παραπάνω μεικτές στρατηγικές είναι:

$$V_1 = \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot (-1)$$
$$= \frac{1}{6}$$

|           |                                      | Παίκτης 2                            |                                    |
|-----------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
|           |                                      | «Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$ | «Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$ |
| Παίκτης 1 | «Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$ | -1, 1                                | 1, -1                              |
|           | Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$     | 1, -1                                | -1, 1                              |

# Παράδειγμα 1

- Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 2,  $V_2$  με βάση τις παραπάνω μεικτές στρατηγικές είναι:

$$V_2 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{12} \cdot (-1) + \frac{1}{6} \cdot 1$$
$$= -\frac{1}{6}.$$

|           |                                      | Παίκτης 2                            |                                    |
|-----------|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
|           |                                      | «Κόκκινο» $\left(\frac{1}{3}\right)$ | «Μαύρο» $\left(\frac{2}{3}\right)$ |
| Παίκτης 1 | «Κόκκινο» $\left(\frac{3}{4}\right)$ | -1, 1                                | 1, -1                              |
|           | Μαύρο $\left(\frac{1}{4}\right)$     | 1, -1                                | -1, 1                              |

# Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

---

- Μεικτές στρατηγικές χρησιμοποιούμε σε παίγνια σταθερού αθροίσματος στα οποία δεν υπάρχουν ισορροπίες Nash με αμιγείς στρατηγικές.

# Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

---

- Μεικτές στρατηγικές χρησιμοποιούμε επίσης όταν θέλουμε να βρούμε εκτός από τις ισορροπίες που προκύπτουν με καθαρές στρατηγικές και τις ισορροπίες που προκύπτουν με μεικτές στρατηγικές.

# Παράδειγμα 2 (Εύρεση Ισορροπίας Nash με Αμιγείς και Καθαρές Στρατηγικές)

---

- Έστω το σύνολο των δύο παικτών  $N = \{A, B\}$ .
- Το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη A είναι  $X_A = \{A_1, A_2\}$  και του παίκτη B είναι  $X_B = \{B_1, B_2\}$ .
- Οι αποδόσεις των δύο παικτών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα αποδόσεων.

# Παράδειγμα 2

---

|       | $B_1$ | $B_2$ |
|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 2, 1  | 0, 0  |
| $A_2$ | 0, 0  | 1, 2  |

## Παράδειγμα 2

---

- Υποθέτουμε ότι ο παίκτης  $A$  επιλέγει την στρατηγική  $A_1$  με πιθανότητα  $p$  και την στρατηγική  $A_2$  με πιθανότητα  $1 - p$ .
- Υποθέτουμε επίσης ότι ο παίκτης  $B$  επιλέγει την στρατηγική  $B_1$  με πιθανότητα  $q$  και την στρατηγική  $B_2$  με πιθανότητα  $1 - q$ .

# Παράδειγμα 2

---

|              | $B_1(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 2, 1     | 0, 0         |
| $A_2(1 - p)$ | 0, 0     | 1, 2         |

# Παράδειγμα 2

---

- Σκοπός μας είναι στο παραπάνω παίγνιο να βρούμε όλες τις ισορροπίες (καθαρές και μεικτές).

# Παράδειγμα 2

## Βήμα 1:

Θα βρούμε τις βέλτιστες επιλογές για τον παίκτη 1.

Δεδομένου ότι ο παίκτης B επιλέγει την στρατηγική  $B_1$  με πιθανότητα  $q$  και την στρατηγική  $B_2$  με πιθανότητα  $1 - q$ , έχουμε:

|              | $B_1(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 2, 1     | 0, 0         |
| $A_2(1 - p)$ | 0, 0     | 1, 2         |

## Παράδειγμα 2

---

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη A αν επιλέξει την στρατηγική  $A_1$  είναι:

$$V_A(A_1, q) = 2q + 0(1 - q) = 2q$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη A αν επιλέξει την στρατηγική  $A_2$  είναι:

$$V_A(A_2, q) = 0q + 1(1 - q) = 1 - q.$$

# Παράδειγμα 2

■ Έχουμε ότι:

$$V_A(A_1, q) < V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q < \frac{1}{3}$$

$$V_A(A_1, q) > V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q > \frac{1}{3}$$

$$V_A(A_1, q) = V_A(A_2, q) \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$$

# Παράδειγμα 2

---

Επομένως:

- Αν  $q < \frac{1}{3}$  τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη Α είναι να διαλέξει την στρατηγική με  $A_2$  με πιθανότητα  $1 - p = 1$ , δηλαδή έχουμε  $p = 0$ .
- Αν  $q > \frac{1}{3}$  τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη Α είναι να διαλέξει την στρατηγική με  $A_1$  με πιθανότητα  $p = 1$ .

## Παράδειγμα 2

---

- Αν  $q = \frac{1}{3}$  τότε επιλογή για τον παίκτη A είναι αδιάφορη, δηλαδή μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε τιμή  $p \in [0,1]$ .

# Παράδειγμα 2

---

## Βήμα 2:

Θα βρούμε τις βέλτιστες επιλογές για τον παίκτη 2.

Δεδομένου ότι ο παίκτης A επιλέγει την στρατηγική  $A_1$  με πιθανότητα  $p$  και την στρατηγική  $A_2$  με πιθανότητα

$1 - p$ , έχουμε:

|              | $B_1(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 2, 1     | 0, 0         |
| $A_2(1 - p)$ | 0, 0     | 1, 2         |

# Παράδειγμα 2

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη B αν επιλέξει την στρατηγική  $B_1$  είναι:

$$V_B(B_1, p) = 1p + 0(1 - p) = p.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη B αν επιλέξει την στρατηγική  $B_2$  είναι:

$$V_B(B_2, p) = 0p + 2(1 - p) = 2 - 2p.$$

$A_1(p)$

$A_2(1 - p)$

|              | $B_1(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 2, 1     | 0, 0         |
| $A_2(1 - p)$ | 0, 0     | 1, 2         |

# Παράδειγμα 2

---

■ Έχουμε ότι:

$$V_B(B_1, p) < V_B(B_2, p) \Leftrightarrow p < \frac{2}{3}$$

$$V_B(B_1, p) > V_B(B_2, p) \Leftrightarrow p > \frac{2}{3}$$

$$V_B(B_1, p) = V_B(B_2, p) \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$$

# Παράδειγμα 2

---

Επομένως:

- Αν  $p < \frac{2}{3}$  τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη B είναι να διαλέξει την στρατηγική με  $B_2$  με πιθανότητα  $1 - q = 1$ , δηλαδή έχουμε  $q = 0$ .
- Αν  $p > \frac{2}{3}$  τότε η βέλτιστη επιλογή για τον παίκτη B είναι να διαλέξει την στρατηγική με  $B_1$  με πιθανότητα  $q = 1$ .

## Παράδειγμα 2

---

- Αν  $p = \frac{2}{3}$  τότε η επιλογή για τον παίκτη A είναι αδιάφορη, δηλαδή μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε τιμή  $q \in [0,1]$ .

**Βήμα 3:** Στη συνέχεια βρούμε όλες τις ισορροπίες Nash Με καθαρές και μεικτές στρατηγικές).

# Παράδειγμα 2

## Βέλτιστες Στρατηγικές Παίκτη 1:

- Αν  $q < \frac{1}{3}$  τότε  $p = 0, (1_A)$
- Αν  $q > \frac{1}{3}$  τότε  $p = 1, (2_A)$
- Αν  $q = \frac{1}{3}$  τότε  $p \in [0, 1], (3_A)$

## Βέλτιστες Στρατηγικές Παίκτη 2:

- Αν  $p < \frac{2}{3}$  τότε  $q = 0, (1_B)$
- Αν  $p > \frac{2}{3}$  τότε  $q = 1, (2_B)$
- Αν  $p = \frac{2}{3}$  τότε  $q \in [0, 1], (3_B)$

## Παράδειγμα 2

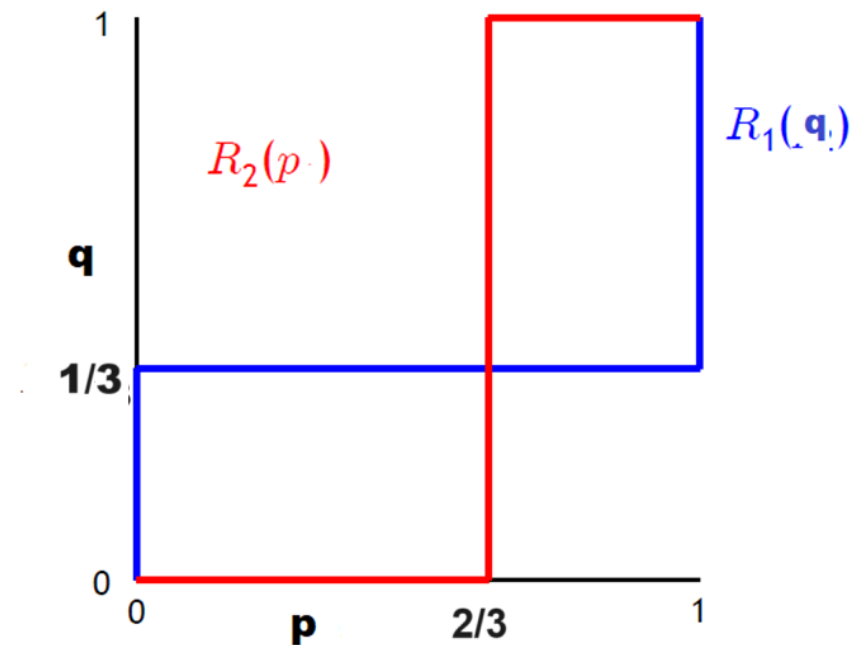
---

Επομένως οι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash είναι οι εξής:

- $p = 0, q = 0$  καθαρή στρατηγική  $(A_2, B_2)$  με πιθανότητα 1. (Από  $(1_A)$  και  $(1_B)$ )
- $p = 1, q = 1$  καθαρή στρατηγική  $(A_1, B_1)$  με πιθανότητα 1. (Από  $(2_A)$  και  $(2_B)$ )
- $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$  Μεικτή στρατηγική (Από  $(3_A)$  και  $(3_B)$ ).

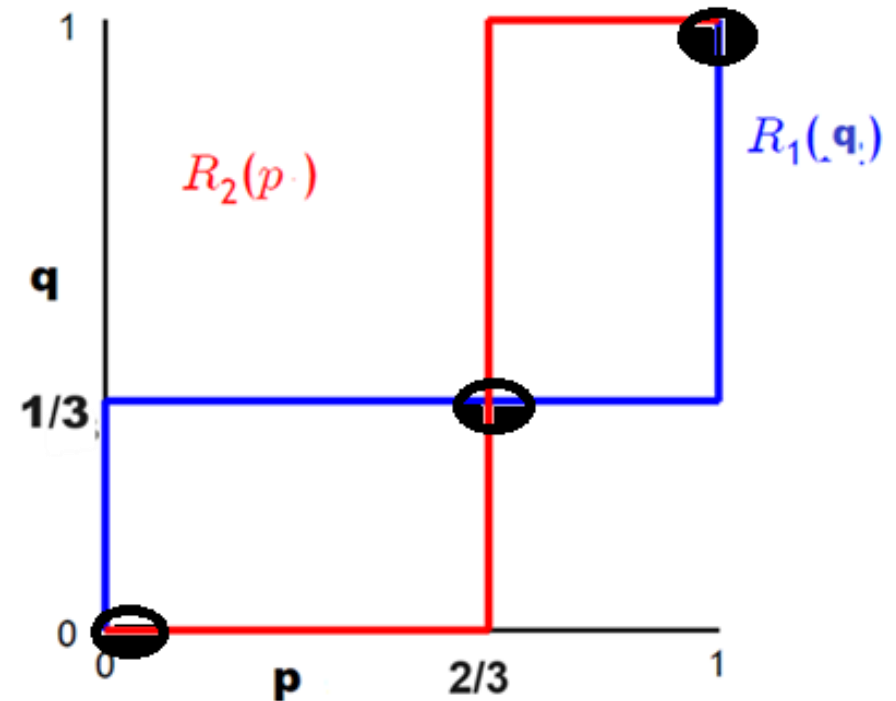
# Παράδειγμα 2

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την γραφική επίλυση του παίγνιου.



# Παράδειγμα 2

Τα σημεία τομής των γραμμών των βέλτιστων αντιδράσεων των δύο παικτών καταδεικνύουν τα σημεία ισορροπίας Nash με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές.



# Παράδειγμα 2

## Παρατήρηση:

Στην περίπτωση της ισορροπίας με μεικτές στρατηγικές  $(p, q) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  για τις αναμενόμενες αποδόσεις των δύο παικτών ισχύουν τα εξής:

|              | $B_1(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 2, 1     | 0, 0         |
| $A_2(1 - p)$ | 0, 0     | 1, 2         |

# Μεικτές Στρατηγικές – Ισορροπία Nash

$$V_A = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$V_B = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Δηλαδή:

$$V_A = V_B$$

|              | $B_1(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 2,1      | 0,0          |
| $A_2(1 - p)$ | 0,0      | 1,2          |

# Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

---

- Αποδεικνύεται το παρακάτω πολύ βασικό Θεώρημα ύπαρξης Ισορροπίας Nash της Θεωρίας Παιγνίων.

# Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

---

## Θεώρημα Ύπαρξης Ισορροπίας Nash

Κάθε παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό παικτών στο οποίο το πλήθος των στρατηγικών για τον κάθε παίκτη είναι πεπερασμένο έχει τουλάχιστον μία ισορροπία Nash με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές.

# Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

---

## Παρατηρήσεις

- Το Θεώρημα ύπαρξης ισορροπίας Nash δεν μας δίνει καμία πληροφορία για τον τρόπο με τον οποίο οι παίκτες μπορούν να καταλήξουν σε ισορροπία Nash ή έναν εύκολο τρόπο να φτάσουν σε αυτήν.
- Σε σύνθετα παίγνια η εύρεση σημείου ισορροπίας Nash μπορεί να είναι μια υπολογιστικά εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία.

# Ισορροπία Nash – Θεώρημα Ύπαρξης

---

## Παρατηρήσεις

- Η ισορροπία Nash σε ένα παίγνιο λειτουργεί καλύτερα όταν είναι μοναδική, αφού σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μία και μοναδική επιλογή για τους λογικούς παίκτες του παιχνίτου.

# Μεικτές Στρατηγικές – Αρχή Αδιαφορίας

---

- Για την εύρεση Ισορροπίας Nash σε μεικτές στρατηγικές μπορούμε να ακολουθήσουμε και την ακόλουθη μέθοδο η οποία είναι γνωστή ως «**Αρχή Αδιαφορίας**».

# Μικτές Στρατηγικές – Αρχή Αδιαφορίας

---

## Αρχή της Αδιαφορίας

Η στρατηγική ισορροπίας με μικτές στρατηγικές για τον κάθε παίκτη μπορεί να βρεθεί αν εξισώσουμε τις αναμενόμενες αποδόσεις του άλλου παίκτη από τις καθαρές στρατηγικές.

# Άσκηση 1

---

Να βρείτε όλες τις ισορροπίες που υπάρχουν στο παίγνιο του πρώτου παραδείγματος.

|           |                   | Παίκτης 2         |                     |
|-----------|-------------------|-------------------|---------------------|
|           |                   | «Κόκκινο» ( $q$ ) | «Μαύρο» ( $1 - q$ ) |
| Παίκτης 1 | «Κόκκινο» ( $p$ ) | $-1, 1$           | $1, -1$             |
|           | Μαύρο ( $1 - p$ ) | $1, -1$           | $-1, 1$             |

# Άσκηση 1 – Λύση

Παρατηρούμε ότι το παίγνιο δεν έχει ισορροπία Nash με καθαρές στρατηγικές.

Για μεικτές στρατηγικές θα εφαρμόσουμε την Αρχή Αδιαφορίας.

|           |                   | Παίκτης 2         |                     |
|-----------|-------------------|-------------------|---------------------|
|           |                   | «Κόκκινο» ( $q$ ) | «Μαύρο» ( $1 - q$ ) |
| Παίκτης 1 | «Κόκκινο» ( $p$ ) | -1, 1             | 1, -1               |
|           | Μαύρο ( $1 - p$ ) | 1, -1             | -1, 1               |

# Άσκηση 1 – Λύση

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική  $K_1$  είναι:

$$V_1(K_1, q) = 1 - 2q.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική  $M_1$  είναι:

$$V_1(M_1, q) = 2q - 1.$$

|           |                   | Παίκτης 2         |                     |
|-----------|-------------------|-------------------|---------------------|
|           |                   | «Κόκκινο» ( $q$ ) | «Μαύρο» ( $1 - q$ ) |
| Παίκτης 1 | «Κόκκινο» ( $p$ ) | -1, 1             | 1, -1               |
|           | Μαύρο ( $1 - p$ ) | 1, -1             | -1, 1               |

# Άσκηση 1 – Λύση

---

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 1 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_1(K_1, q) = V_1(M_1, q)$$

Δηλαδή

$$1 - 2q = 2q - 1$$

Ή

$$q = \frac{1}{2}$$

# Άσκηση 1 – Λύση

---

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική  $K_2$  είναι:

$$V_2(K_2, p) = 2p - 1.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική  $M_2$  είναι:

$$V_2(M_2, p) = 1 - 2p$$

# Άσκηση 1 – Λύση

---

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 2 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_2(K_2, p) = V_2(M_2, p)$$

Δηλαδή

$$1 - 2p = 2p - 1$$

Ή

$$p = \frac{1}{2}$$

# Άσκηση 1 – Λύση

---

Επομένως οι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash είναι οι εξής:

- $p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}$  Μεικτή στρατηγική.

# Άσκηση 2

---

Να βρείτε τυχόν ισορροπίες με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές που υπάρχουν στο παρακάτω παίγνιο.

|       | $A_2$ | $B_2$ |
|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 2, 0  | 1, 1  |
| $B_1$ | 3, 4  | 1, 2  |

## Άσκηση 2 – Λύση

---

- Παρατηρούμε έχει ισορροπία Nash με καθαρές στρατηγικές, τις  $(A_1, B_2)$  και  $(B_1, A_2)$ .
- Για μεικτές στρατηγικές θα εφαρμόσουμε την Αρχή Αδιαφορίας.

|       | $A_2$ | $B_2$ |
|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 2, 0  | 1, 1  |
| $B_1$ | 3, 4  | 1, 2  |

# Άσκηση 2 – Λύση

- Έστω ο παίκτης 1 επιλέγει την στρατηγική  $A_1$  με πιθανότητα  $p$  και ο παίκτης 2 την στρατηγική  $A_2$  με πιθανότητα  $q$ , όπως φαίνεται στον διπλανό πίνακα αποδόσεων.

|              | $A_2(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 2, 0     | 1, 1         |
| $B_1(1 - p)$ | 3, 4     | 1, 2         |

## Άσκηση 2 – Λύση

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική  $A_1$  είναι:

$$V_1(A_1, q) = 2q + 1 - q = q + 1.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική  $B_1$  είναι:

$$V_1(B_1, q) = 3q + 1 - q = 2q + 1.$$

|              | $A_2(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 2, 0     | 1, 1         |
| $B_1(1 - p)$ | 3, 4     | 1, 2         |

# Άσκηση 2 – Λύση

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 1 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_1(A_1, q) = V_1(B_1, q)$$

Δηλαδή

$$q + 1 = 2q + 1$$

Ή

$$q = 0$$

|              | $A_2(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 2, 0     | 1, 1         |
| $B_1(1 - p)$ | 3, 4     | 1, 2         |

## Άσκηση 2 – Λύση

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική  $A_2$  είναι:

$$V_2(A_2, p) = 4(1 - p) = 4 - 4p$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική  $B_2$  είναι:

$$V_2(B_2, p) = p + 2(1 - p) = 2 - p$$

|              | $A_2(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 2, 0     | 1, 1         |
| $B_1(1 - p)$ | 3, 4     | 1, 2         |

## Άσκηση 2 – Λύση

---

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 2 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_2(A_2, p) = V_2(B_2, p)$$

Δηλαδή

$$4 - 4p = 2 - p$$

Ή

$$p = \frac{2}{3}$$

## Άσκηση 2 – Λύση

Επομένως οι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash είναι οι εξής:

- $p = \frac{2}{3}, q = 0$  Μεικτή στρατηγική.
- $p = 1, q = 0$  Καθαρή στρατηγική.
- $p = 0, q = 1$  Καθαρή στρατηγική.

|              | $A_2(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 2, 0     | 1, 1         |
| $B_1(1 - p)$ | 3, 4     | 1, 2         |

# Άσκηση 3

---

Να βρείτε τυχόν ισορροπίες με καθαρές ή μεικτές στρατηγικές που υπάρχουν στο παρακάτω παίγνιο.

|       | $A_2$   | $B_2$  |
|-------|---------|--------|
| $A_1$ | $1, -1$ | $0, 0$ |
| $B_1$ | $0, 0$  | $0, 6$ |

# Άσκηση 3 – Λύση

---

- Παρατηρούμε έχει ισορροπία Nash με καθαρές στρατηγικές, τις  $(A_1, B_2)$  και  $(B_1, B_2)$ .
- Για μεικτές στρατηγικές θα εφαρμόσουμε την Αρχή Αδιαφορίας.

|       | $A_2$   | $B_2$  |
|-------|---------|--------|
| $A_1$ | $1, -1$ | $0, 0$ |
| $B_1$ | $0, 0$  | $0, 6$ |

# Άσκηση 3 – Λύση

- Έστω ο παίκτης 1 επιλέγει την στρατηγική  $A_1$  με πιθανότητα  $p$  και ο παίκτης 2 την στρατηγική  $A_2$  με πιθανότητα  $q$ , όπως φαίνεται στον διπλανό πίνακα αποδόσεων.

|              | $A_2(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 1, -1    | 0, 0         |
| $B_1(1 - p)$ | 0, 0     | 0, 6         |

## Άσκηση 3 – Λύση

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική  $A_1$  είναι:

$$V_1(A_1, q) = q.$$

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 1 αν επιλέξει την στρατηγική  $B_1$  είναι:

$$V_1(B_1, q) = 0.$$

|              | $A_2(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 1, -1    | 0, 0         |
| $B_1(1 - p)$ | 0, 0     | 0, 6         |

# Άσκηση 3 – Λύση

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 1 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_1(A_1, q) = V_1(B_1, q)$$

Δηλαδή

$$q = 0.$$

|              | $A_2(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 1, -1    | 0, 0         |
| $B_1(1 - p)$ | 0, 0     | 0, 6         |

## Άσκηση 3 – Λύση

---

- Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική  $A_2$  είναι:

$$V_2(A_2, p) = -p$$

Η αναμενόμενη απόδοσή του παίκτη 2 αν επιλέξει την στρατηγική  $B_2$  είναι:

$$V_2(B_2, p) = 6(1 - p) = 6 - 6p$$

|              | $A_2(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 1, -1    | 0, 0         |
| $B_1(1 - p)$ | 0, 0     | 0, 6         |

## Άσκηση 3 – Λύση

Σύμφωνα με την αρχή της αδιαφορίας η στρατηγική ισορροπίας για τον παίκτη 2 προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$V_2(A_2, p) = V_2(B_2, p)$$

Δηλαδή

$$-p = 6 - 6p$$

Ή

$$p = \frac{6}{5} > 1$$

Που είναι αδύνατο!

Άρα δεν υπάρχουν μικτές στρατηγικές.

## Άσκηση 3 – Λύση

Επομένως οι αμοιβαία βέλτιστες στρατηγικές οι οποίες αποτελούν και σημεία ισορροπίας Nash είναι οι εξής:

- $p = 1, q = 0$  Καθαρή στρατηγική.
- $p = 0, q = 0$  Καθαρή στρατηγική.

|              | $A_2(q)$ | $B_2(1 - q)$ |
|--------------|----------|--------------|
| $A_1(p)$     | 1, -1    | 0, 0         |
| $B_1(1 - p)$ | 0, 0     | 0, 6         |

Γ. Σταματόπουλος, Θεωρία Παιγνίων, Ελληνικά  
Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα.

Αλιπράντης, Χ., Chakrabarti, S. (2004). Παίγνια και λήψη  
αποφάσεων. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Μαγείρου, Ε. (2012). Παίγνια και Αποφάσεις – Μια  
εισαγωγική προσέγγιση. Εκδόσεις Κριτική.

Μηλολιδάκης, Κ. (2009). Θεωρία Παιγνίων – Μαθηματικά  
Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας. Εκδόσεις  
«Σοφία».

## Βιβλιογραφία