ΚΩΝ. Ι. ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ

Τομέας Φυσικών Επιστημών
Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

2010

Στους μαθητές μου,
για όλ' αυτά που με δίδαξαν ...

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Μηχανική αποτελεί παραδοσιακά το πρώτο στάδιο «μύησης» στη Φυσική. Και είναι ίσως το μόνο πραγματικά αυτόνομο κομμάτι της Φυσικής, με την έννοια ότι μπορεί να μελετηθεί αυτοτελώς, χωρίς την ανάγκη υποστήριξης από άλλες περιοχές της Φυσικής επιστήμης. Το βιβλίο αυτό αποτελεί μια εισαγωγή στη Μηχανική και απευθύνεται, κατά κύριο λόγο, στους πρωτοετείς σπουδαστές της Σχολής Ναυτικών Δοκίμων.

Είναι γενικά αποδεκτό ότι καμία σοβαρή προσέγγιση στη Μηχανική (τουλάχιστον, σε πανεπιστημιακό επίπεδο) δεν είναι δυνατή χωρίς τη συνδρομή των Μαθηματικών. Ας σκεφθούμε μόνο πως ο κεντρικός νόμος της Μηχανικής, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, είναι ταυτόχρονα μια διανυσματική και μια διαφορική εξίσωση. Στο βιβλίο αυτό (και παρά τις χλιαρές διαμαρτυρίες που ενίοτε εισπράττω στις αίθουσες διδασκαλίας!), προσπαθώ να εξοικειώσω εξαρχής το μαθητή με τη χρήση δύο βασικών μαθηματικών εργαλείων: των μοναδιαίων διανυσμάτων και των διαφορικών τελεστών. Στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου εκτίθενται συνοπτικά οι βασικές έννοιες από τη διανυσματική ανάλυση που θα χρειαστούν στη συνέχεια. Το *Μαθηματικό Συμπλήρωμα* στο τέλος του βιβλίου αποτελεί μια μικρή εισαγωγή στις έννοιες του διαφορικού μιας συνάρτησης, των διαφορικών τελεστών, και των διαφορικών εξισώσεων. Θα συμβούλευα το μαθητή να εξοικειωθεί με όλες αυτές τις έννοιες πριν ξεκινήσει τη μελέτη της Κινηματικής.

Το βιβλίο χωρίζεται νοητά σε τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος (Κεφάλαια 1-5) μελετούμε τη μηχανική του σημειακού σωματιδίου (ή, γενικότερα, του σώματος που εκτελεί αμιγώς μεταφορική κίνηση), ενώ το δεύτερο μέρος (Κεφ.6-8) εξετάζει τη μηχανική των συστημάτων σωματιδίων (σε αυτά περιλαμβάνονται τα στερεά σώματα, καθώς και τα ρευστά). Το τρίτο μέρος αποτελείται από τα *Προβλήματα* και στοχεύει στην όσο το δυνατόν καλύτερη εμπέδωση της θεωρίας. Συνιστώ στο μαθητή να δοκιμάσει να τα λύσει καταρχήν μόνος του, πριν καταφύγει στις αναλυτικές λύσεις που τα συνοδεύουν. Προσέξτε ότι τα προβλήματα παρατίθενται σαν ενιαίο σύνολο, δεν κατηγοριοποιούνται σε αντιστοιχία με τα κεφάλαια της θεωρίας. Αυτό έγινε σκόπιμα, ώστε να βοηθήσει το μαθητή να συνειδητοποιήσει ότι η Μηχανική αποτελεί μια αδιάσπαστη ενότητα (με κεντρική αφετηρία τους νόμους του Νεύτωνα), παρόλο τον συνήθη, παιδαγωγικά αναγκαίο κατακερματισμό στον οποίο την υποβάλλουμε στην προσπάθεια να συστηματοποιήσουμε τη μελέτη της.

Στα τέσσερα χρόνια που μεσολάβησαν από την πρώτη έκδοσή του, το βιβλίο αυτό έχει υποστεί πολλές αναθεωρήσεις. Πέραν από την όποια αυτοκριτική μου διάθεση, έλαβα σοβαρά υπόψη τις παρατηρήσεις αυτών για τους οποίους γράφτηκε. Θα συνεχίσω να κάνω το ίδιο, αφού η ανταπόκριση των μαθητών είναι ο πιο αλάνθαστος καθρέφτης της επιτυχίας ή αποτυχίας ενός δασκάλου!

Τελειώνοντας, δεν θα πρέπει να παραλείψω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όσους συνέβαλαν με διάφορους τρόπους στη δημιουργία αυτού του έργου, από την πρωταρχική του σύλληψη ως την ολοκλήρωσή του στην παρούσα μορφή:

Στους μαθητές μου, που οι συχνά διαπεραστικές ερωτήσεις και παρατηρήσεις τους μου έδειξαν νέες κατευθύνσεις...

Στον Π. Τσιλιμίγκρα, από την εντυπωσιακή συλλογή προβλημάτων Μηχανικής του οποίου «δανείστηκα» ένα μέρος για τις ανάγκες της παρούσας έκδοσης...

Στον Φ. Κατσαμάνη και την K. Arapoglou, που μου αποκάλυψαν τις δυνατότητες του υπολογιστή και με έπεισαν πως ο πιο σίγουρος δρόμος ήταν «να κάνω τη δουλειά μόνος μου»...

Στον Α. Μαγουλά, που με εισήγαγε στο πρόγραμμα σχεδίασης *SmartDraw* και μου ενίσχυσε την πίστη στην αρχή ότι οι αληθινές φιλίες στέκονται πάνω από ποδοσφαιρικές συμπάθειες...

Στους Κ. Φωστιέρη και Ν. Σολωμό, για πολύτιμη τεχνική υποστήριξη και χρήσιμες συμβουλές για αποτελεσματικότερη χρήση του υπολογιστή...

Στη Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, που μου ανέθεσε τη συγγραφή αυτού του βιβλίου, ανοίγοντας νέους δρόμους στην εκπαιδευτική σταδιοδρομία μου.

Κ. Ι. Παπαχρήστου
Αθήνα, Ιούνιος 2010

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.1 Βασικές Έννοιες

Τα *διανύσματα* είναι φυσικές ή μαθηματικές ποσότητες που καθορίζονται από δύο στοιχεία: το *μέτρο* και την *κατεύθυνση*. Ένα διάνυσμα παρίσταται συμβολικά ως εξής:

$$\xrightarrow{\qquad\vec{V}\qquad}$$

Το *μέτρο* τού $\vec{V}$ (ανάλογο, συμβατικά, με το μήκος του βέλους) συμβολίζεται με $\left|\vec{V}\right|$ και ισχύει πάντα ότι $\left|\vec{V}\right| \geq 0$. Ειδικά, ένα διάνυσμα μηδενικού μέτρου ονομάζεται *μηδενικό διάνυσμα*: $\vec{V} = 0$, και η κατεύθυνσή του είναι απροσδιόριστη. Εξ ορισμού, το διάνυσμα $-\vec{V}$ έχει το ίδιο μέτρο με το $\vec{V}$, αλλά αντίθετη κατεύθυνση:

$$\xrightarrow{\qquad\vec{V}\qquad} \qquad\qquad \xleftarrow{\qquad -\vec{V}\qquad}$$

Ένα *μοναδιαίο διάνυσμα* (συμβολισμός: $\hat{u}$) είναι διάνυσμα μοναδιαίου μέτρου: $|\hat{u}| = 1$. Ένα διάνυσμα $\vec{V}$ στην κατεύθυνση του μοναδιαίου $\hat{u}$ γράφεται

$$\vec{V} = \left|\vec{V}\right| \hat{u}$$

ενώ ένα διάνυσμα $\vec{W}$ στην *αντίθετη* κατεύθυνση γράφεται

$$\vec{W} = -\left|\vec{W}\right| \hat{u} \ .$$

Προσέξτε ότι το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}$ στην κατεύθυνση ενός διανύσματος $\vec{V}$ μπορεί να εκφραστεί σαν το πηλίκο

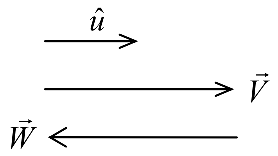
$$\hat{u} = \frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \qquad (1.1)$$

(Εξ ορισμού, πολλαπλασιάζοντας ή διαιρώντας ένα διάνυσμα με έναν θετικό αριθμό πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε, αντίστοιχα, το μέτρο του διανύσματος με τον αριθμό αυτό, χωρίς να μεταβάλουμε την κατεύθυνση του διανύσματος.) Γενικά, ένα διάνυσμα παράλληλο με το $\hat{u}$ ισούται με

$$\vec{V} = \pm\left|\vec{V}\right| \hat{u} \equiv V\,\hat{u} \qquad (1.2)$$

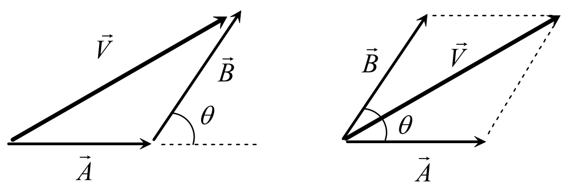
Η ποσότητα V ονομάζεται *αλγεβρική τιμή* τού $\vec{V}$ ως προς το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}$, και το πρόσημό της δηλώνει αν το $\vec{V}$ είναι ομόρροπο ή αντίρροπο με το $\hat{u}$.

Παράδειγμα: Για τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος,

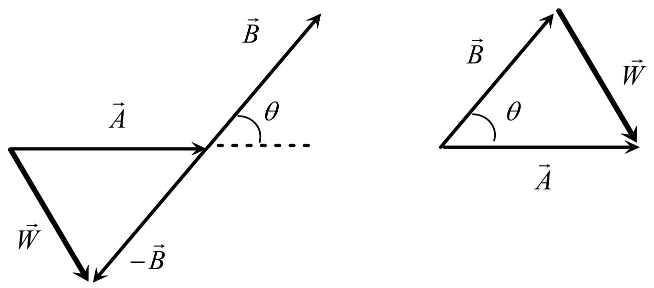


έχουμε ότι $|\vec{V}|=|\vec{W}|=2$, $\vec{V}=2\hat{u}$, $\vec{W}=-2\hat{u}$, $V=2$, $W=-2$ (όπου οι δύο τελευταίες ποσότητες παριστούν αλγεβρικές τιμές).

Το *άθροισμα* $\vec{V}=\vec{A}+\vec{B}$ δύο διανυσμάτων βρίσκεται γραφικά με δύο τρόπους:



Η *διαφορά* $\vec{W}=\vec{A}-\vec{B}\equiv\vec{A}+(-\vec{B})$ βρίσκεται γραφικά ως εξής:



Προσέξτε στο δεξί σχήμα ότι το βέλος τού $\vec{A}-\vec{B}$ έχει κατεύθυνση προς την αιχμή τού $\vec{A}$. (Σχεδιάστε το διάνυσμα $\vec{B}-\vec{A}$.)

Ισχύει ότι

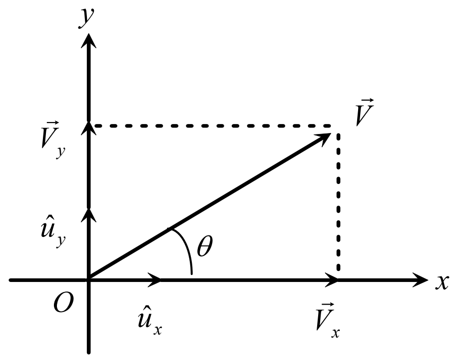
$$\left|\vec{A}\pm\vec{B}\right|=(A^2+B^2\pm 2AB\cos\theta)^{1/2} \qquad (1.3)$$

όπου $A=\left|\vec{A}\right|$, $B=\left|\vec{B}\right|$, και όπου θ η γωνία ανάμεσα στα $\vec{A}$ και $\vec{B}$.

1.2 Ορθογώνιες Συνιστώσες Διανύσματος

Μια προσανατολισμένη ευθεία γραμμή ονομάζεται *άξονας*. Ο προσανατολισμός ορίζεται με τη βοήθεια ενός μοναδιαίου διανύσματος $\hat{u}$ παράλληλου προς την ευθεία, του οποίου η κατεύθυνση προσδιορίζει τη *θετική* φορά του άξονα.

Θεωρούμε το επίπεδο *xy* που ορίζεται από τους άξονες *x* και *y*, κάθετους μεταξύ τους, με μοναδιαία διανύσματα $\hat{u}_x$ και $\hat{u}_y$, αντίστοιχα. Έστω $\vec{V}$ ένα διάνυσμα στο επίπεδο αυτό. Είναι συχνά βολικό να εκφράζουμε το $\vec{V}$ σαν άθροισμα δύο διανυσμάτων κάθετων μεταξύ τους και παράλληλων στους αντίστοιχους άξονες x και y:



$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y \qquad \text{όπου} \qquad \vec{V}_x = V_x\,\hat{u}_x\,, \quad \vec{V}_y = V_y\,\hat{u}_y\,.$$

Οι ποσότητες V_x και V_y είναι οι προβολές τού $\vec{V}$ στους δύο άξονες, και αποτελούν τις *αλγεβρικές τιμές* των $\vec{V}_x$ και $\vec{V}_y$ (θετικές ή αρνητικές, ανάλογα με τις φορές των $\vec{V}_x$ και $\vec{V}_y$ ως προς τα $\hat{u}_x$ και $\hat{u}_y$, αντίστοιχα). Τα V_x και V_y ονομάζονται *ορθογώνιες συνιστώσες* τού $\vec{V}$. Γράφουμε:

$$\vec{V} = V_x\,\hat{u}_x + V_y\,\hat{u}_y \equiv (V_x, V_y) \tag{1.4}$$

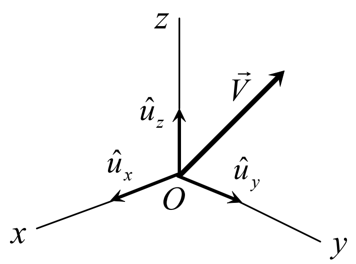
Παρατηρούμε ότι

$$\left|\vec{V}\right| \equiv V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}} \tag{1.5}$$

Η γωνία θ μετριέται σε σχέση με τη θετική κατεύθυνση του άξονα *x* και αυξάνει *αριστερόστροφα*. Έτσι, ξεκινώντας από τον άξονα *x*, σχηματίζουμε θετικές ή αρνητικές γωνίες αν κινηθούμε αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι

$$V_x = V\cos\theta, \qquad V_y = V\sin\theta, \qquad \tan\theta = \frac{V_y}{V_x} \tag{1.6}$$

Ανάλογα ορίζονται οι ορθογώνιες συνιστώσες ενός διανύσματος στον τρισδιάστατο χώρο. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε ένα *δεξιόστροφο* τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων *xyz*, με μοναδιαία διανύσματα $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$:



(Αν εναλλάσσαμε, π.χ., τα ονόματα των αξόνων *x* και *y*, το τρισορθογώνιο σύστημα *xyz* που θα προέκυπτε θα ήταν *αριστερόστροφο*, ενώ το *yxz* θα ήταν τώρα δεξιόστροφο. Βρείτε έναν πρακτικό τρόπο για να αποφαινόμαστε αν ένα δοσμένο τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων *xyz* είναι δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο. Προσέξτε τη σειρά με την οποία γράφονται τα *x*, *y* και *z*.) Οι προβολές V_x, V_y, V_z του $\vec{V}$ στους τρεις άξονες αποτελούν τις *ορθογώνιες συνιστώσες* τού $\vec{V}$. Γράφουμε:

$$\vec{V} = V_x\,\hat{u}_x + V_y\,\hat{u}_y + V_z\,\hat{u}_z \equiv (V_x, V_y, V_z)$$
$$\left|\vec{V}\right| \equiv V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}} \tag{1.7}$$

Ειδικά, αν $\vec{V} = 0 \;\Leftrightarrow\; V_x = V_y = V_z = 0$.

Έστω ότι $\vec{A} = A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z$, $\vec{B} = B_x\hat{u}_x + B_y\hat{u}_y + B_z\hat{u}_z$. Ισχύει ότι

$$\vec{A} = \vec{B} \;\Leftrightarrow\; A_x = B_x,\;\; A_y = B_y,\;\; A_z = B_z \tag{1.8}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\vec{A} \pm \vec{B} &= (A_x \pm B_x)\hat{u}_x + (A_y \pm B_y)\hat{u}_y + (A_z \pm B_z)\hat{u}_z \\ &\equiv (A_x \pm B_x,\, A_y \pm B_y,\, A_z \pm B_z)\end{aligned} \tag{1.9}$$

Γενικά, οι συνιστώσες ενός αθροίσματος διανυσμάτων ισούνται με το άθροισμα των αντίστοιχων συνιστωσών των διανυσμάτων: Έστω ότι

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \cdots \equiv \sum_i \vec{V}_i \equiv (V_x, V_y, V_z) \quad \text{όπου} \quad \vec{V}_i \equiv (V_{ix}, V_{iy}, V_{iz}).$$

Τότε,

$$V_x = \sum_i V_{ix}, \quad V_y = \sum_i V_{iy}, \quad V_z = \sum_i V_{iz} \tag{1.10}$$

Παράδειγμα: Για τα διανύσματα $\vec{A} \equiv (1, -1, 0)$, $\vec{B} \equiv (2, 1, -1)$, έχουμε:

$$\vec{A} + \vec{B} \equiv (3, 0, -1), \quad \vec{A} - \vec{B} \equiv (-1, -2, 1)$$

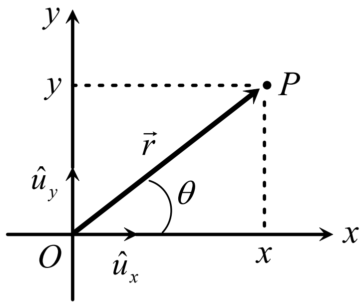
και

$$\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{3^2 + 0 + (-1)^2} = \sqrt{10}, \quad \left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

1.3 Διανύσματα Θέσης

Τα *διανύσματα θέσης* χρησιμεύουν για τον προσδιορισμό της θέσης σημείων του χώρου σε σχέση με ένα σταθερό σημείο αναφοράς *O*.

Για τα σημεία ενός επιπέδου, χρησιμοποιούμε ένα σύστημα αξόνων *xy*:



Το διάνυσμα $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ προσδιορίζει τη θέση του σημείου *P* ως προς το *O*. Οι συνιστώσες (*x*, *y*) του $\vec{r}$ ονομάζονται *καρτεσιανές συντεταγμένες* τού *P*. Γράφουμε:

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y \equiv (x, y) \tag{1.11}$$

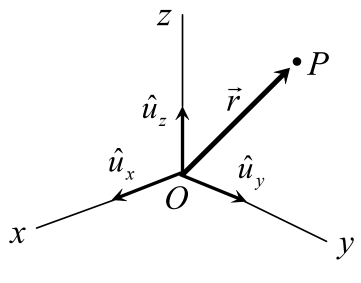
Εναλλακτικά, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση τού *P* με τις *πολικές συντεταγμένες* (*r*, *θ*), όπου $r = |\vec{r}|$ και όπου, κατά συνθήκη, $0 \le \theta < 2\pi$ ή $-\pi < \theta \le \pi$, κλπ. (προσέξτε ότι η γωνία θ αυξάνει *αριστερόστροφα*). Παρατηρούμε ότι

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{1.12}$$

ή αντίστροφα,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{1.13}$$

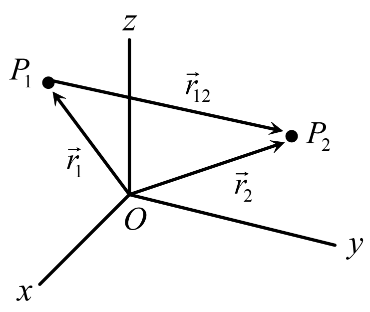
Για σημεία του χώρου, χρησιμοποιούμε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων *xyz*:



$$\begin{gathered} \vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z \equiv (x, y, z) \\ |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{gathered} \tag{1.14}$$

Οι (x,y,z) αποτελούν τις *καρτεσιανές συντεταγμένες* του σημείου P στο χώρο. (Εναλλακτικά συστήματα συντεταγμένων είναι οι *σφαιρικές* και οι *κυλινδρικές* συντεταγμένες, τις οποίες δεν θα χρησιμοποιήσουμε σ' αυτό το βιβλίο.)

Έστω P_1, P_2 δύο σημεία του χώρου με διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ και συντεταγμένες $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$, αντίστοιχα. Ζητάμε μια έκφραση για την απόσταση ανάμεσα στα σημεία αυτά:



Παρατηρούμε ότι $P_1P_2 = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. Όμως,

$$\vec{r}_1 = x_1\hat{u}_x + y_1\hat{u}_y + z_1\hat{u}_z\,, \quad \vec{r}_2 = x_2\hat{u}_x + y_2\hat{u}_y + z_2\hat{u}_z$$

έτσι ώστε

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{u}_x + (y_2 - y_1)\hat{u}_y + (z_2 - z_1)\hat{u}_z\ .$$

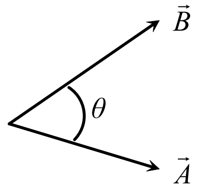
Άρα,

$$P_1P_2 = |\vec{r}_{12}| = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{1/2} \qquad (1.15)$$

Παράδειγμα: Για τα σημεία P_1, P_2, με συντεταγμένες $(x_1, y_1, z_1) \equiv (-2, 1, -3)$ και $(x_2, y_2, z_2) \equiv (0, -1, -2)$, έχουμε ότι $P_1P_2 = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$.

1.4 Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$, και έστω θ η γωνία ανάμεσά τους, όπου, κατά συνθήκη, $0 \le \theta \le \pi$:



Το *εσωτερικό γινόμενο* των $\vec{A}$ και $\vec{B}$ ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = AB\cos\theta} \tag{1.16}$$

όπου $A = |\vec{A}|$, $B = |\vec{B}|$. Προφανώς,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} \quad (\textit{αντιμεταθετική ιδιότητα}).$$

Στην περίπτωση που $\vec{A} = \vec{B}$, έχουμε ότι $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ και

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}|^2 = A^2 \tag{1.17}$$

Αν τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι *κάθετα* μεταξύ τους, τότε $\theta = \pi/2$, $\cos\theta = 0$, και οδηγούμαστε σε μια χρήσιμη *συνθήκη καθετότητας*:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{A}\perp\vec{B} \tag{1.18}$$

Όπως αποδεικνύεται,

$$\vec{A}\cdot(\lambda\vec{B}) = (\lambda\vec{A})\cdot\vec{B}\,,\quad (\kappa\vec{A})\cdot(\lambda\vec{B}) = \kappa\lambda(\vec{A}\cdot\vec{B})\,,\quad \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}\,,$$

όπου κ,λ πραγματικοί αριθμοί.

Για τα μοναδιαία διανύσματα, ισχύει ότι (δείξτε το!)

$$\hat{u}_x\cdot\hat{u}_x = \hat{u}_y\cdot\hat{u}_y = \hat{u}_z\cdot\hat{u}_z = 1, \qquad \hat{u}_x\cdot\hat{u}_y = \hat{u}_x\cdot\hat{u}_z = \hat{u}_y\cdot\hat{u}_z = 0\,.$$

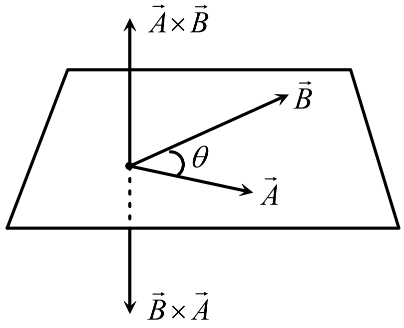
Έτσι, αν $\vec{A} = A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z$, $\vec{B} = B_x\hat{u}_x + B_y\hat{u}_y + B_z\hat{u}_z$, βρίσκουμε ότι

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z} \tag{1.19}$$

Σαν ειδική περίπτωση, οδηγούμαστε και πάλι στην (1.17):

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2} = |\vec{A}|^2 \tag{1.20}$$

1.5 Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων



Το *εξωτερικό γινόμενο* $\vec{A}\times\vec{B}$ των $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$, και στη φορά που προχωρεί μια δεξιόστροφη βίδα που στρέφεται από το $\vec{A}$ στο $\vec{B}$. Εναλλακτικά, η φορά τού $\vec{A}\times\vec{B}$ μπορεί να προσδιοριστεί με τον «κανόνα του δεξιού χεριού»: Αν λυγίσουμε τα τέσσερα δάχτυλα του δεξιού χεριού κατά την περιστροφική φορά από το $\vec{A}$ προς το $\vec{B}$, ο τεντωμένος αντίχειρας θα δείχνει στην κατεύθυνση του $\vec{A}\times\vec{B}$. Το μέτρο τού $\vec{A}\times\vec{B}$ είναι

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta = AB\sin\theta \tag{1.21}$$

όπου $0\le\theta\le\pi$. Παρατηρούμε ότι $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$ και $\vec{A}\times\vec{A}=0$. Γενικά, αν τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι *παράλληλα* μεταξύ τους, τότε $\vec{A}\times\vec{B}=0$, αφού $\theta=0$ ή $\theta=\pi$, έτσι ώστε $\sin\theta=0$.

Όπως αποδεικνύεται,

$$\vec{A}\times(\lambda\vec{B}) = (\lambda\vec{A})\times\vec{B}, \quad (\kappa\vec{A})\times(\lambda\vec{B}) = \kappa\lambda(\vec{A}\times\vec{B}), \quad \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B}) + (\vec{A}\times\vec{C}).$$

Για τα μοναδιαία διανύσματα, ισχύει ότι (δείξτε το!)

$$\hat{u}_x\times\hat{u}_x = \hat{u}_y\times\hat{u}_y = \hat{u}_z\times\hat{u}_z = 0, \quad \hat{u}_x\times\hat{u}_y = \hat{u}_z, \quad \hat{u}_y\times\hat{u}_z = \hat{u}_x, \quad \hat{u}_z\times\hat{u}_x = \hat{u}_y.$$

Έτσι, αν $\vec{A} = A_x\hat{u}_x + A_y\hat{u}_y + A_z\hat{u}_z$, $\vec{B} = B_x\hat{u}_x + B_y\hat{u}_y + B_z\hat{u}_z$, βρίσκουμε ότι

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{u}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{u}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{u}_z \tag{1.22}$$

Αυτό γράφεται σύντομα στη μορφή ορίζουσας:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.23}$$

Ασκήσεις

1. Έστω δύο διανύσματα $\vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$ και $\vec{B} \equiv (B_x, B_y, B_z)$, και έστω θ η μεταξύ τους γωνία. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, δείξτε τα παρακάτω:

α. $\left|\vec{A} \pm \vec{B}\right| = \left(\left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2 \pm 2\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta\right)^{1/2}$

β. $\cos\theta = \dfrac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)^{1/2}\left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right)^{1/2}}$

γ. Αν $\vec{A} \perp \vec{B}$, τότε $\left|\vec{A} + \vec{B}\right|^2 = \left|\vec{A} - \vec{B}\right|^2 = \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2$

(Ποιο γνωστό θεώρημα της Γεωμετρίας εκφράζει αυτή η πρόταση;)

2. Έστω $\vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B} \equiv (B_x, B_y, B_z)$, $\vec{C} \equiv (C_x, C_y, C_z)$.

α. Δείξτε ότι

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

β. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, δείξτε ότι

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$
$$\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$$

3. Βρείτε την τιμή τού α, έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{A} \equiv \left(\dfrac{1}{2}, \alpha, \dfrac{3}{2}\right)$ και $\vec{B} \equiv (-3, 3, -1)$ να είναι κάθετα μεταξύ τους.

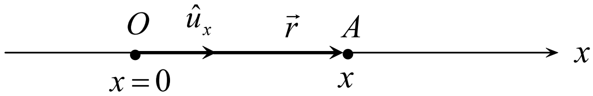
4. Βρείτε τις τιμές των α και β, έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{A} \equiv (1, \alpha, 3)$ και $\vec{B} \equiv (-2, -4, \beta)$ να είναι παράλληλα μεταξύ τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

2.1 Ευθύγραμμη Κίνηση

Η *Κινηματική* μελετάει αυτή καθαυτή την κίνηση των σωμάτων, χωρίς να ενδιαφέρεται για τα αίτια που την προκαλούν ή την επηρεάζουν. Η πιο απλή μορφή κίνησης είναι η *ευθύγραμμη κίνηση*, η οποία λαμβάνει χώρα κατά μήκος ευθείας γραμμής. Σαν τέτοια γραμμή επιλέγουμε, π.χ., τον άξονα *x*, στον οποίο έχουμε ορίσει μια θετική φορά στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{u}_x$, καθώς και ένα σημείο *O* στο οποίο $x=0$:



Η θέση *A* του κινητού τη χρονική στιγμή *t* προσδιορίζεται με το διάνυσμα θέσης

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r} = x\hat{u}_x$$

όπου τα *x* και $\vec{r}$ είναι συναρτήσεις τού t: $x = x(t)$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Παρατηρούμε ότι $x>0$ ή $x<0$, ανάλογα με το αν το κινητό βρίσκεται δεξιά ή αριστερά τού *O*, αντίστοιχα.

Η *ταχύτητα* του κινητού στο σημείο *A* τη χρονική στιγμή *t* είναι η χρονική παράγωγος (ο ρυθμός μεταβολής) του διανύσματος θέσης, δηλαδή, το διάνυσμα

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{u}_x) = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x$$

(όπου λάβαμε υπόψη ότι $\hat{u}_x = \sigma\tau\alpha\theta.$). Γράφουμε:

$$\vec{v} = v\hat{u}_x \quad \text{όπου} \quad v = \frac{dx}{dt} = \pm|\vec{v}| \tag{2.1}$$

Το *v* είναι η *αλγεβρική τιμή* της ταχύτητας ως προς το $\hat{u}_x$. Γενικά, τα *v* και $\vec{v}$ είναι συναρτήσεις τού *t*. Το *πρόσημο* του *v* δείχνει τη στιγμιαία κατεύθυνση κίνησης: αν $v>0$, το κινητό κινείται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα (προς τα δεξιά), ενώ αν $v<0$, το κινητό κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση (προς τα αριστερά). Σε μονάδες του S.I., το *v* εκφράζεται σε $m/s = m.s^{-1}$.

Αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση $v(t)$, μπορούμε να βρούμε τη θέση $x(t)$ του κινητού για κάθε *t*, ως εξής: Από την (2.1),

$$v = \frac{dx}{dt} \;\Rightarrow\; dx = v\,dt\,.$$

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση, υποθέτοντας ότι τη στιγμή $t=t_0$ το κινητό διέρχεται από τη θέση $x=x_0$:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v dt \;\Rightarrow\; x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v dt \;\Rightarrow$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v dt \qquad (2.2)$$

Η διαφορά $x - x_0$ ονομάζεται *μετατόπιση* του κινητού από τη θέση x_0.

Η *επιτάχυνση* του κινητού τη χρονική στιγμή t ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος της ταχύτητας:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{u}_x) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_x .$$

Γράφουμε:

$$\vec{a} = a\hat{u}_x \quad \text{όπου} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \pm|\vec{a}| \qquad (2.3)$$

Η μονάδα επιτάχυνσης στο S.I. είναι το $m/s^2 = m.s^{-2}$.

Το a παριστά την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης. Για δοσμένη συνάρτηση $a=a(t)$, και υποθέτοντας ότι τη στιγμή $t=t_0$ το κινητό έχει ταχύτητα $v=v_0$, βρίσκουμε την ταχύτητα $v(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t ως εξής:

$$a = \frac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; dv = a dt \;\Rightarrow\; \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a dt \;\Rightarrow$$

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a dt \qquad (2.4)$$

Αν γνωρίζουμε την επιτάχυνση σαν συνάρτηση του x, $a=a(x)$, μπορούμε να βρούμε το μέτρο της ταχύτητας σαν συνάρτηση της θέσης, ως εξής: Διαιρώντας τις σχέσεις $dv=adt$ και $dx=vdt$ κατά μέλη, βρίσκουμε $vdv=adx$. Ολοκληρώνουμε τώρα τη σχέση αυτή, υποθέτοντας ότι $v=v_0$ στη θέση $x=x_0$:

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{x_0}^{x} a dx \;\Rightarrow\; \frac{v^2}{2} - \frac{{v_0}^2}{2} = \int_{x_0}^{x} a dx \;\Rightarrow$$

$$v^2 = {v_0}^2 + 2\int_{x_0}^{x} a dx \qquad (2.5)$$

Προσέξτε ότι, στις σχέσεις (2.2) και (2.4), τα x και v είναι συναρτήσεις της μεταβλητής t που βρίσκεται στα άνω όρια των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων. Όμοια, στη σχέση (2.5), το v^2 είναι συνάρτηση του x που εμφανίζεται στο άνω όριο του ολοκληρώματος. (Γενικά, ένα ολοκλήρωμα με μεταβλητό άνω όριο αποτελεί συνάρτηση του ορίου αυτού.)

2.2 Ειδικές Περιπτώσεις Ευθύγραμμης Κίνησης

α) <u>*Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση*</u>: *v*=*σταθερό*, *a*=0

Η σχέση (2.2) δίνει (θέτοντας t_0=0):

$$x = x_0 + \int_0^t v dt = x_0 + v\int_0^t dt \;\Rightarrow$$

$$\boxed{x = x_0 + vt} \qquad (2.6)$$

β) <u>*Ευθύγραμμη, ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση*</u>: *a*=*σταθερό* $\neq 0$

Από τις σχέσεις (2.4) και (2.2), βρίσκουμε (θέτοντας t_0=0):

$$v = v_0 + \int_0^t a dt = v_0 + a\int_0^t dt \;\Rightarrow$$

$$\boxed{v = v_0 + at} \qquad (2.7)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v dt = x_0 + \int_0^t (v_0 + at)\, dt = x_0 + v_0\int_0^t dt + a\int_0^t t dt \;\Rightarrow$$

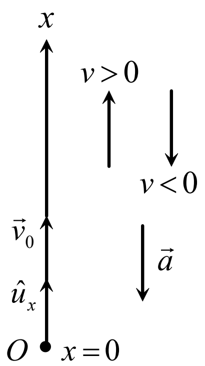
$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2} \qquad (2.8)$$

Τέλος, η σχέση (2.5) δίνει

$$v^2 = v_0{}^2 + 2\int_{x_0}^x a dx = v_0{}^2 + 2a\int_{x_0}^x dx \;\Rightarrow$$

$$\boxed{v^2 = v_0{}^2 + 2a(x - x_0)} \qquad (2.9)$$

Παράδειγμα: Κατακόρυφη βολή προς τα πάνω



Το κινητό εκτοξεύεται προς τα πάνω τη χρονική στιγμή t_0 =0, από το σημείο *O* όπου x_0 =0, με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{u}_x$ $(v_0 > 0)$.

Υποθέτουμε ότι στο κινητό ασκείται μόνο η δύναμη της βαρύτητας (π.χ., δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα). Η επιτάχυνση του κινητού κατευθύνεται πάντα κατακόρυφα προς τα κάτω, *ανεξάρτητα από τη φορά κίνησης του σώματος*, και ισούται με

$$\vec{a} = -g\,\hat{u}_x \equiv a\,\hat{u}_x \;\Rightarrow\; a = -g$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας, ίση περίπου με 9.8 m/s^2. Παρατηρούμε ότι $a =$ *σταθερό*, άρα η κίνηση είναι *ομαλά επιταχυνόμενη*. Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$v = v_0 + at = v_0 - gt$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v^2 = {v_0}^2 + 2a(x - x_0) = {v_0}^2 - 2gx$$

Το κινητό θα φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος $x=h$, θα σταματήσει στιγμιαία εκεί τη χρονική στιγμή $t=t_h$, και στη συνέχεια η πορεία του θα αντιστραφεί προς τα κάτω. Ζητούμε τα h και t_h :

$$v_h = v_0 - gt_h = 0 \;\Rightarrow\; t_h = \frac{v_0}{g}$$

$$h = v_0 t_h - \frac{1}{2}g{t_h}^2 = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

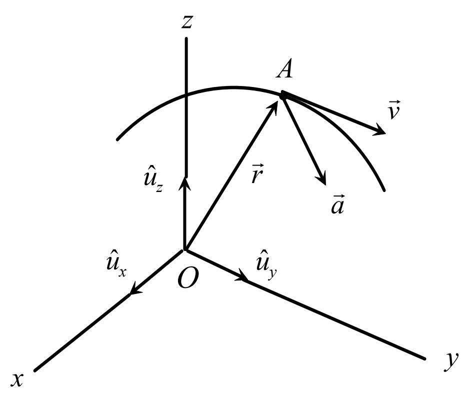
Προσέξτε ότι $v>0$ για $0 \leq t < t_h$, ενώ $v<0$ για $t > t_h$. Τι σημαίνει αυτό από φυσική άποψη; (Θυμηθείτε ότι η θετική φορά του άξονα x είναι προς τα πάνω.)

Άσκηση: Βρείτε τη χρονική στιγμή όπου το σώμα επιστρέφει στο O, καθώς και την ταχύτητα με την οποία επιστρέφει. Τι παρατηρείτε; Επίσης, δείξτε ότι σε μια ελεύθερη πτώση κατά ύψος h, ένα σώμα αποκτά ταχύτητα

$$v = \sqrt{2gh} \;.$$

2.3 Καμπυλόγραμμη Κίνηση στο Χώρο

Θεωρούμε τώρα την κίνηση κατά μήκος καμπύλης γραμμής στο επίπεδο ή στο χώρο. Η θέση του κινητού πάνω στην καμπύλη προσδιορίζεται με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς την αρχή O των συντεταγμένων του χώρου μας. Το διάνυσμα αυτό, καθώς και οι αντίστοιχες συντεταγμένες (x,y,z), είναι συναρτήσεις του χρόνου:



Θέτουμε

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z \quad \text{όπου} \quad x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Η *ταχύτητα* του κινητού στο σημείο A τη χρονική στιγμή t είναι η χρονική παράγωγος του διανύσματος θέσης:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z) = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z \tag{2.10}$$

Γράφουμε:

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{v} = v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y + v_z\hat{u}_z \\ v_x = \dfrac{dx}{dt},\ \ v_y = \dfrac{dy}{dt},\ \ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{array}} \tag{2.10΄}$$

Με βάση τη Διαφορική Γεωμετρία (και όπως θα δείξουμε αργότερα), το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v}$ είναι *εφαπτόμενο* στην τροχιά του κινητού στο σημείο A και η φορά του συμπίπτει με τη φορά κίνησης. Το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2} \tag{2.11}$$

Η *επιτάχυνση* του κινητού στο σημείο A τη χρονική στιγμή t είναι η χρονική παράγωγος της ταχύτητας:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\hat{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\hat{u}_z \tag{2.12}$$

Γράφουμε:

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{a} = a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y + a_z\hat{u}_z \\ a_x = \dfrac{dv_x}{dt},\ \ a_y = \dfrac{dv_y}{dt},\ \ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} \end{array}} \tag{2.12΄}$$

Όπως θα δείξουμε αργότερα, στην καμπυλόγραμμη κίνηση το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\vec{a}$ έχει κατεύθυνση προς το *κοίλο* (εσωτερικό) μέρος της τροχιάς. Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \tag{2.13}$$

Παράδειγμα: Έστω ότι οι συντεταγμένες της θέσης ενός σωματιδίου δίνονται, σαν συναρτήσεις του χρόνου, από τις εξισώσεις $\{x=A\cos\omega t,\ y=A\sin\omega t,\ z=\lambda t\}$, όπου A, ω, λ θετικές σταθερές. Από τις (2.10΄) και (2.12΄) βρίσκουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, αντίστοιχα, του σωματιδίου:

$$(v_x, v_y, v_z) \equiv (-\omega A\sin\omega t,\ \omega A\cos\omega t,\ \lambda)\ ,$$

$$(a_x, a_y, a_z) \equiv (-\omega^2 A\cos\omega t,\ -\omega^2 A\sin\omega t,\ 0)\ .$$

Τα μέτρα v και a των αντίστοιχων διανυσμάτων δίνονται από τις (2.11) και (2.13):

$$v=\sqrt{\omega^2 A^2+\lambda^2}\quad ,\quad a=\omega^2 A$$

2.4 Μεταβολή του Μέτρου της Ταχύτητας

Γενικά, μια κίνηση λέγεται *επιταχυνόμενη* όταν $\vec{a}\neq 0$, έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{v}$ της ταχύτητας μεταβάλλεται χρονικά. Αυτός ο όρος, όμως, χρησιμοποιείται στη Μηχανική και με διαφορετική σημασία, πράγμα που συχνά δημιουργεί σύγχυση. Μια (γενικά καμπυλόγραμμη) κίνηση, λοιπόν, ονομάζεται *«επιταχυνόμενη»* ή *«επιβραδυνόμενη»* σε κάποιο χρονικό διάστημα, ανάλογα με το αν το *μέτρο* $v=|\vec{v}|$ της ταχύτητας αυξάνει ή ελαττώνεται, αντίστοιχα, στο διάστημα αυτό. Αν το μέτρο της ταχύτητας παραμένει σταθερό, η κίνηση καλείται *ομαλή*. Θα δείξουμε τώρα ότι το είδος της κίνησης εξαρτάται από τη γωνία θ ανάμεσα στο διάνυσμα $\vec{v}$ της ταχύτητας και το διάνυσμα $\vec{a}$ της επιτάχυνσης, όπου, κατά συνθήκη, $0\leq\theta\leq\pi$.

Γενικά,

$$\vec{v}\cdot\vec{a}=|\vec{v}||\vec{a}|\cos\theta=v\,a\cos\theta \qquad (2.14)$$

όπου $a=|\vec{a}|$. Όμως,

$$2(\vec{v}\cdot\vec{a})=2\left(\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)=\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}=\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{d(v^2)}{dt}=\frac{d(v^2)}{dv}\frac{dv}{dt}=2v\frac{dv}{dt}\;\Rightarrow$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a}=\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=v\frac{dv}{dt} \qquad (2.15)$$

Προσέξτε ότι

$$v\frac{dv}{dt}\equiv|\vec{v}|\frac{d|\vec{v}|}{dt}\neq|\vec{v}|\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| \qquad (!)$$

Συγκρίνοντας τις (2.14) και (2.15), βρίσκουμε ότι

$$\frac{dv}{dt}=a\cos\theta \qquad (2.16)$$

Δοθέντος ότι $a>0$, παρατηρούμε τα εξής:

α) Αν $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$, τότε $\frac{dv}{dt}>0$: το v *αυξάνει* και η κίνηση είναι *επιταχυνόμενη*.

β) Αν $\frac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$, τότε $\frac{dv}{dt}<0$: το v *ελαττώνεται* και η κίνηση είναι *επιβραδυνόμενη*.

γ) Αν $\theta=\frac{\pi}{2}$ (δηλαδή, αν $\vec{a}\perp\vec{v}$), τότε $\frac{dv}{dt}=0$: το v είναι *σταθερό* και η κίνηση είναι *ομαλή*.

Παρατηρούμε, ιδιαίτερα, ότι

> *όταν η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα, το* ***μέτρο*** *της ταχύτητας μένει σταθερό (αν και η διεύθυνσή της μπορεί να μεταβάλλεται), και η κίνηση είναι ομαλή.*

Στην περίπτωση *ευθύγραμμης* κίνησης, η γωνία θ ανάμεσα στα $\vec{v}$ και $\vec{a}$ μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές: (α) Αν τα $\vec{v}$ και $\vec{a}$ είναι ομόρροπα, $\theta=0$ και η κίνηση είναι επιταχυνόμενη. (β) Αν τα $\vec{v}$ και $\vec{a}$ είναι αντίρροπα, $\theta=\pi$ και η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη. Τώρα, τα $\vec{v}$ και $\vec{a}$ είναι ομόρροπα (αντίρροπα) όταν $\vec{v}\cdot\vec{a}>0$ ($\vec{v}\cdot\vec{a}<0$). Δοθέντος ότι $\vec{v}=v\,\hat{u}_x$ και $\vec{a}=a\,\hat{u}_x$, όπου εδώ τα v και a είναι *αλγεβρικές τιμές* ($v=\pm|\vec{v}|,\; a=\pm|\vec{a}|$), έχουμε ότι $\vec{v}\cdot\vec{a}=v\,a$. Έτσι,

> *μια ευθύγραμμη κίνηση είναι επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη, ανάλογα με το αν το γινόμενο των αλγεβρικών τιμών της ταχύτητας και της επιτάχυνσης είναι θετικό (va>0) ή αρνητικό (va<0), αντίστοιχα.*

2.5 Κίνηση με Σταθερή Επιτάχυνση

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου η επιτάχυνση $\vec{a}$ του κινητού μένει σταθερή κατά μέτρο και κατεύθυνση. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ το κινητό διέρχεται από τη θέση $\vec{r}=\vec{r}_0$, ως προς το σύστημα συντεταγμένων μας, με ταχύτητα $\vec{v}=\vec{v}_0$. Ζητούμε τα $\vec{r}(t)$ και $\vec{v}(t)$ για κάθε $t>0$.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το $\vec{a}$ είναι σταθερό διάνυσμα, έχουμε:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{a} \;\Rightarrow\; d\vec{v}=\vec{a}\,dt \;\Rightarrow\; \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}=\vec{a}\int_0^t dt \;\Rightarrow\; \vec{v}-\vec{v}_0=\vec{a}\,t \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}\,t} \qquad (2.17)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}\,t \;\Rightarrow\; d\vec{r}=\vec{v}_0dt+\vec{a}\,t\,dt \;\Rightarrow\; \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}=\vec{v}_0\int_0^t dt+\vec{a}\int_0^t t\,dt \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0\,t+\frac{1}{2}\vec{a}\,t^2} \qquad (2.18)$$

Γράφουμε:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}_0=t\,\vec{v}_0+\frac{t^2}{2}\,\vec{a}\,.$$

Η σχέση αυτή είναι της μορφής $\Delta\vec{r}=\kappa\,\vec{v}_0+\lambda\,\vec{a}$, με σταθερά $\vec{v}_0$, $\vec{a}$ και μεταβλητά κ, λ. Σύμφωνα με την Αναλυτική Γεωμετρία, το διάνυσμα $\Delta\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}_0$ θα βρίσκεται πάντα στο σταθερό επίπεδο το οποίο ορίζεται από τα $\vec{v}_0$ και $\vec{a}$ και διέρχεται από το σημείο του χώρου με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_0$ (αρχική θέση του κινητού). Στο ίδιο επίπεδο, επομένως, θα βρίσκεται πάντα και η άκρη του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ του κινητού. Συμπεραίνουμε ότι

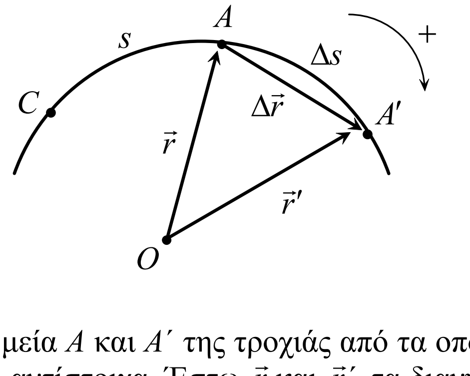
> *η κίνηση με σταθερή επιτάχυνση (κατά μέτρο* ***και*** *κατεύθυνση) λαμβάνει χώρα σε σταθερό επίπεδο.*

Σαν παράδειγμα αναφέρουμε την κίνηση ενός σώματος κάτω από την επίδραση του πεδίου βαρύτητας της Γης, σε μια σχετικά μικρή περιοχή του χώρου όπου το πεδίο αυτό μπορεί να θεωρείται ομογενές. Το σώμα τότε υπόκειται στη σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ (κατακόρυφη προς τα κάτω) και η τροχιά του περιορίζεται στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχική του ταχύτητα $\vec{v}_0$ και το $\vec{g}$. Όπως είναι εύκολο να δούμε, το επίπεδο κίνησης είναι κάθετο στην επιφάνεια της Γης.

2.6 Εφαπτομενικές και Κάθετες Συνιστώσες

Για ένα δοσμένο παρατηρητή, η ταχύτητα $\vec{v}$ και η επιτάχυνση $\vec{a}$ ενός κινητού είναι διανύσματα με απόλυτη φυσική υπόσταση, ανεξάρτητη από την επιλογή των αξόνων (x,y,z) του χώρου του. Αν επιλεγεί ένα διαφορετικό σύστημα αξόνων (x',y',z') με διαφορετικό προσανατολισμό ως προς το (x,y,z), οι *συνιστώσες* των $\vec{v}$ και $\vec{a}$ θα αλλάξουν αλλά τα ίδια τα διανύσματα, ως γεωμετρικές ποσότητες, θα παραμείνουν αμετάβλητα. Θα δούμε, τώρα, έναν εναλλακτικό τρόπο ανάλυσης των $\vec{v}$ και $\vec{a}$ σε συνιστώσες, που δεν προϋποθέτει την επιλογή αξόνων στο χώρο αλλά σχετίζεται με την ίδια την τροχιά του κινητού.

Ένα σημείο A της τροχιάς μπορεί, όπως πριν, να προσδιοριστεί με το διάνυσμα θέσης του, $\vec{r}$, ως προς οποιοδήποτε σημείο αναφοράς O. Το διάνυσμα αυτό είναι μια δοσμένη συνάρτηση $\vec{r}(t)$ του χρόνου. Ένας εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού τού A είναι ο εξής: Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο C της καμπύλης και μια θετική φορά διαγραφής της. Η θέση τότε του σημείου A δίνεται από την *επικαμπύλια* απόσταση $s=CA$ του A από το C. Προσέξτε ότι το s μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό, ανάλογα με το αν το A βρίσκεται μπροστά ή πίσω από το C κατά τη θετική φορά διαγραφής της καμπύλης (στο παρακάτω σχήμα το s είναι θετικό):



Θεωρούμε τώρα τα σημεία A και A' της τροχιάς από τα οποία πέρασε το κινητό τις χρονικές στιγμές t και t', αντίστοιχα. Έστω $\vec{r}$ και $\vec{r}\,'$ τα διανύσματα θέσης των A και A' ως προς το O. Καλούμε $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$ και $\Delta t = t' - t$, και γράφουμε

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad \vec{r}\,' = \vec{r}(t') = \vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}\,.$$

Η *ταχύτητα* στο σημείο *A* τη χρονική στιγμή *t* είναι

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \ .$$

Όμως, $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, έτσι ώστε

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right)\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

(διότι $\Delta s \to 0$ όταν $\Delta t \to 0$). Έχουμε, έτσι,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{2.19}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει παράγωγο σύνθετης συνάρτησης, αφού $\vec{r} = \vec{r}(s)$ και $s = s(t)$, έτσι ώστε $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Θέλουμε τώρα να βρούμε τη γεωμετρική σημασία του διανύσματος $d\vec{r}/ds$. Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα αυτό είναι το όριο του $\Delta\vec{r}/\Delta s$ για $\Delta s \to 0$. Καθώς το $\Delta s \to 0$, το $\Delta\vec{r}/\Delta s$ τείνει να γίνει *εφαπτόμενο* στην τροχιά στο σημείο *A*, με φορά προς την κατεύθυνση που *αυξάνει* το *s* (Δs>0), δηλαδή, προς τη *θετική* φορά διαγραφής της καμπύλης. Επιπλέον, $|\Delta\vec{r}/\Delta s| \to 1$ καθώς $\Delta s \to 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το $d\vec{r}/ds$ είναι *μοναδιαίο* διάνυσμα εφαπτόμενο στην τροχιά στο *A* και προσανατολισμένο στη *θετική* φορά διαγραφής της. Γράφουμε:

$$\hat{u}_T = \frac{d\vec{r}}{ds} \tag{2.20}$$

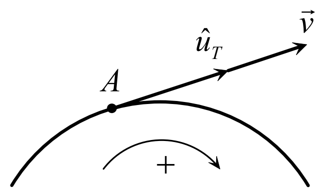
Η (2.19) τώρα παίρνει τη μορφή

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}\,\hat{u}_T = v\,\hat{u}_T} \tag{2.21}$$

όπου *v* η *αλγεβρική τιμή* της ταχύτητας ως προς το $\hat{u}_T$:

$$v = \frac{ds}{dt} = \pm|\vec{v}|$$

Έτσι, αν *v*>0, η κίνηση είναι κατά τη θετική φορά της καμπύλης (το *s* αυξάνει), ενώ αν *v*<0, η κίνηση είναι κατά την αρνητική φορά (το *s* ελαττώνεται). Προσέξτε ότι το $\hat{u}_T$ είναι *πάντα* προς τη *θετική* κατεύθυνση, ανεξάρτητα από τη φορά της κίνησης! Η (2.21) επαληθεύει ότι *η ταχύτητα είναι διάνυσμα εφαπτόμενο στην τροχιά*:



(Στο σχήμα η κίνηση γίνεται στη θετική κατεύθυνση, έτσι ώστε v>0.)

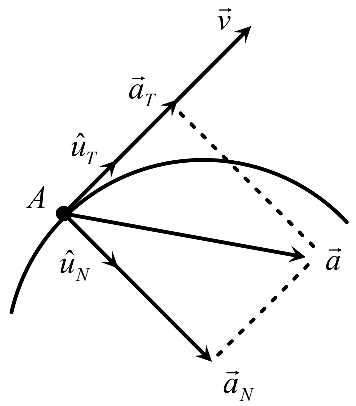
Προχωρούμε τώρα στη μελέτη της επιτάχυνσης, ξεκινώντας με μια σημαντική παρατήρηση:

1. Μια συνιστώσα της επιτάχυνσης *παράλληλη* προς την ταχύτητα μπορεί να αλλάξει *το μέτρο αλλά όχι τη διεύθυνση* της ταχύτητας. (Αυτό συμβαίνει στην ευθύγραμμη κίνηση.)
2. Μια συνιστώσα της επιτάχυνσης *κάθετη* προς την ταχύτητα μπορεί να αλλάξει *τη διεύθυνση αλλά όχι το μέτρο* της ταχύτητας. (Αυτό προκύπτει από τη συζήτηση της Παρ.2.4.)

Με δεδομένο ότι η ταχύτητα είναι διάνυσμα εφαπτόμενο στην τροχιά, είναι λογικό να αναλύσουμε την επιτάχυνση $\vec{a}$ σε δύο συνιστώσες:

1. Μια συνιστώσα $\vec{a}_T$ *εφαπτόμενη* στην τροχιά (*επιτρόχια επιτάχυνση*) που είναι υπεύθυνη για την αλλαγή του *μέτρου* της ταχύτητας.
2. Μια συνιστώσα $\vec{a}_N$ *κάθετη* στην τροχιά (*κεντρομόλος επιτάχυνση*) που ευθύνεται για την αλλαγή της *διεύθυνσης* της ταχύτητας.

Η ολική επιτάχυνση του κινητού θα είναι το διανυσματικό άθροισμα $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$, όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα:



Για να υπολογίσουμε τα $\vec{a}_T$ και $\vec{a}_N$, παραγωγίζουμε τη σχέση (2.21) ως προς t:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{u}_T) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt} \qquad (2.22)$$

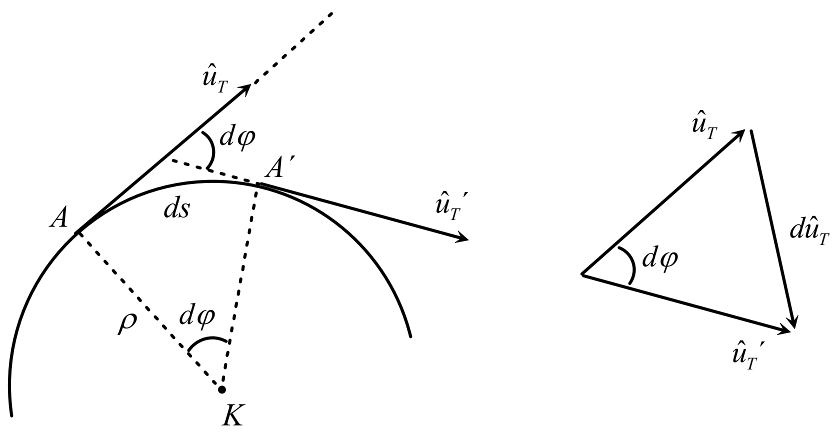
Το διάνυσμα $\dfrac{d\hat{u}_T}{dt}$ είναι *κάθετο* στο $\hat{u}_T$. Πράγματι:

$$\hat{u}_T \cdot \frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|\hat{u}_T|^2) = 0$$

αφού $|\hat{u}_T| = 1 = σταθερό$. Επιπλέον, το $\dfrac{d\hat{u}_T}{dt}$ έχει φορά προς το *εσωτερικό* της τροχιάς διότι αυτό ισχύει και για την απειροστή μεταβολή $d\hat{u}_T$ του $\hat{u}_T$. [Έτσι, λόγω της (2.22), *και η ίδια η επιτάχυνση $\vec{a}$ του κινητού θα πρέπει να κατευθύνεται προς το εσωτερικό της τροχιάς*.] Ορίζουμε, λοιπόν, ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}_N$ κάθετο στην τροχιά και με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της, και γράφουμε

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \left|\frac{d\hat{u}_T}{dt}\right| \hat{u}_N = \frac{|d\hat{u}_T|}{dt}\hat{u}_N \qquad (2.23)$$

Θεωρούμε προσεγγιστικά ότι το $d\hat{u}_T$ παριστά μια απειροστή μεταβολή τού $\hat{u}_T$ όταν αυτό μετατοπίζεται ελάχιστα κατά μήκος της καμπύλης μέσα σε χρονικό διάστημα *dt*: $d\hat{u}_T = \hat{u}_T{}' - \hat{u}_T$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Τα $\hat{u}_T$ και $\hat{u}_T{}'$ είναι μοναδιαία διανύσματα εφαπτόμενα στην καμπύλη στα αντίστοιχα σημεία *A* και *A′*. Τα σημεία αυτά απέχουν μεταξύ τους κατά μια απειροστή επικαμπύλια απόσταση *ds*, την οποία διανύει το κινητό σε χρόνο *dt*. Επειδή η γωνία *dφ* μεταξύ των $\hat{u}_T$ και $\hat{u}_T{}'$ είναι απειροστή, μπορούμε να γράψουμε

$$|d\hat{u}_T| \simeq |\hat{u}_T| d\varphi = d\varphi \ , \quad \textit{όπου το } d\varphi \textit{ εκφράζεται σε rad} .$$

Η σχέση (2.23), έτσι, γράφεται (λαμβάνοντας υπόψη και ότι *v=ds/dt*):

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{u}_N = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt}\hat{u}_N = \frac{d\varphi}{ds}\, v\,\hat{u}_N \qquad (2.24)$$

Επειδή το *ds* είναι απειροστό, μπορεί προσεγγιστικά να θεωρηθεί σαν τόξο ενός κύκλου με κέντρο *K* (το σημείο τομής των καθέτων στην καμπύλη στα σημεία *A* και *A′*) και ακτίνα *ρ=AK*. Το *K* ονομάζεται *κέντρο καμπυλότητας* και το *ρ ακτίνα καμπυλότητας* της τροχιάς στο *A*. Έτσι, $ds \simeq \rho d\varphi$, και η (2.24) γίνεται

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{v}{\rho}\hat{u}_N \qquad (2.25)$$

Η (2.22) δίνει, τελικά,

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{u}_N} \tag{2.26}$$

Γράφουμε:

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{a} = a_T\,\hat{u}_T + a_N\,\hat{u}_N \\ a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\,, \quad a_N = \frac{v^2}{\rho} \end{gathered}} \tag{2.27}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_T{}^2 + a_N{}^2} = \left[\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}\right]^{1/2} \tag{2.28}$$

Συνοψίζοντας τους διάφορους τρόπους ανάλυσης της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνιστώσες, γράφουμε:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y + v_z\hat{u}_z = v\,\hat{u}_T \\ \vec{a} &= a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y + a_z\hat{u}_z = a_T\,\hat{u}_T + a_N\,\hat{u}_N \end{aligned} \tag{2.29}$$

Παρατηρούμε ιδιαίτερα ότι

$$|\vec{a}|^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2 = a_T{}^2 + a_N{}^2 \tag{2.30}$$

<u>Ειδικές περιπτώσεις</u>:

α) *Ομαλή καμπυλόγραμμη κίνηση*: *v=σταθερό*. Έχουμε:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0, \quad \vec{a} = a_N\,\hat{u}_N = \frac{v^2}{\rho}\,\hat{u}_N \tag{2.31}$$

Παρατηρούμε ότι στην ομαλή κίνηση η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα, σε συμφωνία με τα συμπεράσματα της Παρ.2.4.

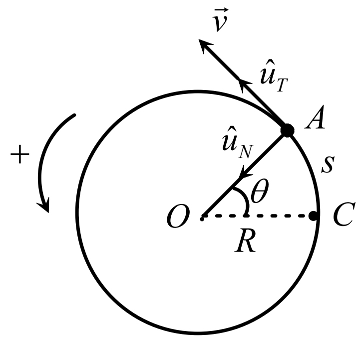
β) *Ευθύγραμμη κίνηση*: $\rho = \infty$, $s = x$, $\hat{u}_T = \hat{u}_x$. Έτσι,

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_T = \frac{dx}{dt}\hat{u}_x = v\,\hat{u}_x$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = 0\,, \quad \vec{a} = a_T\,\hat{u}_T = \frac{dv}{dt}\hat{u}_x$$

2.7 Κυκλική Κίνηση

Η κυκλική κίνηση είναι επίπεδη κίνηση με σταθερή ακτίνα καμπυλότητας: $\rho=R=$ *σταθερό*. Η τροχιά του κινητού είναι κύκλος ακτίνας R:



Εκλέγουμε σαν θετική φορά κίνησης την αριστερόστροφη, έτσι ώστε η επικαμπύλια απόσταση s από το σημείο αναφοράς C , καθώς και η γωνία θ, αυξάνουν αριστερόστροφα και μειώνονται δεξιόστροφα. Όπως πάντα, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\hat{u}_T$ είναι προσανατολισμένο στη *θετική* φορά της καμπύλης, ανεξάρτητα από τη φορά της κίνησης.

Ισχύει ότι

$$s = R\theta \qquad (\textit{το } \theta \textit{ σε rad}).$$

Η ταχύτητα του κινητού είναι

$$\vec{v} = v\,\hat{u}_T \ , \quad v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \tag{2.32}$$

(Γενικά, $v = \pm|\vec{v}|$, ανάλογα με τη φορά της κίνησης.) Ορίζουμε τη *γωνιακή ταχύτητα*

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{2.33}$$

έτσι ώστε

$$\boxed{v = R\omega} \tag{2.34}$$

Η μονάδα μέτρησης του ω είναι το $rad/s = rad.s^{-1}$. (Προσέξτε ότι το πρόσημο του ω συμπίπτει με αυτό του v και δηλώνει τη φορά της κίνησης.)

Η επιτάχυνση είναι

$$\vec{a} = a_T\,\hat{u}_T + a_N\,\hat{u}_N$$

όπου

$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \ , \qquad a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} \ .$$

Ορίζουμε τη *γωνιακή επιτάχυνση*

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \tag{2.35}$$

Έτσι έχουμε:

$$\boxed{a_T = R\alpha \ , \quad a_N = R\omega^2} \tag{2.36}$$

Όπως πάντα,

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_T{}^2 + a_N{}^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{2.37}$$

Όταν η κίνηση είναι *ομαλή κυκλική*, τα *v* και *ω* είναι σταθερά και οι (2.35) και (2.36) δίνουν: $\alpha = 0$, $a_T = 0$. Έτσι, η επιτάχυνση είναι αμιγώς κεντρομόλος:

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N = R\omega^2\,\hat{u}_N \qquad (v, \omega = \sigma\tau\alpha\theta.) \tag{2.38}$$

Από τη σχέση (2.33), και λαμβάνοντας υπόψη ότι *ω*= *σταθερό*, έχουμε

$$d\theta = \omega\, dt \;\Rightarrow\; \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega\, dt = \omega \int_0^t dt \;\Rightarrow$$

$$\theta = \theta_0 + \omega\, t \tag{2.39}$$

Τέλος, ορίζουμε την *περίοδο T* (μονάδα: *s*) και τη *συχνότητα* $f = 1/T$ (μονάδα: s^{-1} ή *hertz*, *Hz*) της ομαλής κυκλικής κίνησης, με τη σχέση

$$|\omega| = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{2.40}$$

(Περισσότερα θα πούμε στο Κεφ.5, στα πλαίσια της μελέτης της περιοδικής κίνησης.)

2.8 Σχετική Κίνηση

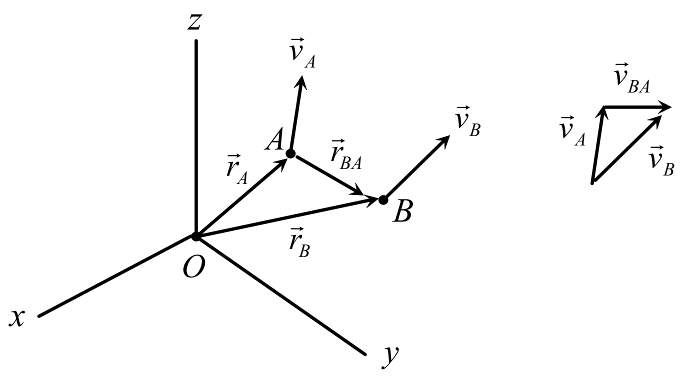
Θεωρούμε δύο αντικείμενα *A*, *B* και έναν παρατηρητή *O* που χρησιμοποιεί το σύστημα συντεταγμένων (*x,y,z*). Το σύστημα αυτό θα ονομάζεται *σύστημα αναφοράς τού O*. Τα διανύσματα θέσης των *A* και *B* ως προς *O* είναι $\vec{r}_A$ και $\vec{r}_B$, ενώ οι ταχύτητες των *A* και *B* ως προς *O* είναι

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}\ , \qquad \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt}\ .$$

Καλούμε

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

το διάνυσμα θέσης τού *B* ως προς το *A* :



Η *σχετική ταχύτητα του B ως προς το A* ορίζεται

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} \tag{2.41}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \tag{2.42}$$

Όμοια, η σχετική ταχύτητα *του A ως προς το B* είναι

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = -\vec{v}_{BA} \tag{2.43}$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε τη *σχετική επιτάχυνση του B ως προς το A*:

$$\vec{a}_{BA} = \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) = \frac{d\vec{v}_B}{dt} - \frac{d\vec{v}_A}{dt} \Rightarrow$$

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = -\vec{a}_{AB} \tag{2.44}$$

όπου

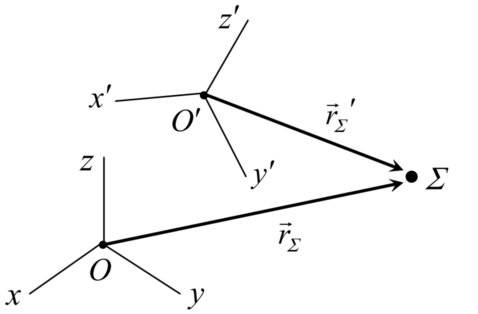
$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt}, \qquad \vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$

οι επιταχύνσεις των *A* και *B* ως προς το *O*.

Φανταστείτε τώρα δύο παρατηρητές *O* και *O′* που κινούνται με *σταθερή* σχετική ταχύτητα $\vec{v}_{O'O}$ ο ένας ως προς τον άλλον. Άρα, η σχετική τους επιτάχυνση είναι μηδέν:

$$\vec{a}_{O'O} = \frac{d\vec{v}_{O'O}}{dt} = 0 .$$

Οι παρατηρητές αυτοί παρακολουθούν την κίνηση ενός σωματιδίου Σ:



Έστω $\vec{a}_{\Sigma O}$ και $\vec{a}_{\Sigma O'}$ οι επιταχύνσεις τού Σ ως προς O και O', αντίστοιχα. Εφαρμόζουμε τη σχέση (2.44), έτσι ώστε εδώ το O' να παίζει το ρόλο τού A και το Σ το ρόλο τού B:

$$\vec{a}_{\Sigma O'} = \vec{a}_{\Sigma O} - \vec{a}_{O'O} = \vec{a}_{\Sigma O} \ .$$

Καταλήγουμε έτσι σε ένα σημαντικό συμπέρασμα:

> *Ένα σωματίδιο κινείται με την ίδια επιτάχυνση ως προς δύο παρατηρητές που διατηρούν σταθερή σχετική ταχύτητα (δεν επιταχύνονται ο ένας ως προς τον άλλον).*

Ειδικά,

> *αν το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα (χωρίς επιτάχυνση) ως προς τον ένα παρατηρητή, θα κινείται με σταθερή ταχύτητα και ως προς τον άλλον.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

3.1 Ο Νόμος της Αδράνειας

Με τον όρο *σημειακό σωματίδιο* (ή απλά *σωματίδιο*, ή *σωμάτιο*) θα εννοούμε κάθε σώμα του οποίου οι διαστάσεις θεωρούνται τόσο μικρές ώστε να μπορούμε να αγνοούμε την περιστροφική του κίνηση. Αλλά και ένα σώμα με *πεπερασμένες* (όχι αμελητέες) διαστάσεις θα αντιμετωπίζεται σαν «σωματίδιο» στην περίπτωση που η κίνησή του είναι *αμιγώς μεταφορική* (το σώμα, δηλαδή, δεν υφίσταται περιστροφή).

Ένα σωμάτιο λέγεται *ελεύθερο* αν (α) δεν υπόκειται σε καμία αλληλεπίδραση με τον υπόλοιπο κόσμο (πράγμα μάλλον απίθανο!), ή (β) το σύνολο των αλληλεπιδράσεών του είναι αθροιστικά μηδέν (οι αλληλεπιδράσεις αλληλοαναιρούνται και το σωμάτιο συμπεριφέρεται σαν να μην υπόκειται σε καμία αλληλεπίδραση). Σύμφωνα με το *νόμο της αδράνειας* ή *πρώτο νόμο του Νεύτωνα*,

> *ένα ελεύθερο σωμάτιο κινείται πάντοτε με σταθερή ταχύτητα (δηλαδή, ευθύγραμμα και ομαλά) ως προς οποιοδήποτε άλλο* ***ελεύθερο*** *σωμάτιο.*

Με άλλα λόγια, *η σχετική ταχύτητα μεταξύ ελεύθερων σωματίων είναι χρονικά σταθερή, και η σχετική τους επιτάχυνση είναι μηδέν (τα ελεύθερα σωμάτια δεν επιταχύνονται το ένα ως προς το άλλο).*

Φανταστείτε τώρα έναν παρατηρητή που είναι και ο ίδιος ελεύθερο «σωμάτιο» (αυτό ισχύει κατά προσέγγιση για κάποιον που βρίσκεται ακίνητος πάνω στην επιφάνεια της Γης). Ένας τέτοιος παρατηρητής ονομάζεται *αδρανειακός παρατηρητής*, και το σύστημα συντεταγμένων (π.χ., xyz) που χρησιμοποιεί καλείται *αδρανειακό σύστημα αναφοράς*. Σύμφωνα με το νόμο της αδράνειας,

> *διαφορετικοί αδρανειακοί παρατηρητές κινούνται με σταθερή ταχύτητα (δηλαδή, ευθύγραμμα και ομαλά) ο ένας ως προς τον άλλον (η σχετική τους ταχύτητα είναι χρονικά σταθερή, και η σχετική τους επιτάχυνση είναι μηδέν).*

Έτσι, για παράδειγμα, ο επιβάτης ενός λεωφορείου που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τη Γη είναι ένας αδρανειακός παρατηρητής, και ένα σύστημα αξόνων (x,y,z) μέσα στο λεωφορείο είναι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Με βάση το νόμο της αδράνειας, ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς μπορεί τώρα να χαρακτηριστεί ως εξής:

> *Αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι ένα σύστημα συντεταγμένων (ή αξόνων) ως προς το οποίο ένα* ***ελεύθερο*** *σωμάτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα (ευθύγραμμα και ομαλά), δηλαδή δεν επιταχύνεται.*

Σημειώνουμε ότι ο αδρανειακός παρατηρητής που χρησιμοποιεί το σύστημα αναφοράς είναι, εξ ορισμού, *ακίνητος* ως προς αυτό.

Ένα σύστημα αναφοράς που *επιταχύνεται* ως προς ένα αδρανειακό σύστημα, προφανώς *δεν* είναι αδρανειακό. Τούτο συμβαίνει, π.χ., με τη Γη λόγω της σύνθετης κίνησής της ως προς τον Ήλιο (αν θεωρήσουμε τον τελευταίο ως περίπου αδρανειακό σύστημα αναφοράς). Επειδή όμως η επιτάχυνση της Γης είναι σχετικά μικρή, μπορούμε για πρακτικούς λόγους να θεωρούμε προσεγγιστικά τη Γη σαν αδρανειακό σύστημα. Έτσι, *κάθε παρατηρητής που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τη Γη θα θεωρείται αδρανειακός παρατηρητής*.

3.2 Ορμή, Δύναμη, και Νόμοι του Νεύτωνα

Ως αφηρημένη έννοια, η *δύναμη* είναι ένα μέτρο της προσπάθειας που απαιτείται για να μεταβληθεί η κινητική κατάσταση ενός σώματος. Μια πρώτη σκέψη θα ήταν να ορίζαμε τη δύναμη ως ταυτόσημη με την επιτάχυνση. Από την εμπειρία μας, όμως, γνωρίζουμε ότι διαφορετικά σώματα απαιτούν γενικά διαφορετική προσπάθεια για να αποκτήσουν την ίδια επιτάχυνση ή, πιο απλά, την ίδια ταχύτητα μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα. (Προσπαθήστε, π.χ., να επιταχύνετε το ίδιο ένα βιβλίο και ένα αυτοκίνητο σπρώχνοντάς τα!) Αυτό συμβαίνει διότι διαφορετικά σώματα έχουν διαφορετική *αδράνεια*, δηλαδή εμφανίζουν διαφορετική αντίσταση στη μεταβολή της κινητικής τους κατάστασης. Η ιδιότητα αυτή, λοιπόν, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη στον ορισμό της δύναμης. Για το σκοπό αυτό, εισάγουμε ένα νέο φυσικό μέγεθος που το ονομάζουμε *γραμμική ορμή* ή απλά *ορμή* του θεωρούμενου σώματος:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{3.1}$$

όπου $\vec{v}$ η ταχύτητα του σώματος. Ο συντελεστής m ονομάζεται *μάζα* και είναι ένα μέτρο της αδράνειας του σώματος.

Ο λεγόμενος *δεύτερος νόμος του Νεύτωνα* (ή συνήθως απλά «*νόμος του Νεύτωνα*»), που ισχύει μόνο σε *αδρανειακά* συστήματα αναφοράς, ουσιαστικά *ορίζει* τη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα σαν το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \tag{3.2}$$

Αλλά,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

όπου η μάζα m του σώματος θεωρείται δεδομένη και σταθερή. Έτσι,

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \tag{3.3}$$

όπου $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ η επιτάχυνση του σώματος. Τονίζουμε ότι (α) η μορφή (3.3) του νόμου του Νεύτωνα ισχύει μόνο για σώμα με σταθερή μάζα, και (β) οι σχέσεις (3.2) και (3.3) ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι ο παρατηρητής που μετράει την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος είναι *αδρανειακός* παρατηρητής.

Η (3.3) είναι μια διανυσματική εξίσωση που ισοδυναμεί με τρεις αλγεβρικές εξισώσεις, μία για κάθε συνιστώσα των διανυσμάτων. Γράφουμε:

$$\vec{F} = F_x\hat{u}_x + F_y\hat{u}_y + F_z\hat{u}_z , \quad \vec{a} = a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y + a_z\hat{u}_z .$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στην (3.3) και εξισώνοντας αντίστοιχες συνιστώσες στα δύο μέλη, σύμφωνα με την (1.8), έχουμε

$$F_x = ma_x , \quad F_y = ma_y , \quad F_z = ma_z \tag{3.4}$$

Τώρα, σύμφωνα και με το νόμο της αδράνειας, η μεταβολή της κινητικής κατάστασης ενός σώματος προϋποθέτει αλληλεπίδραση του σώματος με τον υπόλοιπο κόσμο. Η δύναμη $\vec{F}$ είναι ακριβώς ένα μέτρο αυτής της αλληλεπίδρασης. Αν το σώμα δεν υπόκειται σε αλληλεπιδράσεις, τότε $\vec{F}=0$ και από την (3.3) συνάγεται ότι η ταχύτητα του σώματος ως προς *αδρανειακό* σύστημα αναφοράς είναι σταθερή (δεδομένου ότι η επιτάχυνση είναι μηδέν). Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα είναι απόλυτα συμβατός με το νόμο της αδράνειας, υπό την προϋπόθεση ότι οι νόμοι αυτοί εξετάζονται από τη σκοπιά ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Σύμφωνα με την (3.2), αν σε ένα σώμα δεν ασκείται δύναμη ($\vec{F}=0$), η ορμή $\vec{p}$ του σώματος μένει σταθερή, αφού $d\vec{p}/dt = 0$. Η πρόταση αυτή, που είναι ένας άλλος τρόπος διατύπωσης του νόμου της αδράνειας, αποτελεί την πιο απλή εκδοχή μιας γενικότερης αρχής που ονομάζεται *αρχή διατήρησης της ορμής*:

> *Όταν σε ένα σύστημα σωματιδίων δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, η ολική ορμή του συστήματος μένει σταθερή.*

Η αρχή αυτή (την οποία θα μελετήσουμε αναλυτικότερα στο Κεφ.6) μας οδηγεί σε έναν ακόμα νόμο του Νεύτωνα, και μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμη με το νόμο αυτό. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ένα σύστημα δύο σωματιδίων που υπόκεινται μόνο στην αμοιβαία τους αλληλεπίδραση (δεν υπάρχουν *εξωτερικές* δυνάμεις). Η ολική ορμή του συστήματος τις χρονικές στιγμές t και $t+\Delta t$ είναι

$$\vec{P}(t) = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 ,$$
$$\vec{P}(t+\Delta t) = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' = m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' .$$

Διατήρηση της ορμής σημαίνει ότι

$$\vec{P}(t) = \vec{P}(t+\Delta t) \;\Rightarrow\; \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' \;\Rightarrow$$
$$\vec{p}_1{}' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2{}' - \vec{p}_2) \;\Leftrightarrow\; \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \tag{3.5}$$

Έτσι,

$$\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} .$$

Αλλά, από την (3.2),

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt}=\vec{F}_{12}\ , \qquad \frac{d\vec{p}_2}{dt}=\vec{F}_{21}$$

όπου $\vec{F}_{12}$ η δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο *1* από το σωμάτιο *2*, και $\vec{F}_{21}$ η δύναμη στο σωμάτιο *2* από το σωμάτιο *1*. Άρα, τελικά,

$$\boxed{\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}} \qquad (3.6)$$

Η σχέση (3.6) εκφράζει τον *τρίτο νόμο του Νεύτωνα* ή *νόμο δράσης-αντίδρασης*. Προσέξτε ότι ο νόμος αυτός είναι άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ορμής, η οποία αρχή, με τη σειρά της, αποτελεί γενίκευση του νόμου της αδράνειας για ένα σύστημα σωματιδίων. Λαμβάνοντας υπόψη ότι και ο δεύτερος «νόμος» του Νεύτωνα (που είναι, κατ' ουσία, απλά ένας *ορισμός*, αυτός της έννοιας της δύναμης) αποτελεί μια λογική συνέχεια του πρώτου νόμου, αντιλαμβανόμαστε τη μεγάλη σπουδαιότητα του νόμου της αδράνειας στη θεμελίωση της Νευτώνειας Μηχανικής. Θα λέγαμε, με κάποιο ρίσκο υπερβολής, ότι ολόκληρο το οικοδόμημα της Μηχανικής στηρίζεται πάνω στο νόμο της αδράνειας!

Θα έχετε ίσως παρατηρήσει ότι ορίσαμε την ορμή, η οποία εμπεριέχει τη μάζα, χωρίς προηγουμένως να έχουμε επακριβώς ορίσει την ίδια τη μάζα. Θα περιγράψουμε τώρα μια μέθοδο προσδιορισμού της μάζας με βάση την αρχή διατήρησης της ορμής. Θεωρούμε και πάλι ένα *απομονωμένο* σύστημα (χωρίς, δηλαδή, εξωτερικές δυνάμεις) αποτελούμενο από δύο σωματίδια με μάζες m_1, m_2, τα οποία αλληλεπιδρούν (π.χ., συγκρούονται, ή, αν είναι ηλεκτρικά φορτισμένα, ασκούν δυνάμεις Coulomb το ένα στο άλλο, κλπ.). Έστω ότι, μέσα σε χρονικό διάστημα Δt, οι ορμές των m_1 και m_2 μεταβάλλονται κατά $\Delta\vec{p}_1$ και $\Delta\vec{p}_2$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τη σχέση (3.5), $\Delta\vec{p}_1=-\Delta\vec{p}_2$ ή

$$m_1\Delta\vec{v}_1=-m_2\Delta\vec{v}_2 \qquad (3.7)$$

Παίρνοντας τα μέτρα των διανυσμάτων στα δύο μέλη, έχουμε:

$$m_1\left|\Delta\vec{v}_1\right|=m_2\left|\Delta\vec{v}_2\right| \ \Rightarrow$$
$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{\left|\Delta\vec{v}_1\right|}{\left|\Delta\vec{v}_2\right|} \qquad (3.8)$$

Αποδεικνύεται πειραματικά ότι ο λόγος των μέτρων στο δεξί μέλος τής (3.8) παίρνει πάντα την ίδια τιμή για δοσμένα σωματίδια m_1 και m_2 , ανεξάρτητα από τον τρόπο ή το χρόνο αλληλεπίδρασής τους. Επίσης, τα διανύσματα $\Delta\vec{v}_1$ και $\Delta\vec{v}_2$ βρίσκεται πως έχουν αντίθετες κατευθύνσεις, σε συμφωνία με την (3.7). Επιβεβαιώνεται έτσι ότι, σε κάθε σωματίδιο του συστήματος αντιστοιχεί μια σταθερή ποσότητα *m*, η μάζα του, τέτοια ώστε το άθροισμα $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$ να μένει σταθερό όταν τα σωματίδια υπόκεινται μόνο στην αμοιβαία τους αλληλεπίδραση (αρχή διατήρησης της ορμής). Η σχέση (3.8), τώρα, μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε το λόγο m_2/m_1 μετρώντας πειραματικά το λόγο των μέτρων των $\Delta\vec{v}_1$ και $\Delta\vec{v}_2$. Έτσι, ορίζοντας *αυθαίρετα* τη μάζα του σωματιδίου *1* ίση με τη μονάδα, προσδιορίζουμε τη μάζα του σωματιδίου *2* ως εξής: αφήνουμε τα δύο σωματίδια να αλληλεπιδράσουν για ένα χρονικό διάστημα Δt και, αφού μετρήσουμε τις (διανυσματικές) μεταβολές των ταχυτήτων τους στο διάστημα αυτό, υπολογίζουμε το λόγο των μέτρων των μεταβολών αυτών. Το αποτέλεσμα δίνει (αριθμητικά) τη μάζα m_2 του σωματιδίου *2* (αφού, εξ ορισμού, η m_1 λαμβάνεται ως μονάδα). Με όμοιο τρόπο προσδιορίζουμε, γενικά, τη μάζα m οποιουδήποτε σωματιδίου, αφήνοντάς το να αλληλεπιδράσει με ένα σωματίδιο γνωστής μάζας. Μετρώντας τη στιγμιαία επιτάχυνση $\vec{a}$ του σωματιδίου m, βρίσκουμε την αντίστοιχη στιγμιαία δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται πάνω του με χρήση του νόμου του Νεύτωνα (3.3).

Στο σύστημα S.I., η μονάδα μάζας είναι το $1kg$=$10^3\,g$, ενώ η μονάδα δύναμης είναι το $1Newton$=$1N$=$1kg.m.s^{-2}$.

Έστω τώρα ότι ένα σώμα μάζας m υπόκειται σε διάφορες αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον του, οι οποίες αντιστοιχούν στις δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$. Το διανυσματικό άθροισμα

$$\sum_i \vec{F}_i \equiv \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$

αποτελεί τη *συνισταμένη δύναμη* που δρα πάνω στο σώμα. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τότε τη μορφή

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\vec{a}} \qquad (3.9)$$

Έστω a_x, a_y, a_z οι συνιστώσες της επιτάχυνσης $\vec{a}$. Σύμφωνα με τη σχέση (1.10), οι συνιστώσες της συνισταμένης δύναμης $\Sigma\vec{F}$ είναι ΣF_x , ΣF_y , ΣF_z , όπου ΣF_x το άθροισμα των x-συνιστωσών των $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, κλπ. Εξισώνοντας αντίστοιχες συνιστώσες στα μέλη τής (3.9), έχουμε

$$\boxed{\sum F_x = ma_x\,, \quad \sum F_y = ma_y\,, \quad \sum F_z = ma_z} \qquad (3.10)$$

Για παράδειγμα, έστω ότι ένα σώμα μάζας m=$2kg$ υπόκειται στις δυνάμεις $\vec{F}_1 \equiv (3,1,-1)N$ και $\vec{F}_2 \equiv (-1,3,-1)N$. Η συνισταμένη δύναμη είναι

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \equiv (2,4,-2)N$$

έτσι ώστε ΣF_x=$2N$, ΣF_y=$4N$, ΣF_z= $-2N$. Από τις (3.10) βρίσκουμε την επιτάχυνση του σώματος: $\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z) \equiv (1,2,-1)\ m \cdot s^{-2}$.

Λέμε ότι ένα σώμα βρίσκεται σε *ισορροπία* αν η συνισταμένη δύναμη πάνω του είναι μηδέν: $\Sigma\vec{F} = 0$. Προσέξτε ότι ισορροπία *δεν* σημαίνει απαραίτητα *ακινησία* ($\vec{v} = 0$): Σύμφωνα με την (3.9), ένα σώμα που ισορροπεί απλά δεν επιταχύνεται ($\vec{a} = 0$) , δηλαδή, είτε κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, είτε, αν είναι αρχικά ακίνητο, παραμένει ακίνητο. Αντίστροφα, ένα σώμα μπορεί να είναι *στιγμιαία* ακίνητο αλλά να μην βρίσκεται σε ισορροπία. Η ολική δύναμη που δρα σε αυτό, τότε, θα προκαλέσει επιτάχυνση η οποία θα θέσει το σώμα σε κίνηση την αμέσως επόμενη στιγμή. (Για παράδειγμα, αν πετάξουμε μια πέτρα προς τα πάνω, αυτή θα σταματήσει στιγμιαία μόλις φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος και αμέσως μετά θα κινηθεί προς τα κάτω υπό την επίδραση της βαρύτητας.)

Σημειώσαμε νωρίτερα ότι ένα σώμα με πεπερασμένες διαστάσεις μπορεί να αντιμετωπίζεται σαν σημειακό σωματίδιο όταν η κίνησή του είναι αμιγώς μεταφορική (δεν περιστρέφεται). Μια τέτοια κίνηση εξαρτάται μόνο από τη συνισταμένη δύναμη που δρα στο σώμα, χωρίς να μας ενδιαφέρει σε ποια ακριβώς σημεία του σώματος ασκούνται οι επιμέρους δυνάμεις. Αντίθετα, όπως θα δούμε αργότερα (Κεφ.7), τα σημεία εφαρμογής των επιμέρους δυνάμεων έχουν μεγάλη σημασία για την περιστροφική κίνηση του σώματος, αφού η κίνηση αυτή καθορίζεται από την ολική *ροπή* που ασκείται στο σώμα.

3.3 Δύναμη Βαρύτητας

Κοντά στην επιφάνεια της Γης, όλα τα σώματα πέφτουν προς τη Γη με την ίδια επιτάχυνση $\vec{g}$ (αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα) που ονομάζεται *επιτάχυνση της βαρύτητας* και έχει μέτρο $g \simeq 9.8\ m \cdot s^{-2}$. Η δύναμη της βαρυτικής έλξης που υφίσταται ένα σώμα από τη Γη ονομάζεται *βάρος* του σώματος και θα συμβολίζεται με $\vec{w}$. Αν m είναι η μάζα του σώματος, τότε, σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα,

$$\vec{w} = m\vec{g} \tag{3.11}$$

Για μεγαλύτερες αποστάσεις από την επιφάνεια της Γης, η τιμή τού g (άρα και του βάρους ενός σώματος) μεταβάλλεται σαν συνάρτηση της απόστασης από τη Γη. Καλούμε M και R τη μάζα και την ακτίνα της Γης, και h το ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης για το οποίο θέλουμε να προσδιορίσουμε το g. Σύμφωνα με το *νόμο της βαρύτητας* του Νεύτωνα, η βαρυτική έλξη που υφίσταται ένα σώμα μάζας m στο ύψος αυτό είναι, κατά μέτρο,

$$w = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \tag{3.12}$$

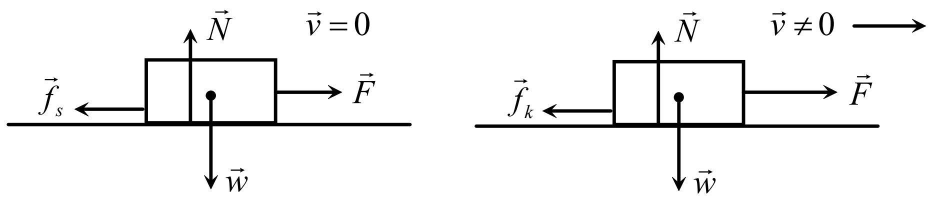
όπου G μια σταθερά. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $w=mg$, βρίσκουμε ότι

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2} \tag{3.13}$$

Προσέξτε ότι το πηλίκο w/m, που παριστά την *ένταση* του βαρυτικού πεδίου στη θεωρούμενη θέση, παριστά επίσης και την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Σύμφωνα με την (3.13), το g είναι ανεξάρτητο από τη μάζα m του σώματος. Το ότι, γενικά, η ένταση ενός πεδίου είναι ανεξάρτητη από το υπόθεμα (π.χ., μάζα m, ηλεκτρικό φορτίο q, κλπ.) το οποίο υφίσταται δύναμη από το πεδίο, είναι αναμενόμενο. Το ότι, όμως, η επιτάχυνση του υποθέματος, σε κάθε σημείο του χώρου, είναι ανεξάρτητη από τις φυσικές ιδιότητές του και ίδια για όλα τα υποθέματα στο σημείο αυτό, είναι χαρακτηριστική ιδιότητα του βαρυτικού πεδίου και ισχύει όταν το πεδίο αυτό είναι το μόνο που επιδρά πάνω στο υπόθεμα στη θεωρούμενη περιοχή του χώρου.

3.4 Δυνάμεις Τριβής

Η *τριβή* είναι δύναμη που τείνει να εμποδίσει την ολίσθηση μιας επιφάνειας πάνω σε μια άλλη. Είναι αθροιστικό αποτέλεσμα πολλών μικροσκοπικών αλληλεπιδράσεων ηλεκτρομαγνητικής φύσης ανάμεσα στα άτομα ή μόρια των δύο επιφανειών.



Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ένα κιβώτιο βάρους $\vec{w}$ πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια. Αρχικά το κιβώτιο ισορροπεί υπό την επίδραση δύο δυνάμεων: του βάρους του και της κάθετης αντίδρασης $\vec{N}$ από την επιφάνεια. Λόγω της ισορροπίας, η συνισταμένη δύναμη στο κιβώτιο είναι μηδέν: $\vec{N}+\vec{w}=0 \Leftrightarrow \vec{N}=-\vec{w}$.

Σπρώχνουμε τώρα το κιβώτιο προς τα δεξιά με μια δύναμη $\vec{F}$, η οποία μπορεί να μεταβάλλεται (βλ. σχήμα). Το κιβώτιο «θέλει» να ολισθήσει προς τα δεξιά, αλλά υπάρχει μια δύναμη $\vec{f}$ που αντιτίθεται σε αυτό: η τριβή, που έχει φορά προς τα αριστερά. Αν η $\vec{F}$ δεν είναι αρκετά μεγάλη, η $\vec{f}$ καταφέρνει να την εξουδετερώσει και το κιβώτιο παραμένει ακίνητο. Λέμε τότε ότι η $\vec{f}$ είναι *στατική τριβή* και τη συμβολίζουμε με $\vec{f}_s$. Προφανώς, $\vec{F}+\vec{f}_s=0$. Ανάλογα με την εφαρμοζόμενη δύναμη $\vec{F}$, η $\vec{f}_s$ κυμαίνεται από μηδέν (όταν $\vec{F}=0$) μέχρι μια μέγιστη τιμή $\vec{f}_{s,\max}$.

Όταν η $\vec{F}$ ξεπεράσει (κατά μέτρο) την $\vec{f}_{s,\max}$, το κιβώτιο τίθεται σε κίνηση και επιταχύνεται προς τα δεξιά. Η τριβή τότε ελαττώνεται από $\vec{f}_{s,\max}$ σε μια νέα, σταθερή τιμή $\vec{f}_k$ (επίσης προς τα αριστερά) που αντιτίθεται στην κίνηση και ονομάζεται *κινητική τριβή*. Η ολική δύναμη στο κιβώτιο κατά την κίνηση είναι $\vec{F}_{o\lambda}=\vec{F}+\vec{f}_k$. Αν υποθέσουμε ότι το κιβώτιο κινείται στη θετική κατεύθυνση του άξονα *x*, τότε

$$\vec{F}=\left|\vec{F}\right|\hat{u}_x=F\,\hat{u}_x\,,\quad \vec{f}_k=-\left|\vec{f}_k\right|\hat{u}_x=-f_k\,\hat{u}_x$$

και

$$\vec{F}_{o\lambda}=F\,\hat{u}_x+(-f_k)\,\hat{u}_x=(F-f_k)\,\hat{u}_x \qquad (3.14)$$

Διαιρώντας την $\vec{F}_{o\lambda}$ με τη μάζα *m* του κιβώτιου, βρίσκουμε την επιτάχυνσή του $\vec{a}$. Στην οριακή περίπτωση που F=f_k, η $\vec{F}_{o\lambda}$ είναι μηδέν και το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Αν αποσύρουμε τη δύναμη $\vec{F}$, η τριβή $\vec{f}_k$ επιβραδύνει το σώμα ώσπου τελικά αυτό παύει να κινείται.

Όπως βρίσκεται πειραματικά, τόσο το μέτρο $f_{s,\max}$ της *μέγιστης* στατικής τριβής, όσο και το μέτρο f_k της κινητικής τριβής, είναι ανάλογα του μέτρου N της κάθετης αντίδρασης από την επιφάνεια στο σώμα. Έτσι, οι δυνατές τιμές της στατικής τριβής είναι

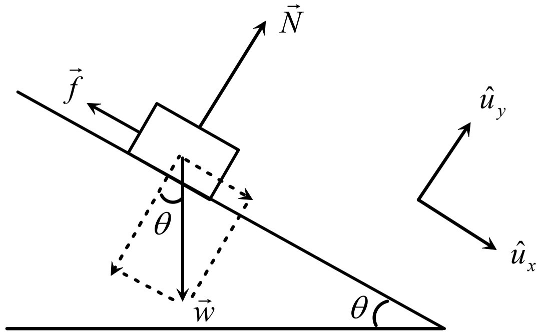
$$\boxed{0 \le f_s \le f_{s,\max} = \mu_s N} \tag{3.15}$$

ενώ η τιμή της κινητικής τριβής είναι

$$\boxed{f_k = \mu_k N} \tag{3.16}$$

όπου μ_s και μ_k οι *συντελεστές τριβής* (στατικής και κινητικής, αντίστοιχα), με $\mu_k < \mu_s$. Προσέξτε ότι τα μ_s και μ_k είναι *αδιάστατες* ποσότητες (καθαροί αριθμοί). Οι συντελεστές αυτοί εξαρτώνται από τη φύση των δύο επιφανειών, και τυπικά κυμαίνονται μεταξύ 0.05 και 1.5 .

Περιγράφουμε τώρα μια μέθοδο πειραματικού προσδιορισμού των συντελεστών τριβής μεταξύ δύο επιφανειών :



Θεωρούμε κεκλιμένο επίπεδο μεταβλητής γωνίας *θ*, πάνω στο οποίο έχουμε τοποθετήσει κιβώτιο μάζας *m* . Για μικρές τιμές της γωνίας *θ* το κιβώτιο μένει ακίνητο, διότι η στατική τριβή f_s εξουδετερώνει τη συνιστώσα $w_x = mg\sin\theta$ του βάρους κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Αυξάνοντας βαθμιαία τη γωνία *θ*, παρατηρούμε ότι το κιβώτιο παραμένει ακίνητο μέχρις ότου η γωνία ξεπεράσει μια οριακή τιμή $\theta=\theta_c$, οπότε το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει.

Το σώμα υπόκειται σε τρεις δυνάμεις: το βάρος του, $\vec{w} = m\vec{g}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο, και την τριβή $\vec{f}$ (στατική $\vec{f}_s$ ή κινητική $\vec{f}_k$, ανάλογα αν $\vec{v} = 0$ ή $\vec{v} \ne 0$, αντίστοιχα). Για λόγους ευκολίας, αναλύουμε το βάρος σε δύο κάθετες συνιστώσες: την $w_x = mg\sin\theta$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, και την $w_y = mg\cos\theta$ κάθετη σε αυτό. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Για $\theta \le \theta_c$, το σώμα ισορροπεί ακίνητο. Η συνθήκη ισορροπίας είναι

$$\sum \vec{F} = \vec{w} + \vec{N} + \vec{f}_s = 0$$

ή, σε συνιστώσες,

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; mg\sin\theta - f_s = 0 \;\Rightarrow\; mg\sin\theta = f_s$$
$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; N - mg\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; mg\cos\theta = N$$

Διαιρώντας κατά μέλη,

$$\tan\theta = \frac{f_s}{N} \;\Rightarrow\; f_s = N\tan\theta \quad .$$

Αλλά,

$$f_s \le f_{s,\max} \;\Rightarrow\; N\tan\theta \le \mu_s N \;\Rightarrow\; \tan\theta \le \mu_s \quad .$$

Στην οριακή περίπτωση $\theta = \theta_c$, έχουμε ότι $f_s = f_{s,\max}$ και

$$\tan\theta_c = \mu_s \tag{3.17}$$

Μετρώντας τη γωνία θ_c, προσδιορίζουμε το συντελεστή μ_s.

β) Για $\theta > \theta_c$, το σώμα κινείται επιταχυνόμενο κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Η τριβή τώρα είναι κινητική. Αν ελαττώσουμε βαθμιαία τη γωνία θ, θα βρούμε κάποια τιμή $\theta_c' < \theta_c$ τέτοια ώστε το σώμα να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Από το νόμο του Νεύτωνα (λαμβάνοντας υπόψη ότι το σώμα δεν επιταχύνεται), έχουμε

$$\sum \vec{F} = \vec{w} + \vec{N} + \vec{f}_k = 0 \quad .$$

Παίρνοντας συνιστώσες, όπως πριν, βρίσκουμε

$$mg\sin\theta_c' = f_k = \mu_k N\,, \quad mg\cos\theta_c' = N$$

και διαιρώντας κατά μέλη,

$$\tan\theta_c' = \mu_k \tag{3.18}$$

Το γεγονός ότι $\theta_c' < \theta_c$, σε συνδυασμό με τις (3.17) και (3.18), μας δείχνει ότι $\mu_k < \mu_s$. Αυτό σημαίνει ότι $f_k < f_{s,\max}$.

3.5 Συστήματα με Μεταβλητές Μάζες

Στην περίπτωση ενός σημειακού σωματιδίου ή ενός σταθερού σώματος μάζας m, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί με δύο ισοδύναμους τρόπους :

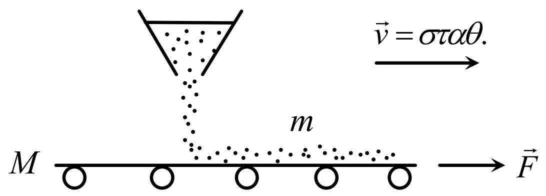
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = m\vec{a} \quad (\beta)$$

Στην περίπτωση, όμως, ενός *συστήματος* σωματιδίων που κινούνται ανεξάρτητα, η σχέση (β) δεν είναι εφαρμόσιμη, αφού δεν προσδιορίζει τι ακριβώς παριστά η επιτάχυνση $\vec{a}$ (στο Κεφάλαιο 6, όμως, θα δούμε ότι η σχέση αυτή αποκτά νόημα με την εισαγωγή της έννοιας του κέντρου μάζας). Έτσι, στη μηχανική των συστημάτων χρησιμοποιούμε, γενικά, τη σχέση (α), στη μορφή

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{3.19}$$

όπου $\vec{P}$ η ολική ορμή του συστήματος τη χρονική στιγμή t, και $\vec{F}$ η ολική *εξωτερική* δύναμη που δρα στο σύστημα τη στιγμή αυτή (θα αποδείξουμε αναλυτικά τη σχέση αυτή στο Κεφ.6).

Υπάρχουν συστήματα των οποίων *τα μέρη* έχουν μεταβλητές μάζες λόγω ανακατανομής της ολικής μάζας του συστήματος (η οποία, για το χρονικό διάστημα που μας ενδιαφέρει, μένει *σταθερή*). Σαν απλό παράδειγμα του τρόπου εργασίας μας σε τέτοιες περιπτώσεις, θεωρούμε μια κινούμενη πλατφόρμα πάνω στην οποία πέφτει άμμος με αμελητέα ταχύτητα και με ρυθμό α *kg/s*. Θέλουμε να βρούμε τη δύναμη $\vec{F}$ που πρέπει να ασκήσουμε στην πλατφόρμα έτσι ώστε αυτή να κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$.



Καλούμε M τη (σταθερή) μάζα της πλατφόρμας, m τη μάζα της άμμου που έχει ήδη πέσει στην πλατφόρμα τη χρονική στιγμή t, και dm την επιπλέον μάζα άμμου που πέφτει μέσα σε χρονικό διάστημα dt. Από τα δεδομένα του προβλήματος,

$$\frac{dm}{dt} = \alpha \quad (kg/s) \tag{3.20}$$

Τώρα, για να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.19) θα πρέπει πρώτα να αποφασίσουμε σε ποιο ακριβώς σύστημα μαζών θα την εφαρμόσουμε. Η *ολική* μάζα του συστήματος αυτού μένει *σταθερή* μέσα στο χρονικό διάστημα dt, αλλά υφίσταται ανακατανομή. Σαν σύστημα θεωρούμε αυτό που αποτελείται από τα M, m και dm. Τη χρονική στιγμή t, η μάζα (M+m) κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ ενώ η dm είναι σχεδόν ακίνητη (η ποσότητα αυτή δεν έχει πέσει ακόμα πάνω στην πλατφόρμα). Τη στιγμή t+dt, όμως, η συνολική μάζα (M+m+dm) κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$. Αν $\vec{P}(t)$ και $\vec{P}(t+dt)$ είναι η ολική ορμή του συστήματος τις δύο αυτές χρονικές στιγμές, έχουμε:

$$\vec{P}(t) = (M+m)\vec{v} + (dm)\cdot 0 \ , \qquad \vec{P}(t+dt) = (M+m+dm)\vec{v} \ .$$

Η μεταβολή της ορμής του συστήματος μέσα στο διάστημα dt είναι

$$d\vec{P} = \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = (dm)\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} = \alpha\vec{v}$$

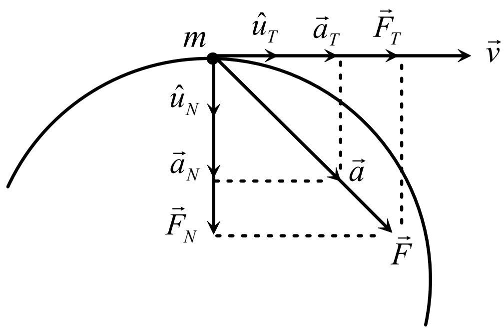
όπου χρησιμοποιήσαμε την (3.20). Σύμφωνα με την (3.19), το $d\vec{P}/dt$ παριστά την ολική εξωτερική δύναμη στο σύστημα τη χρονική στιγμή t, που δεν είναι άλλη από τη δύναμη $\vec{F}$ που ασκούμε στην πλατφόρμα. Έτσι,

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} = \alpha\,\vec{v} \tag{3.21}$$

Προσέξτε στην (3.21) ότι η δύναμη είναι ανάλογη όχι της επιτάχυνσης (η οποία εδώ είναι μηδέν), αλλά της ταχύτητας!

3.6 Επιτρόχια και Κεντρομόλος Δύναμη

Θυμίζουμε (Παρ.2.6) ότι η επιτάχυνση $\vec{a}$ στην καμπυλόγραμμη κίνηση μπορεί, γενικά, να αναλυθεί σε επιτρόχια συνιστώσα $\vec{a}_T$, εφαπτόμενη στην τροχιά, και κεντρομόλο συνιστώσα $\vec{a}_N$, κάθετη στην τροχιά:



$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = a_T\,\hat{u}_T + a_N\,\hat{u}_N \tag{3.22}$$

όπου

$$a_T = \frac{dv}{dt} \ , \qquad a_N = \frac{v^2}{\rho} \tag{3.23}$$

($v = \pm|\vec{v}|$ και ρ=*ακτίνα καμπυλότητας*). Συνδυάζοντας την (3.22) με το νόμο του Νεύτωνα, βρίσκουμε την έκφραση για την ολική (συνισταμένη) δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται σε σωματίδιο μάζας m το οποίο εκτελεί καμπυλόγραμμη κίνηση:

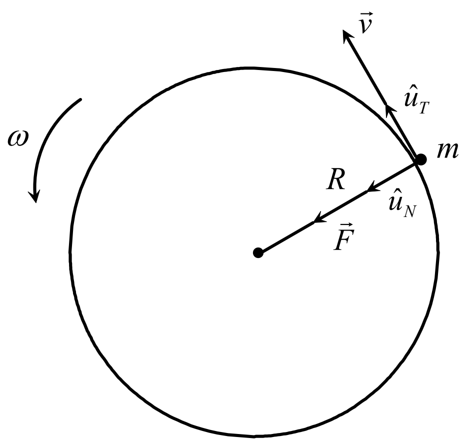
$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{F}_N = F_T\,\hat{u}_T + F_N\,\hat{u}_N \tag{3.24}$$

όπου

$$\boxed{F_T = ma_T = m\frac{dv}{dt} \quad , \quad F_N = ma_N = m\frac{v^2}{\rho}} \qquad (3.25)$$

Η *επιτρόχια* συνιστώσα $\vec{F}_T$ είναι υπεύθυνη για τη μεταβολή του *μέτρου* της ταχύτητας, ενώ η *κεντρομόλος* συνιστώσα $\vec{F}_N$ ευθύνεται για τη μεταβολή της *διεύθυνσης* της ταχύτητας.

Στην περίπτωση που η ολική δύναμη $\vec{F}$ είναι *κάθετη* στην τροχιά (δηλαδή, κάθετη στην ταχύτητα του σωματιδίου), έχουμε ότι $F_T = 0$ και, σύμφωνα με την πρώτη από τις εξισ.(3.25), το *μέτρο* της ταχύτητας μένει σταθερό (παρόλο που η διεύθυνσή της μεταβάλλεται). Με άλλα λόγια, η κίνηση είναι *ομαλή καμπυλόγραμμη*. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η *ομαλή κυκλική κίνηση*, στην οποία η ολική δύναμη $\vec{F}$ είναι εξ ολοκλήρου κεντρομόλος και διέρχεται πάντα από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς:



$\rho = R = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$
$\omega = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$
$v = R\omega = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$

Από τις σχέσεις (3.24) και (3.25) έχουμε, στην περίπτωση αυτή,

$$\boxed{\vec{F} = m\frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N = mR\,\omega^2\,\hat{u}_N} \qquad (3.26)$$

Άσκηση: Δείξτε ότι μια επίπεδη, ομαλή καμπυλόγραμμη κίνηση που λαμβάνει χώρα κάτω από την επίδραση ολικής δύναμης σταθερού μέτρου, είναι ομαλή κυκλική κίνηση. (Υπόδειξη: Ποια χαρακτηριστική ιδιότητα έχει η ακτίνα καμπυλότητας σε μια τέτοια κίνηση;)

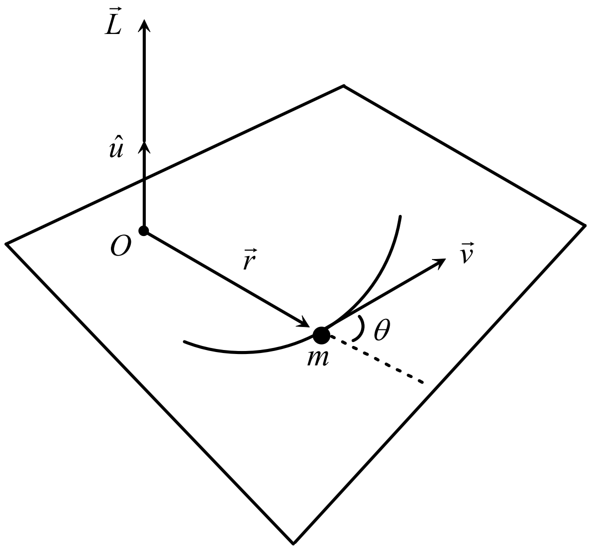
3.7 Στροφορμή και Ροπή Δύναμης ως προς Σημείο

Θεωρούμε σωματίδιο μάζας m που εκτελεί γενικά καμπυλόγραμμη κίνηση στο χώρο. Η στιγμιαία θέση του προσδιορίζεται με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς τη σταθερή αρχή O ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς (θυμίζουμε ότι μόνο σε ένα τέτοιο σύστημα ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα). Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του σωματιδίου σε κάποιο σημείο της τροχιάς. Η ορμή του στο σημείο αυτό είναι $\vec{p} = m\vec{v}$.

Η *στροφορμή* του σωματιδίου *ως προς το σημείο O* ορίζεται σαν το εξωτερικό γινόμενο

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})} \tag{3.27}$$

Προσέξτε ότι, σε αντίθεση με την ορμή, η στροφορμή $\vec{L}$ δεν ορίζεται με απόλυτο τρόπο, αφού εξαρτάται πάντα από την εκλογή του σημείου αναφοράς *O*.



Το διάνυσμα $\vec{L}$ είναι κάθετο στο στιγμιαίο επίπεδο που ορίζεται από τα $\vec{r}$ και $\vec{v}$, και η φορά του καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Ο κανόνας αυτός μπορεί εδώ να αναδιατυπωθεί ως εξής: Αν λυγίσουμε τα τέσσερα δάχτυλα του δεξιού χεριού κατά τη φορά που περιστρέφεται στιγμιαία το *m* ως προς το *O*, ο τεντωμένος αντίχειρας θα δείχνει στην κατεύθυνση του $\vec{L}$. (Προσέξτε ότι η διατύπωση αυτή είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του εξωτερικού γινομένου που δόθηκε στην Παρ.1.5.) Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τα $\vec{r}$ και $\vec{v}$ (όπου $0 \le \theta \le \pi$), και αν καλέσουμε r και v τα μέτρα των $\vec{r}$ και $\vec{v}$, αντίστοιχα, τότε το μέτρο της στροφορμής δίνεται από τη σχέση

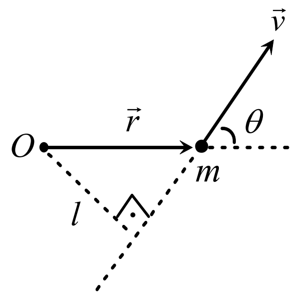
$$\left|\vec{L}\right| = mrv\sin\theta \tag{3.28}$$

Ορίζουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}$ κάθετο στο επίπεδο των $\vec{r}$ και $\vec{v}$, εκλέγοντας τη φορά του αυθαίρετα. Μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\vec{L} = \pm\left|\vec{L}\right|\hat{u} \equiv L\hat{u} \tag{3.29}$$

όπου L η *αλγεβρική τιμή* τής $\vec{L}$ ως προς το $\hat{u}$. Παρατηρούμε ότι το $\hat{u}$ καθορίζει μια θετική φορά στιγμιαίας περιστροφής ως προς το *O* με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού. Έτσι, στο παραπάνω σχήμα η *αριστερόστροφη* κίνηση ως προς *O* είναι στη θετική κατεύθυνση, διότι εκλέξαμε τη φορά τού $\hat{u}$ προς τα *πάνω* (αν εκλέγαμε το $\hat{u}$ προς τα κάτω, θετική φορά κίνησης θα ήταν η δεξιόστροφη ως προς *O*). Στο σχήμα, το σωμάτιο *m* κινείται σύμφωνα με τη θετική φορά και ισχύει ότι $L>0$.

Μια εναλλακτική έκφραση για το μέτρο της στροφορμής βρίσκεται ως εξής:



Παρατηρούμε ότι $r\sin\theta = l$, όπου l η κάθετη απόσταση του O από τον άξονα του $\vec{v}$. Έτσι, η (3.28) γράφεται

$$\left|\vec{L}\right| = mvl \tag{3.30}$$

(Προσέξτε ότι το διάνυσμα $\vec{L}$ είναι κάθετο στη σελίδα με φορά προς τα *έξω*, δηλαδή προς εμάς. Ποια θα ήταν η φορά τού $\vec{L}$ αν αντιστρέφαμε τη φορά τού $\vec{v}$;)

Οι ορθογώνιες συνιστώσες της στροφορμής βρίσκονται με τη βοήθεια της σχέσης (1.23): Αν (x,y,z) και (p_x, p_y, p_z) είναι οι συνιστώσες των $\vec{r}$ και $\vec{p}$, αντίστοιχα, τότε

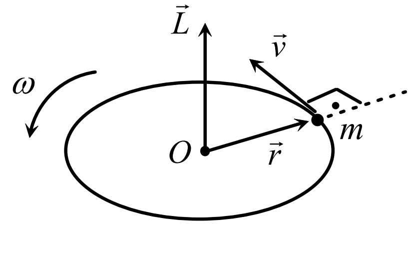
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = L_x\,\hat{u}_x + L_y\,\hat{u}_y + L_z\,\hat{u}_z$$

όπου

$$L_x = yp_z - zp_y\ , \quad L_y = zp_x - xp_z\ , \quad L_z = xp_y - yp_x \tag{3.31}$$

Ειδικά, αν η κίνηση γίνεται στο επίπεδο xy, τότε z=0 και p_z=0, έτσι ώστε L_x=L_y=0 και η $\vec{L}$ είναι στη διεύθυνση του άξονα z.

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση που το σωματίδιο εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R γύρω από το O:

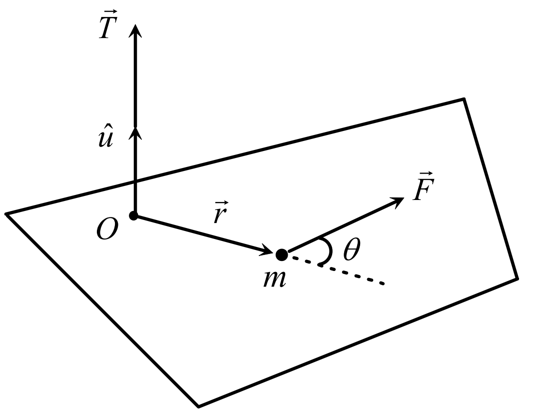


Παρατηρούμε ότι $\theta = \pi/2$ και $r = l = R$. Η στροφορμή $\vec{L}$ του m ως προς το O είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο του κύκλου, με φορά που εξαρτάται από τη φορά της κίνησης. Από την (3.28) ή την (3.30), και από τη σχέση v=$R\omega$, έχουμε ότι

$$\left|\vec{L}\right| = mRv = mR^2\omega \qquad (3.32)$$

Επιστρέφοντας στη γενική περίπτωση καμπυλόγραμμης κίνησης, καλούμε $\vec{F}$ τη συνισταμένη δύναμη στο *m* στη θεωρούμενη θέση $\vec{r}$ της τροχιάς του. Η *ροπή* της δύναμης $\vec{F}$ *ως προς το σημείο O* ορίζεται σαν το εξωτερικό γινόμενο

$$\boxed{\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad (3.33)$$



Το διάνυσμα $\vec{T}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των $\vec{r}$ και $\vec{F}$, και η φορά του καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού: Αν λυγίσουμε τα τέσσερα δάχτυλα του δεξιού χεριού κατά τη φορά που *τείνει* να περιστρέψει η $\vec{F}$ το *m* ως προς το *O*, ο τεντωμένος αντίχειρας θα δείχνει στην κατεύθυνση του $\vec{T}$. Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τα $\vec{r}$ και $\vec{F}$ (όπου $0 \le \theta \le \pi$), και αν καλέσουμε *r* και *F* τα μέτρα των $\vec{r}$ και $\vec{F}$, αντίστοιχα, τότε το μέτρο της ροπής είναι

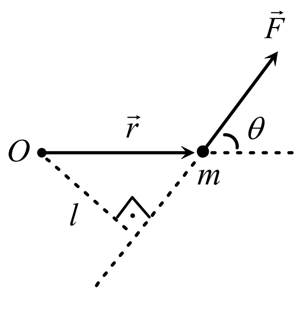
$$\left|\vec{T}\right| = rF\sin\theta \qquad (3.34)$$

Αν $\hat{u}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των $\vec{r}$ και $\vec{F}$ (με φορά εκλεγμένη αυθαίρετα), γράφουμε

$$\vec{T} = \pm\left|\vec{T}\right|\hat{u} \equiv T\hat{u} \qquad (3.35)$$

όπου T η αλγεβρική τιμή τής $\vec{T}$ ως προς το $\hat{u}$.

Μια εναλλακτική έκφραση για το μέτρο της ροπής βρίσκεται ως εξής:



Παρατηρούμε ότι $r\sin\theta = l$, όπου l η κάθετη απόσταση του O από τον άξονα της $\vec{F}$. Η (3.34), έτσι, γράφεται

$$\left|\vec{T}\right| = Fl \tag{3.36}$$

Κατ' αναλογία με την (3.31), οι ορθογώνιες συνιστώσες τής $\vec{T}$ είναι

$$T_x = yF_z - zF_y \ , \quad T_y = zF_x - xF_z \ , \quad T_z = xF_y - yF_x \tag{3.37}$$

Ανάμεσα στη στροφορμή και τη ροπή υπάρχει μια σχέση ανάλογη με αυτήν ανάμεσα στην ορμή και τη δύναμη, $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Παραγωγίζοντας τη στροφορμή ως προς t, έχουμε:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} \ + \ \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

(προσέξτε ότι, κατά την παραγώγιση, δεν αλλάζουμε τη σειρά με την οποία γράφονται τα $\vec{r}$ και $\vec{p}$, αφού το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι αντιμεταθετικό). Αλλά,

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} = \vec{v}\times\vec{p} = \vec{v}\times(m\vec{v}) = m(\vec{v}\times\vec{v}) = 0 \ .$$

Επίσης, από το νόμο του Νεύτωνα (3.2) και τον ορισμό της ροπής (3.33),

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{T}$$

όπου, από υπόθεση, η $\vec{F}$ είναι η *συνισταμένη* δύναμη στο m. Άρα, τελικά,

$$\boxed{\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \tag{3.38}$$

Προσέξτε ότι η παραπάνω εξίσωση ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι τα $\vec{L}$ και $\vec{T}$ λαμβάνονται *ως προς το ίδιο σημείο Ο*, το οποίο αποτελεί αρχή των συντεταγμένων για το αδρανειακό σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιούμε. Προσέξτε επίσης ότι η (3.38) είναι άμεση συνέπεια του νόμου του Νεύτωνα, δεν αποτελεί δηλαδή ένα νέο θεμελιώδες αξίωμα της Μηχανικής.

Στην περίπτωση που $\vec{T} = 0$, η (3.38) δίνει

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{L} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o' \ .$$

Οδηγούμαστε έτσι στην *αρχή διατήρησης της στροφορμής*:

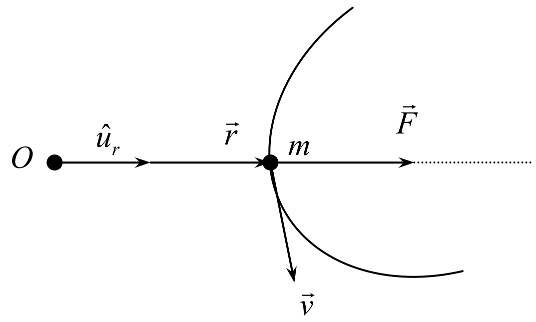
> *Όταν η ροπή της ολικής δύναμης σε ένα σωμάτιο, ως προς κάποιο σημείο, είναι μηδέν, η στροφορμή του σωματίου ως προς το σημείο αυτό μένει σταθερή.*

Είναι δυνατό, βέβαια, να υπάρχουν άλλα σημεία ως προς τα οποία ούτε η ροπή να μηδενίζεται, ούτε η στροφορμή να μένει σταθερή!

Άσκηση: Στο σημείο O βρίσκεται σταθερά τοποθετημένο ένα ηλεκτρικό φορτίο Q, ενώ ένα άλλο φορτίο q κινείται ελεύθερα στο χώρο. Αγνοώντας το βάρος τού q και την αντίσταση του αέρα, δείξτε ότι η στροφορμή τού q ως προς το O μένει σταθερή. Ισχύει το ίδιο για τη στροφορμή ως προς ένα διαφορετικό σημείο O' ;

3.8 Κεντρικές Δυνάμεις

Θεωρούμε σωματίδιο μάζας m που εκτελεί καμπυλόγραμμη κίνηση κάτω από την επίδραση κάποιας δύναμης $\vec{F}$. Η στιγμιαία θέση τού m προσδιορίζεται με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς την αρχή των συντεταγμένων O ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Η δύναμη $\vec{F}$ μεταβάλλεται, γενικά, κατά μήκος της τροχιάς τού m, είναι δηλαδή συνάρτηση του $\vec{r}$: $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$. Έτσι, είναι σωστότερο να μιλάμε για ένα *πεδίο δυνάμεων*, παρά για μια μεμονωμένη δύναμη.



Φανταστείτε τώρα ότι είναι δυνατό να εκλέξουμε το σημείο αναφοράς O έτσι ώστε

1. η διεύθυνση (ο άξονας) της $\vec{F}$ να περνάει πάντα από το O, σε όποια θέση κι αν βρίσκεται το m,
2. το μέτρο τής $\vec{F}$ να εξαρτάται μόνο από την απόσταση r του m από το O, όπου $r=|\vec{r}|$.

Ορίζοντας το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}_r$ στην κατεύθυνση του $\vec{r}$,

$$\hat{u}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{\vec{r}}{r} \quad ,$$

μπορούμε να συνοψίσουμε τις παραπάνω συνθήκες με τη σχέση

$$\vec{F}=F(r)\,\hat{u}_r=\frac{F(r)}{r}\,\vec{r} \tag{3.39}$$

όπου $F(r)=\pm\left|\vec{F}\right|$, ανάλογα με το αν η $\vec{F}$ είναι ομόρροπη ή αντίρροπη με το $\vec{r}$ (στο παραπάνω σχήμα είναι ομόρροπη). Μια δύναμη (σωστότερα, ένα πεδίο δυνάμεων) της μορφής (3.39) ονομάζεται *κεντρική δύναμη* με κέντρο το O.

Η κίνηση ενός σωματιδίου κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

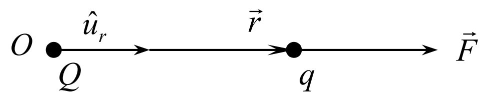
1. Η στροφορμή $\vec{L}$ του σωματιδίου ως προς το κέντρο O της δύναμης μένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης.
2. Η κίνηση γίνεται σε σταθερό επίπεδο.

Πράγματι: Η ροπή τής $\vec{F}$ ως προς το O είναι

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{F(r)}{r}\vec{r} = \frac{F(r)}{r}(\vec{r} \times \vec{r}) = 0 \ .$$

Τότε, σύμφωνα με την (3.38), $\vec{L}$= *σταθερό* ως προς το O. Επιπλέον, το διάνυσμα $\vec{L}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τα $\vec{r}$ και $\vec{v}$. Η σταθερότητα, έτσι, του $\vec{L}$ σημαίνει ότι και το επίπεδο αυτό είναι σταθερό. Άρα, η κίνηση λαμβάνει χώρα σε σταθερό επίπεδο.

Ένα γνωστό παράδειγμα κεντρικής δύναμης είναι η δύναμη Coulomb $\vec{F}$ που δέχεται ένα ηλεκτρικό φορτίο q μέσα στο ηλεκτροστατικό πεδίο που δημιουργεί ένα άλλο φορτίο Q τοποθετημένο στο σημείο O:



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\,\hat{u}_r \equiv F(r)\hat{u}_r \qquad (3.40)$$

Όπως ήδη γνωρίζουμε (βλ. Άσκηση στο τέλος της Παρ.3.7), η στροφορμή τού q ως προς το O μένει σταθερή κατά την κίνηση του φορτίου μέσα στο πεδίο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

4.1 Εισαγωγή

Θεωρητικά, με το νόμο του Νεύτωνα μπορούμε να προβλέψουμε την κίνηση ενός σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή t, αρκεί να γνωρίζουμε (α) τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου τη στιγμή t=0, και (β) το πεδίο δυνάμεων μέσα στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο. Στην πράξη, όμως, η λύση του προβλήματος δεν είναι πάντα εύκολη, αφού ο νόμος του Νεύτωνα δεν είναι μια απλή αλγεβρική σχέση (όπως φαίνεται με πρώτη ματιά από τη μορφή $\vec{F} = m\vec{a}$) αλλά, στην ουσία, ένα σύστημα *διαφορικών εξισώσεων*:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}) , \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} .$$

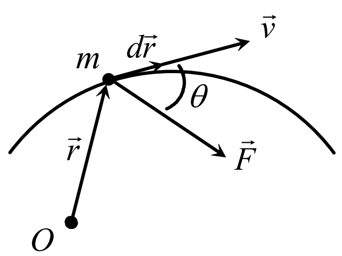
Λύνοντας το σύστημα για δοσμένες αρχικές συνθήκες ($\vec{r} = \vec{r}_0$ και $\vec{v} = \vec{v}_0$ για t=0), προσδιορίζουμε τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου για κάθε $t>0$.

Η δυσκολία επίλυσης του προβλήματος (εκτός από ορισμένες απλές περιπτώσεις) μας οδηγεί στην αναζήτηση μαθηματικών τεχνασμάτων. Το πιο βασικό από αυτά, που εφαρμόζεται όμως κάτω από ορισμένες μόνο προϋποθέσεις, είναι η *αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας*, η οποία προκύπτει ως άμεση συνέπεια του νόμου του Νεύτωνα (δεν αποτελεί, δηλαδή, ένα νέο, ανεξάρτητο αξίωμα της Μηχανικής).

Μια πιο γενική αρχή, επίσης συνέπεια του νόμου του Νεύτωνα, είναι το *θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας*. Πέρα από τη θεωρητική του αξία, το θεώρημα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε προβλήματα όπου υπεισέρχεται η τριβή και, ως εκ τούτου, η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

4.2 Έργο μιας Δύναμης

Θεωρούμε σωματίδιο μάζας m που κινείται κάτω από την επίδραση δύναμης $\vec{F}$ η οποία, γενικά, μεταβάλλεται κατά μήκος της τροχιάς του. Για να είμαστε ακριβέστεροι, το m βρίσκεται σε ένα *πεδίο δυνάμεων* $\vec{F}(\vec{r})$, όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης τού m ως προς την αρχή των συντεταγμένων ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Καλούμε $d\vec{r}$ το απειροστό διάνυσμα που παριστά τη στοιχειώδη μετατόπιση του σωματιδίου κατά μήκος της τροχιάς του μέσα σε απειροστό χρονικό διάστημα dt. Το $d\vec{r}$ μπορεί οριακά να θεωρηθεί εφαπτόμενο στην τροχιά, έχει δηλαδή την κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{v}$ του σωματιδίου:

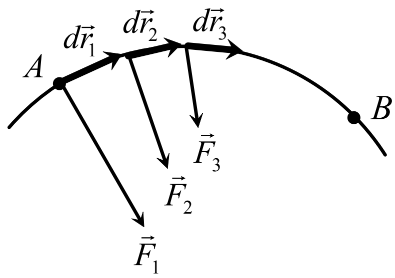


Ορίζουμε το *στοιχειώδες έργο* της δύναμης $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση $d\vec{r}$ σαν το εσωτερικό γινόμενο

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,ds\cos\theta \tag{4.1}$$

όπου $F = |\vec{F}|$ και $ds = |d\vec{r}|$ (το ds μπορεί να θεωρηθεί σαν το μήκος ενός απειροστού τμήματος της καμπύλης τροχιάς τού m). Λέμε ότι η $\vec{F}$ *παράγει* έργο dW στο χρονικό διάστημα dt. Σύμφωνα με το πρόσημο του $\cos\theta$, το έργο αυτό είναι θετικό αν $0 \le \theta < \pi/2$ και αρνητικό αν $\pi/2 < \theta \le \pi$. Προσέξτε ότι *μια δύναμη κάθετη στην ταχύτητα δεν παράγει έργο*, διότι $\theta = \pi/2$, $\cos\theta = 0$, οπότε dW=0. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, στην περίπτωση μιας *ομαλής* καμπυλόγραμμης κίνησης, όπου η ασκούμενη ολική δύναμη $\vec{F}$ είναι εξ ολοκλήρου κεντρομόλος (δηλαδή, κάθετη στην ταχύτητα), κι έτσι το έργο που παράγεται από την $\vec{F}$ κατά την κίνηση είναι μηδέν.

Θεωρούμε τώρα ένα πεπερασμένο τμήμα AB της τροχιάς τού m. Χωρίζουμε την επικαμπύλια διαδρομή AB σε ένα μεγάλο πλήθος από στοιχειώδεις μετατοπίσεις $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \cdots$, κατά μήκος των οποίων οι δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο είναι, αντίστοιχα, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$:



Τα στοιχειώδη έργα που παράγονται κατά τις μετατοπίσεις είναι

$$dW_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 \,, \quad dW_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 \,, \cdots \,.$$

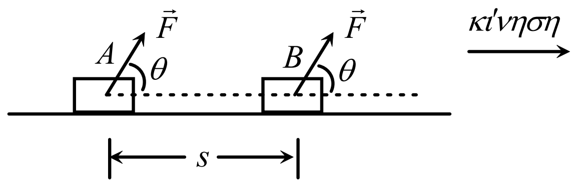
Το *ολικό έργο* της ασκούμενης δύναμης από A ως B είναι

$$W = dW_1 + dW_2 + \cdots = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \cdots = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \quad .$$

Επειδή οι μετατοπίσεις είναι απειροστές και η δύναμη είναι συνάρτηση της θέσης πάνω στην τροχιά, μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \tag{4.2}$$

Ολοκληρώματα της μορφής (4.2) ονομάζονται *επικαμπύλια* και η τιμή τους εξαρτάται, γενικά, από την καμπύλη που συνδέει τα σημεία A και B. Έτσι, *το έργο μιας δύναμης από A ως B εξαρτάται από την τροχιά που διέγραψε το κινητό πηγαίνοντας από το A στο B*. (Δηλαδή, σε δύο διαφορετικές τροχιές από A ως B αντιστοιχούν δύο διαφορετικές τιμές του έργου της δύναμης $\vec{F}$.) Σημαντική εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση των *συντηρητικών δυνάμεων*, τις οποίες θα γνωρίσουμε παρακάτω. Προς το παρόν θα αρκεστούμε σε ένα απλό παράδειγμα:



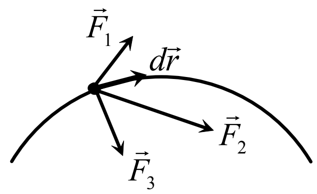
Το σώμα κινείται ευθύγραμμα από A ως B, κάτω από την επίδραση μιας *σταθερής* (κατά μέτρο και κατεύθυνση) δύναμης $\vec{F}$. (Στο σώμα δρουν και άλλες δυνάμεις που δεν έχουν σχεδιαστεί, όπως το βάρος, η κάθετη αντίδραση από το επίπεδο, η τριβή, κλπ.) Μας ενδιαφέρει το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από A ως B. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το μέτρο F της $\vec{F}$ και η γωνία θ είναι σταθερές ποσότητες, έχουμε:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F\cos\theta\, ds = F\cos\theta \int_A^B ds \;\Rightarrow$$

$$W = F s \cos\theta \qquad (4.3)$$

όπου s η απόσταση AB που διανύει το κινητό. Ειδικά, $W=Fs$ όταν η $\vec{F}$ είναι στην κατεύθυνση της κίνησης (θ=0), ενώ $W=-Fs$ όταν η $\vec{F}$ είναι αντίθετη στην κίνηση ($\theta=\pi$).

Όταν σε ένα σωματίδιο επενεργούν ταυτόχρονα διάφορες δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, *το έργο της συνισταμένης δύναμης* $\vec{F}$ *ισούται με το άθροισμα των έργων των συνιστωσών δυνάμεων*:



Απόδειξη: Τα επιμέρους έργα των $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, κατά τη μετατόπιση $d\vec{r}$, είναι

$$dW_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} \;\;, \quad dW_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} \;\;, \cdots \;.$$

Το έργο της συνισταμένης δύναμης $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$, για την ίδια μετατόπιση, είναι

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \cdots = dW_1 + dW_2 + \cdots, \text{ ο.ε.δ.}$$

Έστω, τώρα, dt το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η απειροστή μετατόπιση $d\vec{r}$ ενός σωματιδίου, και έστω $\vec{F}$ η δύναμη που δρα στο σωματίδιο στο διάστημα αυτό (για ένα τέτοιο απειροστό διάστημα, η $\vec{F}$ μπορεί να θεωρείται σταθερή). Το στοιχειώδες έργο τής $\vec{F}$ στο διάστημα dt είναι $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Το παραγόμενο *έργο ανά μονάδα χρόνου* από την $\vec{F}$ είναι ίσο με

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (4.4)$$

και ονομάζεται *ισχύς* του παράγοντα που ασκεί τη δύναμη $\vec{F}$. Έχουμε:

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}} \tag{4.5}$$

όπου $\vec{v}$ η στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου. Το έργο που παράγεται από την $\vec{F}$ στο χρονικό διάστημα από t_1 έως t_2 είναι

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt \tag{4.6}$$

Στο σύστημα S.I., η μονάδα έργου είναι το 1 *Joule* (1 *J*) = 1 *N.m* = 1 $kg.m^2.s^{-2}$, ενώ η μονάδα ισχύος είναι το 1 *Watt* (1 *W*) = 1 $J.s^{-1}$ = 1 $kg.m^2.s^{-3}$, με πολλαπλάσια τα $1\,kW = 10^3\ W$ και $1\,MW = 10^6\ W$.

4.3 Κινητική Ενέργεια και Θεώρημα Μεταβολής της

Είδαμε νωρίτερα ότι μια δύναμη κάθετη στην ταχύτητα δεν παράγει έργο. Από την άλλη μεριά, μια δύναμη κάθετη στην ταχύτητα δεν μεταβάλλει το *μέτρο* της ταχύτητας. Αυτό μας οδηγεί στη σκέψη ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στο έργο και τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας, έτσι ώστε ο μηδενισμός του έργου να συνεπάγεται τη σταθερότητα του μέτρου της ταχύτητας, και αντίστροφα.

Ορίζουμε την *κινητική ενέργεια* ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται με ταχύτητα μέτρου v:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2} \tag{4.7}$$

Αν $p=mv$ είναι το μέτρο της ορμής του σωματιδίου, η (4.7) μπορεί να γραφεί στην εναλλακτική μορφή

$$\boxed{E_k = \frac{p^2}{2m}} \tag{4.8}$$

Έστω, τώρα, $\vec{F}$ η *ολική* (*συνισταμένη*) δύναμη στο σωματίδιο. Από το νόμο του Νεύτωνα,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad .$$

Το στοιχειώδες έργο τής $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση $d\vec{r}$ του σωματιδίου είναι

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} \quad .$$

Αλλά,

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2) = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dv} dv = \frac{1}{2}(2v) dv = v dv$$

όπου v το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου. Έτσι, $dW = mvdv$. Το έργο τής $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση του m από το σημείο A στο σημείο B βρίσκεται, τότε, με ολοκλήρωση:

$$W = \int_A^B dW = m\int_A^B vdv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_A^B \Rightarrow$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}m v_B^{\,2} - \frac{1}{2}m v_A^{\,2}} \qquad (4.9)$$

Σε συνδυασμό με την (4.7), η (4.9) γράφεται

$$\boxed{W = E_{k,B} - E_{k,A} \equiv \Delta E_k} \qquad (4.10)$$

Οι σχέσεις (4.9) και (4.10) εκφράζουν το *θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας* (ΘΜΚΕ), το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

> *Το έργο της συνισταμένης δύναμης σε ένα σωματίδιο (ίσο με το ολικό έργο των δυνάμεων που δρουν σε αυτό), κατά τη μετατόπιση του σωματιδίου από ένα σημείο της τροχιάς του σε ένα άλλο, ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου κατά τη μετατόπιση αυτή.*

Έτσι, στην περίπτωση που W=0, έχουμε ότι ΔE_k=0 $\Rightarrow$ E_k= *σταθερό*, οπότε, από την (4.7), v= *σταθερό*. Δηλαδή, *όταν η συνισταμένη δύναμη δεν παράγει έργο πάνω στο σωματίδιο, το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου μένει σταθερό*. Αυτή είναι, προφανώς, η περίπτωση όπου η ολική δύναμη $\vec{F}$ στο σωματίδιο είναι κάθετη στην ταχύτητά του, όπως συμβαίνει στην ομαλή καμπυλόγραμμη κίνηση.

Προσέξτε ότι το ΘΜΚΕ είναι άμεση συνέπεια του νόμου του Νεύτωνα, δεν αποτελεί δηλαδή μια νέα, ανεξάρτητη αρχή της Μηχανικής. Από τον ορισμό (4.7) της κινητικής ενέργειας, η μονάδα μέτρησής της είναι 1 $kg.m^2.s^{-2}$ = (1 $kg.m.s^{-2}$)(1 m) = 1 $N.m$ = 1 J. Δηλαδή, η E_k μετριέται σε μονάδες έργου, όπως άλλωστε είναι φανερό από το ΘΜΚΕ (4.10).

4.4 Δυναμική Ενέργεια και Συντηρητικές Δυνάμεις

Θεωρούμε σωματίδιο μάζας m που υπόκειται σε δύναμη $\vec{F}$ σε κάποια περιοχή του χώρου. Γενικά, η $\vec{F}$ μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο της περιοχής. Τα σημεία αυτά προσδιορίζονται με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς την αρχή O των συντεταγμένων (x,y,z) ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Υποθέτουμε τώρα ότι η δύναμη $\vec{F}$ εξαρτάται μόνο από τη θέση του σωματιδίου στο χώρο (κάτι που δεν συμβαίνει, π.χ., με την κινητική τριβή, της οποίας η κατεύθυνση σε κάθε σημείο εξαρτάται από την κατεύθυνση της κίνησης). Γράφουμε:

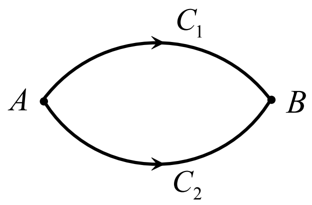
$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) \qquad (4.11)$$

Για να είμαστε ακριβέστεροι, η σχέση (4.11) παριστά όχι μια μοναδική δύναμη αλλά ένα *πεδίο δυνάμεων*. Θα εξακολουθήσουμε, εν τούτοις, να χρησιμοποιούμε τον όρο «*δύναμη*» χάριν συντομίας.

Όταν το σωματίδιο μετατοπίζεται από το σημείο A στο σημείο B του χώρου, το έργο τής $\vec{F}$ είναι

$$W=\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \tag{4.12}$$

Όπως έχουμε τονίσει, η τιμή του ολοκληρώματος αυτού εξαρτάται όχι μόνο από τα οριακά σημεία A και B, αλλά και από τη *διαδρομή* που κάνει το m από το A ως το B:



Γενικά, $W_1 \neq W_2$, όπου W_1 και W_2 τα έργα κατά μήκος των διαδρομών C_1 και C_2 , αντίστοιχα (υπάρχουν άπειρες διαδρομές που συνδέουν τα A και B).

Υπάρχει όμως μια ειδική κατηγορία δυνάμεων (σωστότερα, πεδίων) της μορφής (4.11), το έργο W των οποίων εξαρτάται μόνο από τα οριακά σημεία A, B και όχι από τη διαδρομή που τα συνδέει. Τέτοιες δυνάμεις ονομάζονται *συντηρητικές*.

Ορισμός: Μια δύναμη της μορφής (4.11) ονομάζεται *συντηρητική* αν υπάρχει κάποια συνάρτηση $E_p(\vec{r})=E_p(x,y,z)$, τέτοια ώστε το έργο τής $\vec{F}$ από A ως B να ισούται με τη διαφορά των τιμών τής E_p στα σημεία A και B:

$$\boxed{W=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}=E_p(\vec{r}_A)-E_p(\vec{r}_B)\equiv E_{p,A}-E_{p,B}} \tag{4.13}$$

Δοθέντος ότι η μεταβολή τής E_p από A ως B είναι

$$\Delta E_p = E_{p,B}-E_{p,A} = \textit{τελική μείον αρχική τιμή}\ ,$$

η σχέση (4.13) γράφεται σύντομα:

$$W=-\Delta E_p \tag{4.14}$$

Η συνάρτηση $E_p(\vec{r})$ ονομάζεται *δυναμική ενέργεια* του σωματιδίου m στο πεδίο της δύναμης $\vec{F}$ (συχνά θα λέμε ότι η δυναμική ενέργεια E_p *σχετίζεται με τη συντηρητική δύναμη* $\vec{F}$). Αν στο m δρουν διάφορες συντηρητικές δυνάμεις, κάθε μία από αυτές σχετίζεται με μια αντίστοιχη δυναμική ενέργεια. Όπως είναι εύκολο να δείξουμε, η δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με τη *συνισταμένη* ενός πλήθους συντηρητικών δυνάμεων ισούται με το *άθροισμα* των δυναμικών ενεργειών που σχετίζονται με τις επιμέρους δυνάμεις. Έτσι, αν η $\vec{F}$ στη σχέση (4.13) παριστά την ολική συντηρητική δύναμη στο m, τότε η E_p παριστά την ολική δυναμική ενέργεια του m. Αν στο m

δρουν και άλλες, *μη-συντηρητικές* δυνάμεις, αυτές *δεν* συμπεριλαμβάνονται στη δύναμη $\vec{F}$ της σχέσης (4.13) και *δεν* σχετίζονται με κάποια δυναμική ενέργεια. Στην περίπτωση αυτή, το W στην (4.13) παριστά το έργο των *συντηρητικών* δυνάμεων μόνο και όχι το έργο της συνισταμένης δύναμης στο m. Από την (4.13) είναι προφανές ότι η E_p έχει διαστάσεις έργου.

Θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει την E_p διαφορετικά, έτσι ώστε η (4.14) να γραφόταν $W = +\Delta E_p$. Τούτο θα σήμαινε, απλά, να θέταμε $(-E_p)$ στη θέση τού E_p, δηλαδή να ορίζαμε την E_p με αντίθετο πρόσημο. Αυτό δεν θα είχε καμία ιδιαίτερη φυσική συνέπεια! Η εκλογή του αρνητικού προσήμου στην (4.14) είναι καθαρά θέμα σύμβασης και γίνεται έτσι ώστε η ολική μηχανική ενέργεια του m (βλ. παρακάτω) να γράφεται σαν άθροισμα και όχι σαν διαφορά. Παρατηρούμε επίσης τα εξής:

1. Έστω $E_p(\vec{r})$ η δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί στη συντηρητική δύναμη $\vec{F}(\vec{r})$. Τότε, και η συνάρτηση

$$E_p'(\vec{r}) = E_p(\vec{r}) + C$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά, παριστά δυναμική ενέργεια για την ίδια δύναμη $\vec{F}$. Πράγματι: Αν W είναι το έργο τής $\vec{F}$, τότε

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = (E_{p,A} + C) - (E_{p,B} + C) = E'_{p,A} - E'_{p,B} \ .$$

Βλέπουμε ότι ο ορισμός της δυναμικής ενέργειας επιτρέπει κάποιο βαθμό αυθαιρεσίας, αφού μπορούμε να προσθέσουμε οποιαδήποτε σταθερή ποσότητα στη συνάρτηση $E_p(\vec{r})$ χωρίς να αλλοιώσουμε τη φυσική του προβλήματος (η δύναμη $\vec{F}$ που αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια μένει ίδια). Λόγω αυτής της αυθαιρεσίας, μπορούμε να ορίσουμε κατά βούληση ένα *σημείο* (ή ένα *επίπεδο*) *αναφοράς* όπου η τιμή τής E_p είναι μηδέν.

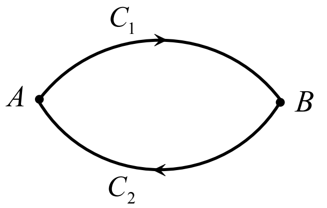
2. Από τον ορισμό (4.13) είναι φανερό ότι το έργο μιας συντηρητικής δύναμης $\vec{F}$, κατά τη μετατόπιση ενός σωματιδίου από ένα σημείο A σε ένα σημείο B, είναι *ανεξάρτητο της τροχιάς που συνδέει τα δύο σημεία*. Έτσι, αν C_1 και C_2 είναι δύο διαδρομές που ενώνουν τα A και B, και αν W_1 και W_2 είναι τα αντίστοιχα έργα τής $\vec{F}$ κατά μήκος των διαδρομών αυτών, τότε

$$W_1 = W_2 = E_{p,A} - E_{p,B} \ .$$

Ναι, αλλά και το ΘΜΚΕ (4.10) μας λέει ότι $W = E_{k,B} - E_{k,A}$, χωρίς να έχουμε κάνει την υπόθεση ότι η $\vec{F}$ είναι συντηρητική! Προσοχή όμως: Η διαφορά ΔE_k *εξαρτάται*, γενικά, από τη διαδρομή που συνδέει τα A και B, ενώ η διαφορά ΔE_p *δεν* εξαρτάται. Ο λόγος είναι ότι η E_p είναι μια δοσμένη συνάρτηση της θέσης του σωματιδίου, κάτι που γενικά δεν ισχύει για την E_k. Τονίζουμε ότι

> το ΘΜΚΕ, $W = \Delta E_k$ (όπου W το έργο της *συνισταμένης* δύναμης στο σωμάτιο), έχει *γενική* ισχύ, *ανεξάρτητα από το είδος των δυνάμεων που δρουν στο σωμάτιο*. Αντίθετα, η σχέση $W = -\Delta E_p$ ισχύει μόνο για το έργο των *συντηρητικών* δυνάμεων, και *δεν* παριστά απαραίτητα το ολικό έργο πάνω στο σωμάτιο.

3. Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης $\vec{F}$ κατά μήκος *κλειστής* τροχιάς είναι *μηδέν*:



Θεωρούμε κλειστή διαδρομή C που αποτελείται από δύο τμήματα: το τμήμα C_1 από A ως B, και το τμήμα C_2 από B πίσω στο A. Γράφουμε, συμβολικά, $C=C_1+C_2$. Το έργο W κατά μήκος της C ισούται με το άθροισμα των έργων W_1, W_2 κατά μήκος των C_1, C_2 , αντίστοιχα:

$$W = W_1 + W_2 = (E_{p,A} - E_{p,B}) + (E_{P,B} - E_{p,A}) = 0 \ .$$

Το έργο κατά μήκος μιας κλειστής τροχιάς παρίσταται, γενικά, με *κλειστό* επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Έτσι, για μια συντηρητική δύναμη $\vec{F}$, γράφουμε

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \ .$$

4.5 Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας

Θεωρούμε σωματίδιο μάζας m που διαγράφει τροχιά από το σημείο A στο σημείο B, κάτω από την επίδραση μιας δύναμης (σωστότερα, ενός πεδίου δυνάμεων) $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, η οποία είναι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που δρουν στο m. Σύμφωνα με το ΘΜΚΕ, το έργο W της $\vec{F}$ ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του m :

$$W = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} \qquad (4.15)$$

Τονίζουμε και πάλι ότι η (4.15) ισχύει για το έργο της *συνισταμένης* δύναμης, ανεξάρτητα αν αυτή είναι συντηρητική ή όχι. Τώρα, αν συμβεί η ολική δύναμη $\vec{F}$ να είναι *συντηρητική* (πράγμα που ισχύει όταν *όλες* οι επιμέρους δυνάμεις στο m είναι συντηρητικές), τότε το έργο τής $\vec{F}$ μπορεί επίσης να εκφραστεί ως εξής:

$$W = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B} \qquad (4.16)$$

όπου E_p η ολική δυναμική ενέργεια του m. Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των (4.15) και (4.16), βρίσκουμε

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B} \qquad (4.17)$$

Η σχέση (4.17) ισχύει για τυχαία εκλογή των σημείων A και B της τροχιάς τού m. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η ποσότητα

$$\boxed{E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(\vec{r})} \qquad (4.18)$$

που ονομάζεται *ολική μηχανική ενέργεια* του m στο πεδίο της δύναμης $\vec{F}$, μένει σταθερή κατά την κίνηση του m .

Οδηγούμαστε, έτσι, στην *αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας* (ΑΔΜΕ):

> *Όταν* ***όλες*** *οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σωμάτιο είναι συντηρητικές, η ολική μηχανική ενέργεια Ε του σωματίου μένει σταθερή κατά μήκος της τροχιάς του.*

Καταλαβαίνουμε τώρα γιατί οι δυνάμεις για τις οποίες ορίζεται δυναμική ενέργεια καλούνται συντηρητικές. Για τις μη-συντηρητικές δυνάμεις (όπως, π.χ., η τριβή) είναι αδύνατο να ορίσουμε δυναμική, άρα και ολική μηχανική ενέργεια. Έτσι, η ΑΔΜΕ θα πρέπει να επανεξεταστεί στην περίπτωση που τέτοιες δυνάμεις είναι παρούσες.

Πώς αντιμετωπίζουμε, λοιπόν, την περίπτωση όπου σε ένα σωμάτιο m ασκούνται ταυτόχρονα συντηρητικές και μη-συντηρητικές δυνάμεις (π.χ., βαρύτητα και τριβή); Έστω $\vec{F}$ η συνισταμένη συντηρητική δύναμη στο m, και έστω $\vec{F}'$ η ολική μη-συντηρητική δύναμη σε αυτό. Η συνισταμένη όλων των δυνάμεων στο m είναι

$$\vec{F}_{o\lambda} = \vec{F} + \vec{F}'$$

και το έργο της από το A ως το B είναι

$$W = \int_A^B \vec{F}_{o\lambda} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}' \cdot d\vec{r} \qquad (4.19)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στα δεξιά ισούται με τη διαφορά ($E_{p,A} - E_{p,B}$), όπου E_p η δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί στη συντηρητική δύναμη $\vec{F}$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα παριστά το έργο W' της μη-συντηρητικής δύναμης $\vec{F}'$. Τέλος, από το ΘΜΚΕ, το έργο W της συνισταμένης δύναμης $\vec{F}_{o\lambda}$ ισούται με ($E_{k,B} - E_{k,A}$). Αντικαθιστώντας τις ποσότητες αυτές στην (4.19), έχουμε

$$E_{k,B} - E_{k,A} = (E_{p,A} - E_{p,B}) + W' \;\Rightarrow$$

$$\boxed{W' = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A}) \equiv \Delta(E_k + E_p)} \qquad (4.20)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

> *όταν μη-συντηρητικές δυνάμεις είναι παρούσες, το άθροισμα (E_k+E_p)* ***δεν*** *είναι, γενικά, σταθερό: Η μεταβολή του ισούται με το έργο των μη-συντηρητικών δυνάμεων.*

Εξαίρεση στον παραπάνω κανόνα αποτελεί η περίπτωση όπου οι μη-συντηρητικές δυνάμεις δεν παράγουν έργο: $W' = 0$. Αυτό συμβαίνει όταν η συνισταμένη τους, $\vec{F}'$, είναι κάθετη στην ταχύτητα του m. Στην περίπτωση αυτή, η (4.20) μας λέει ότι το άθροισμα (E_k+E_p) είναι σταθερό:

$$\Delta(E_k + E_p) = 0 \;\Leftrightarrow\; E_k + E_p = \text{σταθερό, όταν } W' = 0 .$$

Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε την ΑΔΜΕ με πιο γενικό τρόπο:

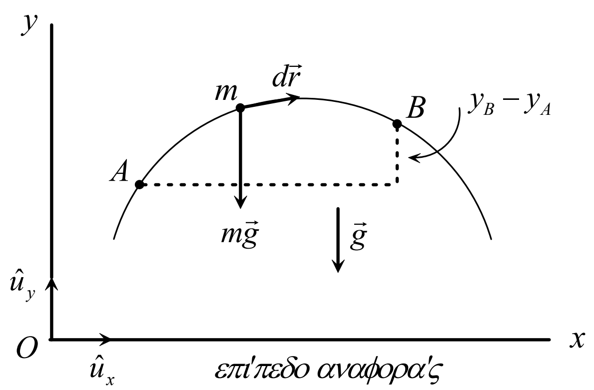
> *Όταν οι μη-συντηρητικές δυνάμεις που δρουν σε ένα σωματίδιο δεν παράγουν έργο, η ολική μηχανική ενέργεια του σωματιδίου μένει σταθερή.*

Για παράδειγμα, χρησιμοποιούμε την ΑΔΜΕ για τη μελέτη της κίνησης εκκρεμούς, παρόλο που η σφαίρα του εκκρεμούς υπόκειται όχι μόνο στη συντηρητική δύναμη της βαρύτητας, αλλά και στην τάση του νήματος. Η τάση δεν παράγει έργο, αφού είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα της σφαίρας (εξηγήστε γιατί).

4.6 Παραδείγματα Συντηρητικών Δυνάμεων

α) <u>*Δύναμη βαρύτητας*</u>

Κοντά στην επιφάνεια της Γης η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι πρακτικά σταθερή. Έτσι, σύμφωνα με τη συζήτηση της Παρ.2.5, η κίνηση ενός σώματος κάτω από την επίδραση της βαρύτητας και μόνο, λαμβάνει χώρα σε σταθερό επίπεδο, κάθετο στην επιφάνεια της Γης. Καλούμε xy το επίπεδο αυτό, όπου ο άξονας x είναι οριζόντιος ενώ ο y είναι κατακόρυφος με θετική φορά προς τα πάνω. Η συντεταγμένη y προσδιορίζει το ύψος στο οποίο βρίσκεται ένα σωματίδιο σε σχέση με ένα αυθαίρετο επίπεδο αναφοράς (y=0). Το σωματίδιο βρίσκεται πάνω ή κάτω από το επίπεδο αναφοράς, ανάλογα με το αν y>0 ή y<0, αντίστοιχα.



Το βάρος του σωματιδίου m (που εδώ θα το συμβολίσουμε με $\vec{F}$) γράφεται

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{u}_y$$

ενώ η στοιχειώδης μετατόπιση του σωματιδίου κατά μήκος της τροχιάς του είναι

$$d\vec{r} = (dx)\hat{u}_x + (dy)\hat{u}_y \ .$$

Έτσι,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \cdot dx + (-mg)\,dy = -mg\,dy$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (1.19) (στην περίπτωσή μας δεν υπάρχουν z-συνιστώσες). Το έργο τής $\vec{F}$ κατά τη μετακίνηση του m από το A στο B είναι

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B mg dy = -mg \int_A^B dy = -mg(y_B - y_A) \;\Rightarrow$$

$$W = mg\, y_A - mg\, y_B \qquad (4.21)$$

Είναι η $\vec{F}$ συντηρητική; Για να είναι, θα πρέπει να υπάρχει μια συνάρτηση $E_p(\vec{r}\,)$, η *δυναμική ενέργεια του m στο πεδίο βαρύτητας της Γης*, τέτοια ώστε

$$W = E_{p,A} - E_{p,B}\,.$$

Από την (4.21) βλέπουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση πράγματι υπάρχει:

$$\boxed{E_p(y) = mgy} \qquad (4.22)$$

(Πιο γενικά, $E_p=mgy+C$, όπου C μια αυθαίρετη σταθερή ποσότητα. Διαλέγουμε το επίπεδο $y=0$ σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, έτσι ώστε $C=0$.)

Σύμφωνα με την ΑΔΜΕ, η ολική μηχανική ενέργεια του m παραμένει σταθερή κατά την κίνησή του στο πεδίο βαρύτητας (αν αγνοήσουμε μη-συντηρητικές δυνάμεις όπως η αντίσταση του αέρα):

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (4.23)$$

Ισοδύναμα, για δύο τυχαία σημεία A και B,

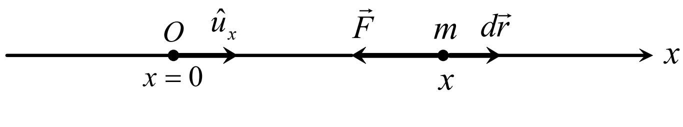
$$E_A = E_B \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}m{v_A}^2 + mgy_A = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + mgy_B \qquad (4.24)$$

Άσκηση: Με χρήση της (4.24) δείξτε ότι, σε μια ελεύθερη πτώση κατά ύψος h, ένα σώμα αποκτά ταχύτητα

$$v = \sqrt{2gh}\;\;.$$

Θα ισχύει το αποτέλεσμα αυτό αν λάβουμε υπόψη την αντίσταση του αέρα;

β) <u>*Ελαστική δύναμη*</u>



Θεωρούμε σωματίδιο μάζας m που κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του άξονα x, κάτω από την επίδραση μιας δύναμης της μορφής

$$\vec{F} = -kx\,\hat{u}_x \qquad (4.25)$$

όπου k μια θετική σταθερά. Η δύναμη (4.25) ονομάζεται *ελαστική δύναμη* και θα τη μελετήσουμε αναλυτικότερα στο Κεφ.5.

Η στοιχειώδης μετατόπιση του m πάνω στον άξονα γράφεται

$$d\vec{r} = (dx)\hat{u}_x \ .$$

Έτσι,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -kxdx \ .$$

Το έργο τής $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση του m από το σημείο A στο σημείο B είναι

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B kxdx = \frac{1}{2}kx_A{}^2 - \frac{1}{2}kx_B{}^2 \ .$$

Τώρα, για να είναι η $\vec{F}$ συντηρητική, θα πρέπει να υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας E_p του m, τέτοια ώστε

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} \ .$$

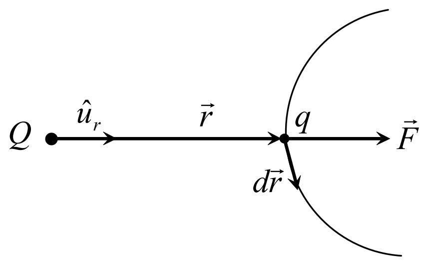
Πράγματι:

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2} \tag{4.26}$$

όπου υποθέσαμε αυθαίρετα ότι E_p=0 στο σημείο x=0. Σύμφωνα με την ΑΔΜΕ,

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{4.27}$$

γ) *Δύναμη Coulomb*



Η δύναμη που δέχεται ένα φορτισμένο σωμάτιο μάζας m και φορτίου q μέσα στο ηλεκτροστατικό πεδίο που δημιουργεί γύρω του ένα άλλο φορτίο Q, δίνεται από τη σχέση (3.40):

$$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\,\hat{u}_r \equiv F(r)\,\hat{u}_r \tag{4.28}$$

όπου k=1/4$\pi\varepsilon_0$. Δοθέντος ότι $\hat{u}_r = \vec{r}\,/\,r$ (όπου $r = |\vec{r}|$), η (4.28) γράφεται

$$\vec{F} = \frac{F(r)}{r}\,\vec{r} \ .$$

Αν $d\vec{r}$ είναι μια στοιχειώδης μετατόπιση του q πάνω στην τροχιά του,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{F(r)}{r}\,\vec{r} \cdot d\vec{r} \ .$$

Αλλά,

$$\vec{r}\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}\left[(d\vec{r})\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot d\vec{r}\right]=\frac{1}{2}d(\vec{r}\cdot\vec{r})=\frac{1}{2}d(r^2)=\frac{1}{2}\frac{d(r^2)}{dr}dr=\frac{1}{2}(2r)dr=rdr\ .$$

Έτσι,

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=\frac{F(r)}{r}rdr=F(r)dr\ .$$

Το έργο τής $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση του q από το σημείο A στο σημείο B της τροχιάς του, είναι

$$W=\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_A^B F(r)dr=kQq\int_A^B\frac{dr}{r^2}=kQq\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)\ \Rightarrow$$

$$W=k\frac{Qq}{r_A}-k\frac{Qq}{r_B} \tag{4.29}$$

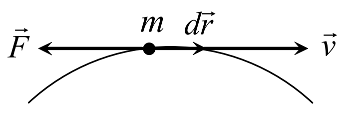
Η δύναμη $\vec{F}$ θα είναι συντηρητική αν υπάρχει *δυναμική ενέργεια* E_p *του* q *στο πεδίο Coulomb του* Q , τέτοια ώστε $W=E_{p,A}-E_{p,B}$. Η E_p βρίσκεται εύκολα από την (4.29):

$$\boxed{E_p(r)=k\frac{Qq}{r}} \tag{4.30}$$

όπου υποθέσαμε αυθαίρετα ότι E_p=0 σε άπειρη απόσταση από το Q $(r=\infty)$. (Προσέξτε ότι, λόγω συμμετρίας τής (4.30), η έκφραση αυτή παριστά εξίσου και τη δυναμική ενέργεια του Q στο πεδίο Coulomb του q. Για το λόγο αυτό, λέμε ότι η (4.30) εκφράζει τη δυναμική ενέργεια του *συστήματος* φορτίων Q-q.) Συμπεραίνουμε ότι η ηλεκτροστατική δύναμη Coulomb είναι συντηρητική.

4.7 Η Κινητική Τριβή ως Μη-Συντηρητική Δύναμη

Η κινητική τριβή (εδώ θα τη συμβολίσουμε $\vec{F}$) είναι πάντα αντίθετη στην ταχύτητα $\vec{v}$ ενός σωματιδίου, άρα και στη στοιχειώδη μετατόπιση $d\vec{r}$ του σωματιδίου πάνω στην τροχιά του:



Έτσι, το στοιχειώδες έργο τής $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση $d\vec{r}$ είναι πάντα αρνητικό:

$$dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}<0\ .$$

Το έργο, λοιπόν, της $\vec{F}$ κατά μήκος *οποιασδήποτε* τροχιάς είναι αρνητικό. Ειδικά, για μια κλειστή τροχιά,

$$\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}<0\ .$$

Παρατηρούμε ότι το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}$ είναι διάφορο του μηδενός. Σύμφωνα με αυτά που εκτέθηκαν στην Παρ.4.4, αυτό σημαίνει ότι *η κινητική τριβή δεν είναι συντηρητική δύναμη*.

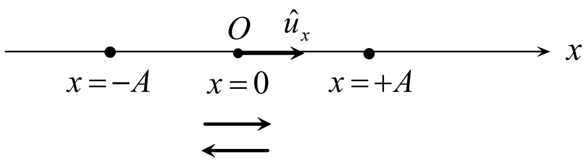
Για τη *στατική* τριβή δεν τίθεται καν θέμα συζήτησης, αφού αυτή δεν παράγει έργο. Στο Κεφάλαιο 7, για παράδειγμα, θα δούμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας σε προβλήματα κύλισης στερεών σωμάτων, παρά την παρουσία στατικής τριβής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

5.1 Αρμονική Ταλάντωση

Θα μελετήσουμε τώρα μια ειδική περίπτωση ευθύγραμμης κίνησης που ονομάζεται *απλή αρμονική κίνηση* ή *αρμονική ταλάντωση*. Είναι μια μορφή *περιοδικής κίνησης*, με την έννοια ότι αποτελεί συνεχή επανάληψη μιας πρωταρχικής κίνησης ή «κύκλου»:

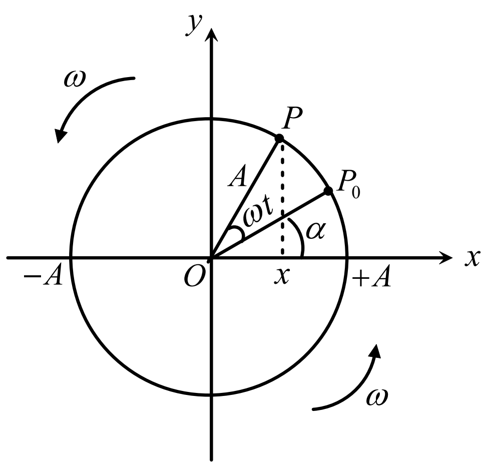


Η κίνηση περιορίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα που οριοθετείται από τα σημεία $x = -A$ και $x = +A$. Η θέση x του κινητού δίνεται σαν συνάρτηση του χρόνου t από την έκφραση

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad (5.1)$$

Προσέξτε ότι θα μπορούσαμε, εναλλακτικά, να περιγράψουμε την κίνηση χρησιμοποιώντας ημιτονοειδή συνάρτηση. Αυτή όμως ανάγεται και πάλι στη συνημιτονοειδή μορφή (5.1) αν θέσουμε $\alpha+\pi/2$ στη θέση τού α. Η σταθερά A ονομάζεται *πλάτος* της ταλάντωσης, το ω παριστά την *κυκλική συχνότητα*, ενώ η γωνία $\omega t+\alpha$ (σε *rad* !) καλείται *φάση*. Το ω έχει διαστάσεις αντίστροφου χρόνου, έτσι ώστε το ωt να είναι καθαρός αριθμός. Τα μεγέθη A και ω λαμβάνουν πάντα θετικές τιμές.

Ένας καλός τρόπος για να κατανοήσουμε το είδος της κίνησης που περιγράφει η (5.1) είναι ο εξής:



Φανταστείτε ένα κινητό που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση στο επίπεδο xy με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Καλούμε A την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς και υποθέτουμε ότι η κίνηση είναι αριστερόστροφη. Το κέντρο O του κύκλου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, κι έτσι ο κύκλος τέμνει τον άξονα x στα σημεία $x=-A$ και $x=+A$. Τη χρονική στιγμή t=0 το κινητό βρίσκεται στο σημείο P_0 του κύκλου, ενώ την (τυχαία) χρονική στιγμή t το κινητό περνάει από το σημείο P. Μεταξύ t=0 και t, το διάνυσμα θέσης του κινητού διαγράφει γωνία $P_0OP=\omega t$. Έτσι, η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης με τον άξονα x τη στιγμή t είναι $\varphi(t)=\omega t+\alpha$ [βλ. σχέση (2.39)].

Καθώς το t αυξάνει απεριόριστα, το σημείο P (που παριστά τη στιγμιαία θέση του κινητού) διαγράφει επαναληπτικά τον κύκλο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Την ίδια στιγμή, η *προβολή* τού P στον άξονα *x ταλαντώνεται* αδιάκοπα κατά μήκος του άξονα, στο τμήμα του από $x=-A$ έως $x=+A$. Η τιμή της προβολής x τη στιγμή t δίνεται από τη σχέση

$$x(t)=A\cos\varphi(t)=A\cos(\omega t+\alpha) \qquad (5.2)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, ενώ το σημείο P του κύκλου κινείται αριστερόστροφα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, η προβολή x του P εκτελεί *αρμονική ταλάντωση* με κυκλική συχνότητα ω και πλάτος A ίσο με την ακτίνα του κύκλου. Επιπλέον, η στιγμιαία τιμή της γωνίας $\varphi(t)$ αποτελεί τη φάση της ταλάντωσης. Ειδικά, η τιμή $\varphi(0)=\alpha$ της φάσης για t=0 καλείται *αρχική φάση*.

Περίοδος T μιας αρμονικής ταλάντωσης λέγεται ο χρόνος που απαιτείται ώστε το ταλαντούμενο σώμα να περάσει από την ίδια θέση x δύο φορές, *κινούμενο στην ίδια κατεύθυνση*. Ισοδύναμα, T είναι ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σημείο P να διαγράψει μια πλήρη κυκλική τροχιά, ή, το διάνυσμα θέσης του να διαγράψει γωνία 2π. Έτσι, η γωνιακή ταχύτητα της κυκλικής κίνησης, ίση με την κυκλική συχνότητα της αρμονικής ταλάντωσης, είναι

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \qquad (5.3)$$

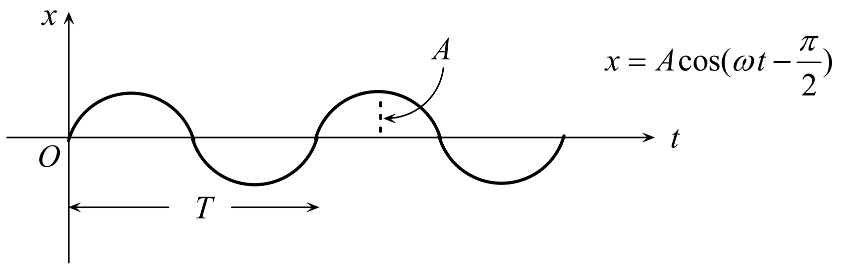
Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, η φάση της ταλάντωσης μεγαλώνει κατά 2π :

$$\varphi(t)=\omega t+\alpha \;\Rightarrow\; \varphi(t+T)=\omega(t+T)+\alpha=\varphi(t)+\omega T=\varphi(t)+2\pi \;.$$

Το x, έτσι, επανέρχεται στην αρχική του τιμή:

$$x(t+T)=A\cos\varphi(t+T)=A\cos[\varphi(t)+2\pi]=A\cos\varphi(t)=x(t) \;.$$

Σαν ειδική περίπτωση, για $\alpha=-\pi/2$, η σχέση (5.2) παρίσταται γραφικά ως εξής:



Προσέξτε ότι η ίδια καμπύλη θα μπορούσε να περιγραφεί με την ημιτονοειδή συνάρτηση $x=A\sin\omega t$, σε συμφωνία με την παρατήρηση που κάναμε νωρίτερα.

Αν το ταλαντούμενο σώμα εκτελεί μια πλήρη ταλάντωση σε χρόνο T (δηλαδή, σε μία περίοδο), πόσες ταλαντώσεις εκτελεί στη μονάδα του χρόνου; Ισοδύναμα, πόσες πλήρεις περιστροφές κάνει το σημείο P του κύκλου στη μονάδα του χρόνου; Έστω ότι ο χρόνος μετριέται σε κάποια μονάδα 1τ , όπου το τ μπορεί να είναι δευτερόλεπτα, λεπτά, ώρες, μέρες, μήνες, έτη, κλπ. Έχουμε ότι

σε χρόνο T (σε τ) κάνει 1 ταλάντωση (ή περιστροφή),

σε χρόνο 1τ κάνει N ταλαντώσεις (ή περιστροφές).

Έτσι,

$$\frac{T}{1\tau}=\frac{1}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{1\tau}=\frac{1}{T} \ .$$

Η ποσότητα

$$f=\frac{1}{T} \tag{5.4}$$

ονομάζεται *συχνότητα*, και στο S.I. μετριέται σε s^{-1}. Η μονάδα αυτή καλείται και *hertz* (*Hz*) ή *κύκλος ανά δευτερόλεπτο*. Συνδυάζοντας τις (5.3) και (5.4), έχουμε ότι

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f \tag{5.5}$$

Το ω μετριέται σε $rad.s^{-1}$, ή απλά σε s^{-1} (συχνά όμως θα το δούμε να εκφράζεται, κάπως καταχρηστικά, και σε *Hz*).

5.2 Δύναμη στην Αρμονική Ταλάντωση

Θεωρούμε σώμα μάζας m που εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Η *απομάκρυνση* x του m από το κέντρο της ταλάντωσης O δίνεται από τη σχέση (5.1) σαν συνάρτηση του t. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του m βρίσκονται από τις σχέσεις (2.1) και (2.3):

$$\vec{v}=v\,\hat{u}_x \ , \quad \vec{a}=a\,\hat{u}_x \ .$$

Οι αλγεβρικές τιμές v και a των δύο διανυσμάτων είναι

$$v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\alpha) \tag{5.6}$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\alpha)=-\omega^2 x \tag{5.7}$$

Από το νόμο του Νεύτωνα, η *συνισταμένη* δύναμη στο m είναι

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\,a\,\hat{u}_x=-m\,\omega^2 x\,\hat{u}_x\equiv F\,\hat{u}_x \ .$$

Η αλγεβρική τιμή F της ολικής δύναμης είναι

$$F=-kx \tag{5.8}$$

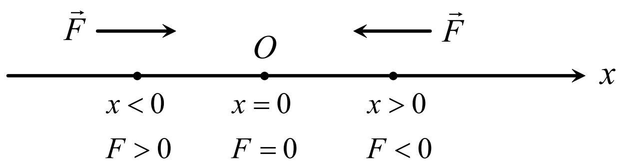
όπου θέσαμε

$$k = m\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.9}$$

Η (5.5) τώρα δίνει

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Από την (5.8) βλέπουμε ότι, στην αρμονική ταλάντωση η δύναμη είναι πάντα *αντίθετη* στην απομάκρυνση από το O και τείνει να επαναφέρει το σώμα στο O:



Το σημείο O, όπου $x = 0$, καλείται *σημείο ισορροπίας*, διότι εκεί $F = 0$. Τούτο *δεν* σημαίνει απαραίτητα ότι το σώμα έχει στο O μηδενική ταχύτητα, αλλά ότι η *δύναμη* στο σημείο αυτό μηδενίζεται. Έτσι, αν το σώμα βρίσκεται αρχικά ακίνητο στη θέση ισορροπίας O, θα παραμείνει ακίνητο στη θέση αυτή. (Προσέξτε τη διαφορά ανάμεσα στους όρους *ισορροπία* και *ακινησία*, την οποία τονίσαμε ήδη στην Παρ.3.2.)

5.3 Ενεργειακές Σχέσεις

Με τη βοήθεια της σχέσης (5.6), βρίσκουμε την κινητική ενέργεια ενός ταλαντούμενου σώματος μάζας m :

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}m\omega^2 [A^2 - A^2\cos^2(\omega t + \alpha)] \ .$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1) και (5.9), βρίσκουμε

$$E_k = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \tag{5.11}$$

Παρατηρούμε ότι η E_k είναι μέγιστη στο κέντρο (x=0) και μηδέν στα άκρα ($x=\pm A$) της ταλάντωσης.

Από την (5.8) παρατηρούμε ότι η *συνισταμένη* δύναμη $\vec{F}$ στο ταλαντούμενο σώμα είναι ελαστική δύναμη της μορφής (4.25). Όπως δείξαμε στο Παράδειγμα (β) της Παρ.4.6 [σχέση (4.26)], η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \tag{5.12}$$

Παρατηρούμε ότι η E_p είναι ελάχιστη στο κέντρο (x=0) και μέγιστη στα άκρα ($x=\pm A$) της ταλάντωσης.

Από τις (5.11) και(5.12) βρίσκουμε την ολική μηχανική ενέργεια του ταλαντούμενου σώματος:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2 \qquad (5.13)$$

και παρατηρούμε ότι είναι σταθερή ποσότητα. Δηλαδή, η μηχανική ενέργεια του σώματος μένει σταθερή κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης, σε συμφωνία με την ΑΔΜΕ.

5.4 Ταλάντωση Συστήματος Μάζας-Ελατηρίου

Τα ελατήρια αποτελούν ένα συνηθισμένο μέσο παραγωγής ταλαντώσεων. Πριν δούμε με ποιους τρόπους γίνεται αυτό, θα πούμε δύο λόγια για τη δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο σε οτιδήποτε είναι συνδεδεμένο με αυτό, π.χ., ένα σώμα μάζας m. Το ελατήριο μπορεί να βρίσκεται σε μία από τις παρακάτω τρεις καταστάσεις:

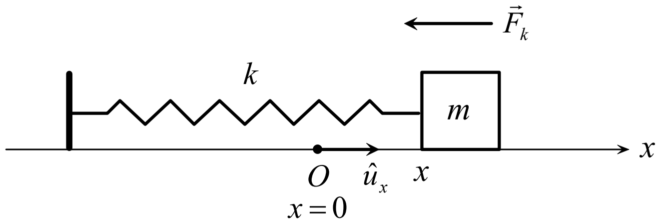
1. Στο *φυσικό του μήκος*, πράγμα που συμβαίνει όταν στο ελατήριο δεν ασκείται καμία εξωτερική δύναμη. Το ελατήριο τότε *δεν* ασκεί δύναμη στο σώμα.

2. Σε *επέκταση* κατά Δl από το φυσικό του μήκος. Το ελατήριο έχει τότε την τάση να ξαναγυρίσει στο φυσικό του μήκος, και γι' αυτό ασκεί μια δύναμη $\vec{F}_k$ *αντίθετη* στην επέκταση, μέτρου ίσου με $k\Delta l$, όπου k μια σταθερά που ονομάζεται *σταθερά του ελατηρίου*.

3. Σε *συμπίεση* κατά Δl από το φυσικό του μήκος. Το ελατήριο έχει και πάλι την τάση να ξαναγυρίσει στο φυσικό του μήκος, κι έτσι ασκεί μια δύναμη $\vec{F}_k$ *αντίθετη* στη συμπίεση, μέτρου επίσης ίσου με $k\Delta l$.

α) <u>*Οριζόντια ταλάντωση*</u>

Το σώμα m συνδέεται με ελατήριο σταθεράς k και κινείται χωρίς τριβή πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, κατά μήκος του άξονα x:



Στη θέση x=0 (σημείο O) το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και δεν ασκεί δύναμη στο σώμα. Στην τυχαία θέση x το ελατήριο έχει υποστεί παραμόρφωση (επέκταση αν x>0 ή συμπίεση αν x<0) και ασκεί στο m μια δύναμη επαναφοράς, ίση με

$$\vec{F}_k = -k x \hat{u}_x \equiv F_k \hat{u}_x \qquad (5.14)$$

όπου $F_k = -kx$ είναι η αλγεβρική τιμή τής $\vec{F}_k$. Παρατηρούμε ότι η $\vec{F}_k$ είναι προς τα αριστερά όταν το *m* είναι δεξιά τού *O* (*x*>0), ενώ είναι προς τα δεξιά όταν το *m* είναι αριστερά τού *O* (*x*<0). Σε κάθε περίπτωση, η $\vec{F}_k$ έχει κατεύθυνση προς το σημείο ισορροπίας *O* (στο σημείο αυτό, η $\vec{F}_k$ μηδενίζεται).

Έστω τώρα $\vec{F}$ η *συνισταμένη* δύναμη στο *m*. Παρατηρούμε ότι $\vec{F} = \vec{F}_k$, διότι οι άλλες δύο δυνάμεις, δηλαδή το βάρος του σώματος και η κάθετη αντίδραση από το επίπεδο, αλληλοαναιρούνται (θυμηθείτε ότι δεν υπάρχει τριβή). Έτσι,

$$\vec{F} = -kx\,\hat{u}_x \equiv F\,\hat{u}_x \quad \Rightarrow$$

$$F = -kx \tag{5.15}$$

όπου *F* η αλγεβρική τιμή τής $\vec{F}$. Το γεγονός ότι η *ολική* δύναμη στο *m* είναι της μορφής (5.15) σημαίνει ότι η κίνηση του σώματος είναι αρμονική ταλάντωση κατά μήκος του άξονα *x*, με κέντρο το *O* [βλ. εξίσ.(5.8)]. Η κυκλική συχνότητα και η περίοδος της ταλάντωσης δίνονται από τις σχέσεις (5.9) και (5.10):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{5.16}$$

(Προσέξτε ότι τα μεγέθη αυτά δεν εξαρτώνται από το πλάτος της ταλάντωσης.) Η δυναμική ενέργεια του σώματος στη θέση *x* είναι

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \tag{5.17}$$

Αν *A* είναι το πλάτος της ταλάντωσης, η ολική μηχανική ενέργεια του σώματος ισούται με

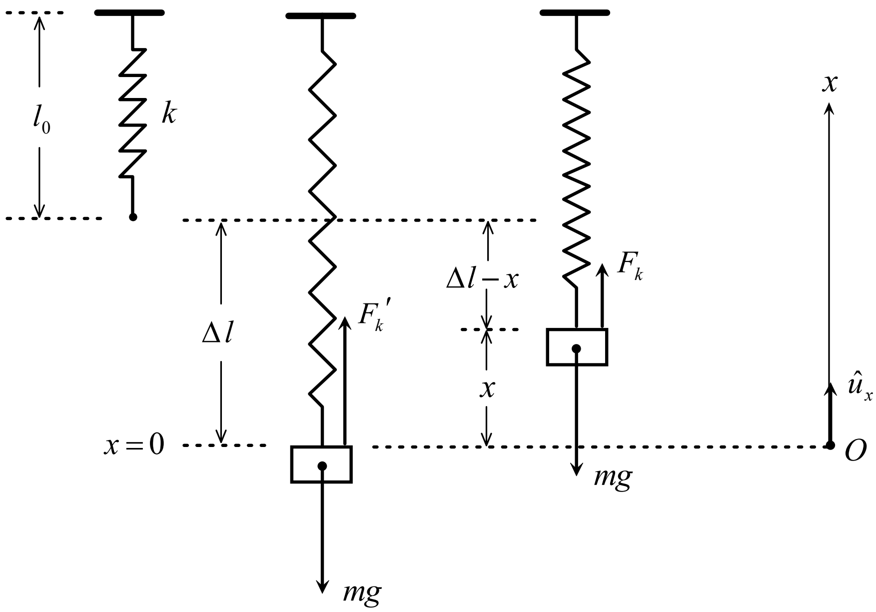
$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \tag{5.18}$$

και μένει σταθερή κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης. (Θα συνέβαινε αυτό αν υπήρχε τριβή;)

β) <u>*Κατακόρυφη ταλάντωση*</u>

Αρχικά, το ελατήριο είναι ελεύθερο και έχει το φυσικό του μήκος l_0. Στη συνέχεια, προσαρτούμε στο ελατήριο ένα σώμα μάζας *m*. Όταν το σώμα *ισορροπεί* στη θέση *x*=0 του κατακόρυφου άξονα *x*, το ελατήριο επεκτείνεται κατά Δl και ασκεί στο σώμα μια δύναμη κατακόρυφη προς τα πάνω, ίση με $F_k' = k\Delta l$, η οποία εξισορροπεί το βάρος *mg* του σώματος:

$$k\Delta l = mg \tag{5.19}$$



Μετατοπίζουμε τώρα το σώμα κατά απόσταση x πάνω από τη θέση ισορροπίας (δηλαδή, από τη θέση x=0 το μετατοπίζουμε στη θέση x>0). Η επέκταση του ελατηρίου είναι τώρα $(\Delta l - x)$, και η προς τα πάνω δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα είναι $F_k = k(\Delta l - x)$. Η *συνισταμένη* δύναμη στο σώμα είναι

$$F = F_k - mg = k(\Delta l - x) - mg \qquad \text{(αλγεβρική τιμή)} .$$

Κάνοντας χρήση της συνθήκης ισορροπίας (5.19), βρίσκουμε

$$F = -kx \tag{5.20}$$

Η σχέση (5.20) βρέθηκε για x>0, δηλαδή για μετατόπιση πάνω από τη θέση ισορροπίας. Έστω τώρα μια μετατόπιση *κάτω* από τη θέση ισορροπίας, στη θέση x<0. Η επέκταση του ελατηρίου είναι, τότε, $\Delta l + |x| = \Delta l - x$, όπως πριν, και οι ίδιες εκφράσεις εξακολουθούν να ισχύουν και για την προς τα πάνω δύναμη F_k από το ελατήριο, και την ολική δύναμη F στο σώμα:

$$F_k = k(\Delta l + |x|) = k(\Delta l - x) ,$$
$$F = F_k - mg = k(\Delta l - x) - mg = -kx$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και πάλι τη συνθήκη ισορροπίας (5.19).

Συμπέρασμα: Η *συνισταμένη* δύναμη στο σώμα είναι της μορφής (5.20), όπου το x παριστά την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας. Τούτο σημαίνει ότι το σώμα θα εκτελεί αρμονική ταλάντωση *γύρω από τη θέση ισορροπίας του* (στη θέση αυτή το ελατήριο επεκτείνεται κατά Δl). Η κυκλική συχνότητα και η περίοδος της ταλάντωσης δίνονται από τις σχέσεις

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \qquad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{5.21}$$

Η δυναμική ενέργεια του σώματος στη θέση x είναι

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 \tag{5.22}$$

ενώ η ολική μηχανική του ενέργεια είναι

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2 \tag{5.23}$$

όπου A το πλάτος της ταλάντωσης. Παρατηρούμε και πάλι ότι η E είναι σταθερή ποσότητα.

Η δύναμη $\vec{F}_k$ που ασκεί ένα ελατήριο είναι συντηρητική και αντιστοιχεί σε δυναμική ενέργεια $E_{p,k}(y)$, όπου y η παραμόρφωση του ελατηρίου (επέκταση ή συμπίεση). Πράγματι, η δύναμη αυτή ισούται (αλγεβρικά) με

$$F_k = -k y$$

όπου $y>0$ για επέκταση και $y<0$ για συμπίεση. Το έργο τής $\vec{F}_k$ κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο A στο σημείο B, είναι

$$W = \int_A^B \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = -\int_A^B ky dy = \frac{1}{2} k{y_A}^2 - \frac{1}{2} k{y_B}^2 \equiv E_{p,k}(A) - E_{p,k}(B)$$

έτσι ώστε

$$E_{p,k}(y) = \frac{1}{2} k y^2 \tag{5.24}$$

(θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν για μηδενική παραμόρφωση του ελατηρίου).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.24), μπορούμε να εξαγάγουμε την έκφραση (5.22) για τη δυναμική ενέργεια στην κατακόρυφη ταλάντωση, με τον εξής εναλλακτικό τρόπο: Η *ολική* δυναμική ενέργεια E_p του m είναι το άθροισμα της δυναμικής ενέργειας $E_{p,m}$ λόγω της βαρύτητας, και της δυναμικής ενέργειας $E_{p,k}$ λόγω της παραμόρφωσης του ελατηρίου. Υποθέτοντας αυθαίρετα ότι η $E_{p,m}$ είναι μηδέν στη θέση ισορροπίας x=0, και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.22) (με x στη θέση τού y), έχουμε

$$E_{p,m}(x) = mgx\,.$$

Η παραμόρφωση (επέκταση) του ελατηρίου είναι $y = \Delta l - x$, έτσι ώστε, από την (5.24),

$$E_{p,k}(x) = \frac{1}{2} k (\Delta l - x)^2\,.$$

Η ολική δυναμική ενέργεια του m είναι

$$E_p(x) = E_{p,m}(x) + E_{p,k}(x) = mgx + \frac{1}{2}k(\Delta l - x)^2 = (mg - k\Delta l)x + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2\,.$$

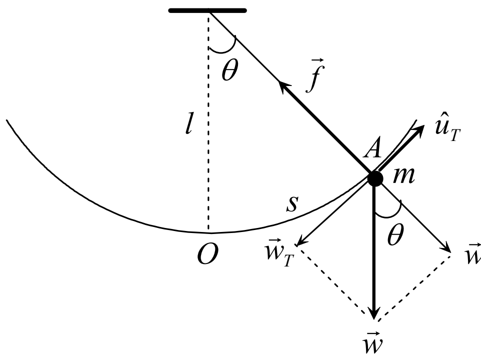
Αλλά, από τη συνθήκη ισορροπίας (5.19), $mg - k\Delta l = 0$. Επίσης, ο όρος $k(\Delta l)^2/2$ είναι μια σταθερή ποσότητα, ανεξάρτητη του *x*, και μπορεί να παραλειφθεί από τη δυναμική ενέργεια. Έτσι, τελικά,

$$E_p = E_{p,m} + E_{p,k} = \frac{1}{2}kx^2$$

σε συμφωνία με την (5.22).

5.5 Ταλάντωση Εκκρεμούς

Οι ταλαντώσεις ενός εκκρεμούς ακολουθούν *προσεγγιστικά* τους νόμους της αρμονικής ταλάντωσης, για μικρές γωνίες εκτροπής του νήματος από την κατακόρυφο:



Η μάζα *m* ταλαντώνεται συμμετρικά γύρω από το σημείο ισορροπίας *O*. Για μικρές τιμές της γωνίας εκτροπής *θ*, το τόξο κύκλου *OA* μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά σαν οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα μήκους $s=l\theta$, όπου *l* το μήκος του νήματος (το *θ* σε *rad*). Τα *s* και *θ* παίζουν εδώ το ρόλο της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας, όπως το *x* στις προηγούμενες παραγράφους. Έτσι, $s>0$ και $\theta>0$ όταν το *m* είναι στα δεξιά τού *O* (δηλαδή, προς τη θετική κατεύθυνση από το *O*, όπως αυτή ορίζεται από το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\hat{u}_T$), ενώ $s<0$ και $\theta<0$ όταν το *m* είναι στα αριστερά τού *O*. Το ρόλο της δύναμης επαναφοράς που ευθύνεται για την ταλάντωση παίζει εδώ η *επιτρόχια* (εφαπτομενική) συνιστώσα της ολικής δύναμης, δηλαδή η συνιστώσα της δύναμης στη διεύθυνση της κίνησης.

Στη μάζα *m* ασκούνται δύο δυνάμεις: το βάρος $\vec{w}$, μέτρου *mg*, και η τάση του νήματος $\vec{f}$. Η συνισταμένη δύναμη στο *m* είναι $\vec{F} = \vec{w} + \vec{f}$. Όπως είναι εύκολο να δούμε, η επιτρόχια συνιστώσα $\vec{F}_T$ της $\vec{F}$ ισούται με τη συνιστώσα $\vec{w}_T$ του βάρους στη διεύθυνση της εφαπτομένης στο A:

$$\vec{F}_T = \vec{w}_T = -mg\sin\theta\, \hat{u}_T \equiv F_T\, \hat{u}_T$$

όπου $F_T = -mg\sin\theta$ η αλγεβρική τιμή τής $\vec{F}_T$. Για πολύ μικρές τιμές της γωνίας *θ*, μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $\sin\theta \simeq \theta$. Έτσι,

$$F_T \simeq -mg\theta = -\left(\frac{mg}{l}\right)s \tag{5.25}$$

(διότι $s=l\theta$). Η σχέση (5.25) είναι της μορφής (5.8), με s στη θέση τού x:

$$F_T \simeq -ks \quad \text{όπου} \quad k = \frac{mg}{l} \ .$$

Τούτο σημαίνει ότι, κάτω από την επίδραση της $\vec{F}_T$, η μάζα m εκτελεί αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο ισορροπίας O. Η κυκλική συχνότητα και η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \ , \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{5.26}$$

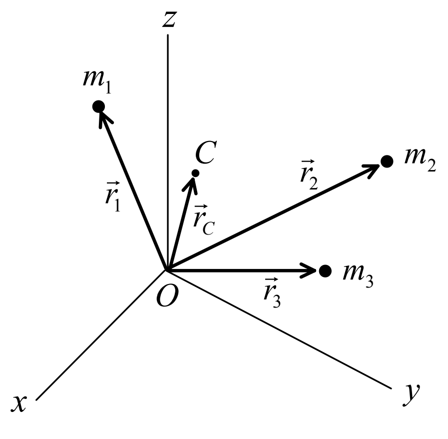
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

6.1 Κέντρο Μάζας Συστήματος

Η μελέτη της δυναμικής ενός συστήματος σωματιδίων παρουσιάζει πρόσθετες δυσκολίες σε σύγκριση με τη δυναμική ενός μοναδικού σωματιδίου. Αυτό που κατά κύριο λόγο περιπλέκει τα πράγματα είναι ότι, στην περίπτωση ενός συστήματος πρέπει να διαχωρίσουμε ανάμεσα σε δύο κατηγορίες δυνάμεων: τις *εσωτερικές*, αυτές δηλαδή που ασκούνται μεταξύ των ίδιων των σωματιδίων του συστήματος, και τις *εξωτερικές*, που ασκούνται στο σύστημα από παράγοντες εξωτερικούς ως προς αυτό. Όπως θα δούμε, σε κάθε σύστημα αντιστοιχεί ένα σημείο του χώρου, το *κέντρο μάζας* του συστήματος, το οποίο κινείται σαν να είναι ένα σωμάτιο με μάζα ίση με την ολική μάζα του συστήματος, και πάνω στο οποίο ασκείται η ολική *εξωτερική* δύναμη που δρα στο σύστημα.

Θεωρούμε ένα σύστημα σωματιδίων με μάζες $m_1, m_2, m_3, \cdots,$ τα οποία βρίσκονται κάποια χρονική στιγμή στα σημεία του χώρου με αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \cdots,$ ως προς τυχαίο σημείο αναφοράς *O*. Το *O* είναι σταθερό σημείο σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, και λαμβάνεται ως αρχή των συντεταγμένων στο σύστημα αυτό:



Η ολική μάζα του συστήματος είναι

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = \sum_i m_i \tag{6.1}$$

Το *κέντρο μάζας* του συστήματος ορίζεται σαν το σημείο *C* του χώρου με διάνυσμα θέσης

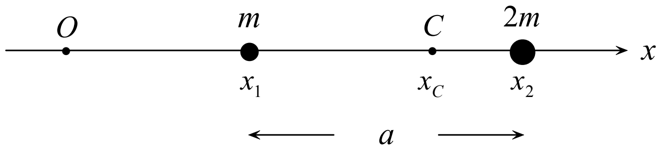
$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots) = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i \tag{6.2}$$

Στη σχέση (6.2), όλα τα διανύσματα θέσης λαμβάνονται ως προς ένα σταθερό σημείο O του συστήματος αναφοράς μας. Αν παίρναμε ένα διαφορετικό σημείο αναφοράς O', τα διανύσματα θέσης θα άλλαζαν αλλά η *θέση* του ίδιου του κέντρου μάζας C *ως προς το σύστημα των σωματιδίων* θα έμενε σταθερή, ανεξάρτητη από την εκλογή του σημείου αναφοράς! (*Άσκηση:* Υποθέστε ότι τα κέντρα μάζας ως προς O και O' είναι C και C', αντίστοιχα, και δείξτε ότι το διάνυσμα CC' είναι μηδέν. Βλ. επίσης Παράρτημα Α.)

Αν (x_i, y_i, z_i) και (x_C, y_C, z_C) είναι οι συντεταγμένες των m_i και C, αντίστοιχα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη διανυσματική σχέση (6.2) με τρεις αλγεβρικές εξισώσεις:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \;, \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \;, \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i \qquad (6.3)$$

Σαν παράδειγμα, ας θεωρήσουμε δύο σωματίδια με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$, τοποθετημένα στα σημεία x_1 και x_2 του άξονα x. Καλούμε $a = x_2 - x_1$ την απόσταση μεταξύ των δύο σωματιδίων:



Η ολική μάζα του συστήματος είναι $M=m_1+m_2=3m$. Από τις σχέσεις (6.3) βλέπουμε αμέσως ότι το κέντρο μάζας C του συστήματος βρίσκεται πάνω στον άξονα x, αφού $y_i=z_i=0$ ($i = 1,2$) έτσι ώστε $y_C=z_C=0$ (οι άξονες y και z δεν έχουν σχεδιαστεί). Επίσης,

$$x_C = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2) = x_1 + \frac{2}{3}a$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $x_2= x_1+a$. Δηλαδή, το κέντρο μάζας C βρίσκεται σε απόσταση $2a/3$ από το m. Προσέξτε ότι η θέση τού C ως προς το σύστημα των σωματιδίων δεν εξαρτάται από την εκλογή του σημείου αναφοράς O ως προς το οποίο μετρούμε τις συντεταγμένες των μαζών.

Σημειώνουμε ότι, όπως είναι φανερό και από το παραπάνω παράδειγμα, η θέση του κέντρου μάζας ενός συστήματος *δεν συμπίπτει απαραίτητα με τη θέση κάποιου σωματιδίου του συστήματος*. (Δώστε παραδείγματα συστημάτων όπου το C συμπίπτει με κάποιο από τα σωματίδια, καθώς και συστημάτων όπου δεν συμπίπτει.)

6.2 Νόμος του Νεύτωνα και Διατήρηση της Ορμής

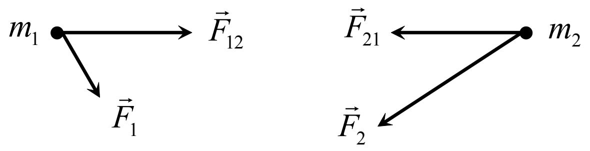
Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots$, οι στιγμιαίες ταχύτητες των σωματιδίων ενός συστήματος. Η *ολική ορμή* του συστήματος είναι

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots$$

ή, σύντομα,

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{6.4}$$

Θεωρούμε, για ευκολία, ένα σύστημα δύο σωματιδίων m_1, m_2. Καλούμε $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ τις αντίστοιχες ολικές *εξωτερικές* δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια από παράγοντες εξωτερικούς ως προς το σύστημα. Υποθέτουμε, επίσης, ότι υπάρχουν και *εσωτερικές* δυνάμεις: $\vec{F}_{12}$ στο σωματίδιο *1* από το σωματίδιο *2*, και $\vec{F}_{21}$ στο σωματίδιο *2* από το σωματίδιο *1*. Σύμφωνα με το νόμο δράσης-αντίδρασης, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.



Η ολική δύναμη στο σωμ.*1* είναι $\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}$, ενώ αυτή στο σωμ.*2* είναι $\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}$. Από το νόμο του Νεύτωνα, έχουμε

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}\,, \qquad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} \quad .$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$, βρίσκουμε

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad .$$

Γενικεύοντας το παραπάνω αποτέλεσμα για σύστημα με αυθαίρετο αριθμό σωματιδίων, έχουμε

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \sum_i \vec{F}_i \tag{6.5}$$

Το αριστερό μέλος τής (6.5) είναι η χρονική παράγωγος της ολικής ορμής $\vec{P}$ του συστήματος. Το δεξί μέλος παριστά την *ολική εξωτερική δύναμη* που δρα στο σύστημα:

$$\vec{F}_{\varepsilon\xi} = \sum_i \vec{F}_i \tag{6.6}$$

Έτσι, η (6.5) γράφεται

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\varepsilon\xi}} \tag{6.7}$$

Δηλαδή, *ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ορμής του συστήματος είναι ίσος με την ολική* ***εξωτερική*** *δύναμη που δρα στο σύστημα*. Παρατηρούμε ότι οι *εσωτερικές* δυνάμεις (που ανά δύο αλληλοαναιρούνται) *δεν* μπορούν να μεταβάλουν την ορμή του συστήματος: αυτό το επιτυγχάνουν μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις.

Ποιος είναι ο ρόλος του κέντρου μάζας σε όλα αυτά; Η απάντηση βρίσκεται σε δύο σημαντικές προτάσεις τις οποίες θα αποδείξουμε παρακάτω:

1. Η ολική ορμή του συστήματος είναι ίδια με αυτή ενός υποθετικού σωματιδίου το οποίο έχει μάζα ίση με την ολική μάζα M του συστήματος και κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος.
2. Το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται σαν να είναι ένα σωματίδιο με μάζα ίση με την ολική μάζα M του συστήματος, πάνω στο οποίο ασκείται η ολική εξωτερική δύναμη που δρα στο σύστημα.

Απόδειξη:

1) Παραγωγίζοντας την (6.2), βρίσκουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας C του συστήματος:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v}_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i \qquad (6.8)$$

Συνδυάζοντας την (6.8) με την (6.4), βρίσκουμε

$$\boxed{\vec{P} = M\,\vec{v}_C} \qquad (6.9)$$

2) Παραγωγίζοντας την (6.9), έχουμε

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\,\vec{v}_C) = M\,\frac{d\vec{v}_C}{dt} = M\,\vec{a}_C$$

όπου $\vec{a}_C$ η επιτάχυνση του κέντρου μάζας. Έτσι, λόγω της (6.7),

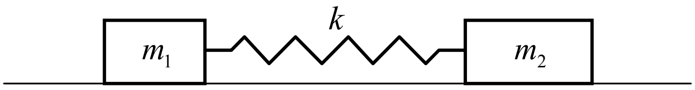
$$\boxed{\vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\,\vec{a}_C} \qquad (6.10)$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το κέντρο μάζας C παίζει το ρόλο ενός υποθετικού σωματιδίου του οποίου η κίνηση αντιπροσωπεύει, κατά κάποιον τρόπο, την κίνηση ολόκληρου του συστήματος.

Ένα σύστημα σωματιδίων λέγεται *απομονωμένο* όταν (α) δεν υπόκειται σε εξωτερικές επιδράσεις (πράγμα που μόνο θεωρητικά μπορεί να συμβεί), ή (β) η ολική εξωτερική δύναμη πάνω σε αυτό είναι μηδέν: $\vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0$. Σε μια τέτοια περίπτωση, οι σχέσεις (6.7) και (6.9) οδηγούν σε δύο βασικά συμπεράσματα:

1. *Η ολική ορμή $\vec{P}$ ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται σταθερή **(αρχή διατήρησης της ορμής)**.*
2. *Το κέντρο μάζας C ενός απομονωμένου συστήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_C$.*

Σαν παράδειγμα, θεωρούμε δύο μάζες m_1, m_2, συνδεδεμένες μεταξύ τους με ελατήριο, οι οποίες μπορούν να κινούνται χωρίς τριβή πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια (όπως εξηγήσαμε στην Παρ.3.1, οι μάζες μπορούν να αντιμετωπίζονται σαν «σωματίδια» στο βαθμό που μας ενδιαφέρει μόνο η μεταφορική τους κίνηση):



Το σύστημα είναι απομονωμένο, διότι η ολική εξωτερική δύναμη είναι μηδέν (τα βάρη των δύο σωμάτων εξουδετερώνονται από τις κάθετες αντιδράσεις από την οριζόντια επιφάνεια, ενώ δεν υπάρχει τριβή). Έτσι, η ολική ορμή του συστήματος, καθώς και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του, μένουν σταθερές κατά την κίνηση των μαζών πάνω στο επίπεδο. Στο σύστημα υπάρχει επίσης και μια *εσωτερική* δύναμη, μέτρου $F_{\varepsilon\sigma} = k\Delta l$ (όπου Δl η παραμόρφωση του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό του μήκος), η οποία *δεν* επηρεάζει την ορμή του συστήματος. Αν και, στην πραγματικότητα, η δύναμη αυτή ασκείται στις μάζες από το ελατήριο, μπορούμε να θεωρούμε ότι η $F_{\varepsilon\sigma}$ ασκείται από τη μία μάζα στην άλλη *μέσω* του ελατηρίου. (Το ελατήριο θεωρείται αβαρές, άρα με μηδενική μάζα, κι έτσι δεν λογίζεται σαν μέρος του συστήματος.)

6.3 Στροφορμή Συστήματος Σωματιδίων

Όπως σημειώσαμε στην Παρ.3.7, η στροφορμή ενός σωματιδίου δεν είναι απόλυτο μέγεθος (όπως, π.χ., η ορμή) αλλά ορίζεται πάντα ως προς κάποιο σημείο *O*. Εκλέγουμε το *O* σαν αρχή των συντεταγμένων ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς (θυμίζουμε ότι μόνο σε ένα τέτοιο σύστημα ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα).

Η στροφορμή ενός σωματιδίου m_i του συστήματος είναι

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \qquad (6.11)$$

όπου $\vec{r}_i$ το διάνυσμα θέσης τού m_i ως προς το *O*. Σύμφωνα με τη σχέση (3.38), αν $\vec{F}_{i,o\lambda}$ είναι η ολική δύναμη στο m_i, η ροπή τής $\vec{F}_{i,o\lambda}$ ως προς το *O* είναι

$$\vec{T}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,o\lambda} = \frac{d\vec{L}_i}{dt} \qquad (6.12)$$

Θεωρούμε αρχικά ένα σύστημα δύο σωματιδίων m_1, m_2 , πάνω στα οποία ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, αντίστοιχα, ενώ οι εσωτερικές δυνάμεις είναι $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$, όπου $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ από το νόμο δράσης-αντίδρασης. Από την (6.12),

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{T}_1 \ , \qquad \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{T}_2$$

και προσθέτοντας κατά μέλη,

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2) = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \qquad (6.13)$$

Αλλά,

$$\vec{T}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,o\lambda} = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} \ ,$$
$$\vec{T}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,o\lambda} = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} \ .$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, έχουμε

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} \ .$$

Το $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ έχει τη διεύθυνση της γραμμής που ενώνει τα δύο σωματίδια. Κάνουμε τώρα την υπόθεση ότι οι εσωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_{12}$ και $\vec{F}_{21}$ δρουν κατά μήκος αυτής της γραμμής (πράγμα που ισχύει στις περισσότερες φυσικές περιπτώσεις). Τότε,

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0$$

οπότε

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{T}_{\varepsilon\xi}$$

όπου $\vec{T}_{\varepsilon\xi}$ η *ολική εξωτερική ροπή* στο σύστημα ως προς *O*. Η (6.13), έτσι, γράφεται

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{T}_{\varepsilon\xi} \qquad (6.14)$$

Για σύστημα με αυθαίρετο αριθμό σωματιδίων, η (6.14) γενικεύεται ως εξής:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{T}_{\varepsilon\xi} \qquad (6.15)$$

Η ποσότητα

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots \qquad (6.16)$$

παριστά την *ολική στροφορμή* του συστήματος ως προς το *O*. Έτσι,

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T}_{\varepsilon\xi}} \qquad (6.17)$$

Δηλαδή, *ο ρυθμός μεταβολής της ολικής στροφορμής του συστήματος ως προς O ισούται με την ολική εξωτερική ροπή στο σύστημα ως προς O*. Παρατηρούμε ότι οι *ε-σωτερικές* δυνάμεις *δεν* μπορούν να μεταβάλουν τη στροφορμή του συστήματος. [Προσέξτε την αναλογία ανάμεσα στις σχέσεις (6.7) και (6.17).]

Δοθέντος ότι η (6.17) είναι συνέπεια του νόμου του Νεύτωνα, η σχέση αυτή ισχύει καταρχήν μόνο σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Έτσι, το σημείο *O* ως προς το οποίο λαμβάνονται τα $\vec{L}$ και $\vec{T}_{\varepsilon\xi}$ πρέπει να είναι σταθερό σημείο (π.χ., αρχή των συντεταγμένων) κάποιου αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Όταν το σύστημα των σωματιδίων είναι απομονωμένο, το κέντρο μάζας *C* κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς (βλ. Παρ.6.2), και επομένως το ίδιο το *C* μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζει ένα ειδικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς που καλείται *σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας* (ή σύντομα, *σύστημα-C*). Προφανώς, το *C* είναι ακίνητο ως προς το σύστημα-*C* και μπορεί να λαμβάνεται ως αρχή των συντεταγμένων του. Έτσι, στην περίπτωση απομονωμένου συστήματος σωματιδίων, η σχέση (6.17) θα ισχύει αν λάβουμε τα $\vec{L}$ και $\vec{T}_{\varepsilon\xi}$ ως προς το κέντρο μάζας *C*.

Όταν το σύστημα των σωματιδίων *δεν* είναι απομονωμένο, το κέντρο μάζας *C* επιταχύνεται, σύμφωνα με τη σχέση (6.10). Το *C*, λοιπόν, *δεν* μπορεί να είναι σταθερό σημείο σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Θα περίμενε κανείς πως, στην περίπτωση αυτή, η σχέση (6.17) δεν θα ίσχυε ως προς το *C*. Ένα από τα αξιοπερίεργα, εν τούτοις, της Μηχανικής είναι ότι η σχέση αυτή εξακολουθεί να ισχύει:

> *Η σχέση (6.17) ισχύει πάντα ως προς το κέντρο μάζας C του συστήματος, ακόμα κι αν το σημείο αυτό επιταχύνεται ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή!*

Από την (6.17) παρατηρούμε ότι, αν $\vec{T}_{\varepsilon\xi}=0$, τότε $d\vec{L}/dt=0$ ή $\vec{L}=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$. Οδηγούμαστε έτσι στην ***αρχή διατήρησης της στροφορμής***:

> *Όταν η ολική εξωτερική ροπή στο σύστημα, ως προς κάποιο σημείο Ο, είναι μηδέν, η ολική στροφορμή του συστήματος ως προς το σημείο αυτό μένει σταθερή.*

Σαν παράδειγμα, θεωρήστε ένα σύστημα ηλεκτρικά φορτισμένων σωματίων με φορτία $q_1, q_2, \cdots$. Τα σωμάτια βρίσκονται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από κάποιο φορτίο *Q* τοποθετημένο σταθερά σε σημείο *Ο*. Στα σωμάτια δεν ασκούνται άλλες εξωτερικές δυνάμεις (π.χ., δυνάμεις βαρύτητας) πέραν των δυνάμεων Coulomb από το Q. Υποθέτοντας ότι οι σχετικές ταχύτητες των φορτίων είναι μικρές, έτσι ώστε, προσεγγιστικά, όλες οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις μεταξύ των φορτίων είναι παράλληλες με τις αντίστοιχες γραμμές που τα ενώνουν ανά δύο, δείξτε ότι η ολική στροφορμή του συστήματος των q_i ως προς το *Ο* μένει σταθερή. (Προσέξτε ότι η πρόταση αυτή δεν ισχύει, γενικά, για σημεία αναφοράς της στροφορμής διάφορα του *Ο*, αφού, ως προς τέτοια σημεία, $\vec{T}_{\varepsilon\xi}\neq 0$.)

Παρατήρηση: Η αρχή διατήρησης της στροφορμής βασίστηκε στην (6.17), η οποία, με τη σειρά της, αποδείχθηκε κάνοντας την υπόθεση ότι οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος διευθύνονται παράλληλα προς τις αντίστοιχες γραμμές που ενώνουν τα σωματίδια ανά δύο (είναι, δηλαδή, *κεντρικές* δυνάμεις). Υπάρχουν όμως και φυσικές περιπτώσεις όπου η συνθήκη αυτή δεν πληρούται. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, σε ένα απομονωμένο σύστημα κινούμενων ηλεκτρικών φορτίων όταν οι σχετικές ταχύτητές τους δεν είναι μικρές. Η σχέση (6.17), τότε, *δεν* ισχύει για ένα τέτοιο σύστημα, και η αρχή διατήρησης της στροφορμής δεν ικανοποιείται (παρά την απουσία εξωτερικών δυνάμεων). Η ισχύς της αρχής αυτής αποκαθίσταται αν μαζί με τη στροφορμή του συστήματος των φορτίων συνυπολογίσουμε και τη «στροφορμή» του ηλεκτρομαγνητικού τους πεδίου. (Ναι, ακόμα και ένα πεδίο μπορεί να περιέχει ενέργεια, ορμή και στροφορμή!) Η παραπάνω αρχή, λοιπόν, έχει γενικότερη σημασία από αυτή που υποδηλώνει η σχέση (6.17).

Σημείωση: Έστω *Ο* η αρχή των συντεταγμένων ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς, και έστω *C* το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωματιδίων. Όπως αποδεικνύεται, η στροφορμή $\vec{L}$ του συστήματος ως προς το *Ο*, και η στροφορμή $\vec{L}_C$ του συστήματος ως προς το *C*, συνδέονται με τη σχέση

$$\vec{L} = \vec{L}_C + M(\vec{r}_C \times \vec{v}_C)$$

όπου M η ολική μάζα του συστήματος και $\vec{r}_C \, , \vec{v}_C$ το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα, αντίστοιχα, του κέντρου μάζας C ως προς το O.

6.4 Κινητική Ενέργεια Συστήματος Σωματιδίων

Θυμίζουμε ότι, σύμφωνα με το ΘΜΚΕ (Παρ.4.3), η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σωματιδίου μέσα σε ένα χρονικό διάστημα ισούται με το έργο της *ολικής* δύναμης που δρα πάνω στο σωματίδιο στο διάστημα αυτό. Στην περίπτωση συστήματος σωματιδίων, το ΘΜΚΕ γενικεύεται ως εξής:

> *Η μεταβολή της ολικής κινητικής ενέργειας ενός συστήματος σωματιδίων ισούται με το έργο των εξωτερικών* ***και*** *των εσωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα.*

Απόδειξη:

Θεωρούμε, για ευκολία, ένα σύστημα δύο σωματιδίων $m_1 \, , m_2$ που υπόκεινται σε εξωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_1 \, , \vec{F}_2$ και εσωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_{12} \, , \vec{F}_{21}$, αντίστοιχα. Έστω $d\vec{r}_1 \, , d\vec{r}_2$ οι στοιχειώδεις μετατοπίσεις των σωματιδίων μέσα σε χρονικό διάστημα dt. Από το νόμο του Νεύτωνα,

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} \; , \qquad m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}$$

(όπου $\vec{a}_1 \, , \vec{a}_2$ οι επιταχύνσεις των σωματιδίων), έτσι ώστε

$$m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 \;\; ,$$
$$m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 \;\; .$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, έχουμε

$$m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 + m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) \qquad (6.18)$$

Όμως,

$$\vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \cdot d\vec{r}_1 = d\vec{v}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1 = \frac{1}{2} d(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1) = \frac{1}{2} d(v_1{}^2)$$
$$= \frac{1}{2} \frac{d(v_1{}^2)}{dv_1} dv_1 = \frac{1}{2}(2v_1) dv_1 = v_1 dv_1$$

και όμοια,

$$\vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 = v_2 dv_2$$

όπου $v_1 \, , v_2$ τα μέτρα των $\vec{v}_1 \, , \vec{v}_2$, αντίστοιχα. Επιπλέον,

$$d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = d\vec{r}_{12}$$

όπου $\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Έτσι, η (6.18) γράφεται

$$m_1 v_1 dv_1 + m_2 v_2 dv_2 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} \quad .$$

Ολοκληρώνοντας από *A* ως *B*, όπου με *A* και *B* συμβολίζουμε, γενικά, την κατάσταση του συστήματος (π.χ., τις θέσεις και τις ταχύτητες των σωματιδίων) τις χρονικές στιγμές t_A και t_B , αντίστοιχα, έχουμε:

$$m_1 \int_A^B v_1 dv_1 + m_2 \int_A^B v_2 dv_2 = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} \qquad (6.19)$$

Το αριστερό μέλος τής (6.19) ισούται με

$$m_1 \left[\frac{v_1^{\,2}}{2} \right]_A^B + m_2 \left[\frac{v_2^{\,2}}{2} \right]_A^B = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{\,2} \right)_B - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{\,2} \right)_A$$

$$= E_{k,B} - E_{k,A} \equiv \Delta E_k$$

όπου το

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{\,2} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{\,2} \qquad (6.20)$$

παριστά την *ολική κινητική ενέργεια* του συστήματος. Στο δεξί μέλος τής (6.19), το άθροισμα

$$\int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = W_{\varepsilon\xi} \qquad (6.21)$$

παριστά το ολικό έργο των *εξωτερικών* δυνάμεων από t_A έως t_B , ενώ το ολοκλήρωμα

$$\int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \int_A^B \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = \sum_i \sum_{j \neq i} \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = W_{\varepsilon\sigma} \qquad (6.22)$$

παριστά το έργο των *εσωτερικών* δυνάμεων στο διάστημα αυτό. Έτσι, τελικά, η (6.19) γράφεται

$$\boxed{E_{k,B} - E_{k,A} \equiv \Delta E_k = W_{\varepsilon\xi} + W_{\varepsilon\sigma}} \qquad (6.23)$$

Παρόλο που αποδείχθηκε για δύο σωματίδια, η σχέση (6.23) ισχύει γενικότερα για σύστημα με αυθαίρετο αριθμό σωματιδίων.

Όταν στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, τότε προφανώς $W_{\varepsilon\xi}$=0, οπότε η μεταβολή της ολικής κινητικής ενέργειας του συστήματος οφείλεται αποκλειστικά στις *εσωτερικές* δυνάμεις. Για παράδειγμα, θεωρήστε δύο ηλεκτρικά φορτία που βρίσκονται κοντά το ένα στο άλλο και τα οποία κρατάμε αρχικά ακίνητα. Αν τα αφήσουμε ελεύθερα, οι μεταξύ τους ασκούμενες δυνάμεις Coulomb (εσωτερικές δυνάμεις) θα θέσουν τα φορτία σε κίνηση και θα προσδώσουν στο σύστημα κινητική ενέργεια ίση με το ολικό έργο των δυνάμεων αυτών. Προσέξτε ότι, στην απουσία *εξωτερικών* δυνάμεων, η ολική ορμή του συστήματος μένει σταθερή, κάτι που γενικά *δεν* ισχύει για την κινητική ενέργεια (εκτός αν η αλληλεπίδραση των σωματιδίων είναι αμελητέα).

Σημείωση: Όπως αποδεικνύεται, η κινητική ενέργεια E_k ενός συστήματος σωματιδίων ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς μας, και η κινητική ενέργεια $E_{k,C}$ του συστήματος των σωματιδίων ως προς το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας C, συνδέονται με τη σχέση

$$E_k = E_{k,C} + \frac{1}{2} M v_C{}^2$$

όπου M η ολική μάζα του συστήματος και $\vec{v}_C$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας C ως προς το σύστημα αναφοράς μας.

6.5 Διατήρηση της Ενέργειας Συστήματος Σωματιδίων

Το γενικευμένο ΘΜΚΕ (6.23) έχει γενική ισχύ, ανεξάρτητα από τη φύση των εξωτερικών και των εσωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα. Στη σχέση (6.23), τα $W_{\varepsilon\xi}$ και $W_{\varepsilon\sigma}$ παριστούν τα αντίστοιχα έργα των δυνάμεων αυτών όταν το σύστημα μεταβαίνει από μια κατάσταση A σε μια άλλη κατάσταση B μέσα στο χρονικό διάστημα t_A t_B .

Όταν τόσο οι εσωτερικές, όσο και οι εξωτερικές δυνάμεις είναι *συντηρητικές*, υπάρχουν εκφράσεις $E_{p,\varepsilon\sigma}$ (*εσωτερική δυναμική ενέργεια*) και $E_{p,\varepsilon\xi}$ (*εξωτερική δυναμική ενέργεια*), οι οποίες είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων των σωματιδίων, τέτοιες ώστε

$$W_{\varepsilon\sigma} = (E_{p,\varepsilon\sigma})_A - (E_{p,\varepsilon\sigma})_B \tag{6.24}$$

και

$$W_{\varepsilon\xi} = (E_{p,\varepsilon\xi})_A - (E_{p,\varepsilon\xi})_B \tag{6.25}$$

Η (6.23), τότε, γράφεται

$$E_{k,B} - E_{k,A} = (E_{p,\varepsilon\sigma} + E_{p,\varepsilon\xi})_A - (E_{p,\varepsilon\sigma} + E_{p,\varepsilon\xi})_B \quad \Rightarrow$$

$$(E_k + E_{p,\varepsilon\sigma} + E_{p,\varepsilon\xi})_A = (E_k + E_{p,\varepsilon\sigma} + E_{p,\varepsilon\xi})_B \tag{6.26}$$

Η σχέση (6.26), που αποτελεί την ΑΔΜΕ για σύστημα σωματιδίων, ισχύει για τυχαίες καταστάσεις A και B του συστήματος. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η ποσότητα

$$E = E_k + E_{p,\varepsilon\sigma} + E_{p,\varepsilon\xi} = E_k + E_p \tag{6.27}$$

που παριστά την *ολική μηχανική ενέργεια* του συστήματος, μένει σταθερή κατά την κίνηση του συστήματος, υπό την προϋπόθεση ότι *όλες* οι δυνάμεις που δρουν στο σύστημα, εσωτερικές και εξωτερικές, είναι συντηρητικές. Προσέξτε ότι καλέσαμε $E_p = E_{p,\varepsilon\sigma} + E_{p,\varepsilon\xi}$ την *ολική δυναμική ενέργεια* του συστήματος. Επίσης, οι εκφράσεις $E_{p,\varepsilon\sigma}$ και $E_{p,\varepsilon\xi}$ στην ουσία παριστούν αθροίσματα δυναμικών ενεργειών που σχετίζονται με όλες τις συντηρητικές δυνάμεις που δρουν στο σύστημα, εσωτερικές και εξωτερικές, αντίστοιχα.

Όταν κάποιες από τις δυνάμεις που δρουν στο σύστημα (εσωτερικές ή εξωτερικές) είναι μη-συντηρητικές, το άθροισμα (E_k+E_p) δεν μένει σταθερό: η μεταβολή του περιγράφεται από μια σχέση ανάλογη της (4.20). Έτσι, αν W' είναι το έργο των μη-συντηρητικών δυνάμεων κατά τη μετάβαση του συστήματος από μια κατάσταση A σε μια άλλη κατάσταση B, είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$W' = (E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A \equiv \Delta(E_k + E_p) \qquad (6.28)$$

Δηλαδή, *η μεταβολή του αθροίσματος* (E_k+E_p) *ισούται με το έργο των μη-συντηρητικών δυνάμεων (εσωτερικών ή εξωτερικών).* Το άθροισμα (E_k+E_p) μένει σταθερό μόνο στην ειδική περίπτωση όπου οι μη-συντηρητικές δυνάμεις δεν παράγουν έργο $(W' = 0)$.

Δίνουμε τώρα δύο παραδείγματα συντηρητικών συστημάτων:

1) Θεωρούμε ένα άτομο υδρογόνου αποτελούμενο από ένα ηλεκτρόνιο και ένα πρωτόνιο με μάζες m_1 και m_2 , αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι τα σωμάτια δεν υπόκεινται σε άλλες δυνάμεις πέραν από τη μεταξύ τους έλξη Coulomb (4.28), η οποία παίζει το ρόλο εσωτερικής δύναμης στο σύστημα και είναι συντηρητική (βλ. Παρ.4.6). Έχουμε:

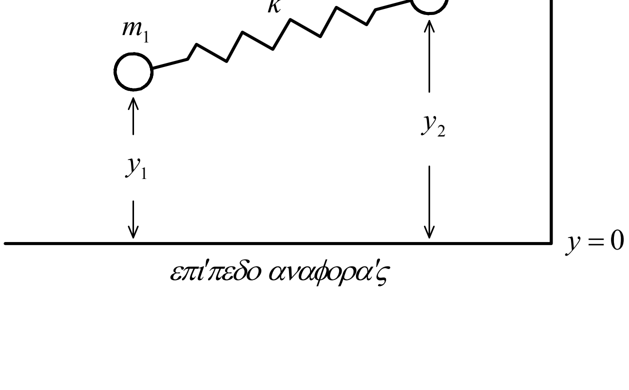
$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \ , \quad E_{p,\varepsilon\sigma} = -k\frac{q^2}{r} \ , \quad E_{p,\varepsilon\xi} = 0$$

όπου q η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου και r η απόσταση του ηλεκτρονίου από τον πυρήνα του ατόμου (πρωτόνιο). Η ΑΔΜΕ δίνει

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - k\frac{q^2}{r} = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (6.29)$$

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τις (6.22) και (6.24), μαζί με την (4.28), επαληθεύστε την έκφραση για την εσωτερική δυναμική ενέργεια $E_{p,\varepsilon\sigma}$.

2) Θεωρούμε δύο μάζες m_1, m_2 που συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς k. Το σύστημα βρίσκεται στον αέρα, κοντά στην επιφάνεια της Γης:



Καλούμε y_1, y_2 τα στιγμιαία ύψη στα οποία βρίσκονται οι μάζες πάνω από το επίπεδο αναφοράς y=0 (π.χ., επιφάνεια της Γης), στο οποίο η δυναμική ενέργεια της βαρύτητας ορίζεται ως μηδέν. Επίσης, καλούμε x την παραμόρφωση (επέκταση ή συμπίεση) του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Στο σύστημα ασκούνται τέσσερις δυνάμεις: δύο εσωτερικές, μέτρου kx, που εκφράζουν την αλληλεπίδραση των δύο μαζών μέσω του ελατηρίου, και δύο εξωτερικές, $m_1 g$ και $m_2 g$, που περιγράφουν την έλξη της Γης στις δύο μάζες. Οι δυναμικές ενέργειες, εσωτερική και εξωτερική, του συστήματος είναι

$$E_{p,\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2}kx^2 \ , \qquad E_{p,\varepsilon\xi} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

(προσέξτε ότι η $E_{p,\varepsilon\xi}$ είναι το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών που αντιστοιχούν σε κάθε μάζα ξεχωριστά). Η ΑΔΜΕ δίνει

$$E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2 + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (6.30)$$

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τις (6.22) και (6.24), επαληθεύστε την έκφραση για την εσωτερική δυναμική ενέργεια $E_{p,\varepsilon\sigma}$. (Θεωρήστε ότι η σχετική κίνηση των δύο μαζών γίνεται πάντα κατά μήκος του άξονα που τις συνδέει.) Υποθέστε τώρα ότι οι μάζες κινούνται πάνω σε ένα *λείο* κεκλιμένο επίπεδο. Χρησιμοποιώντας την (6.28), και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι κάθετες αντιδράσεις από το επίπεδο δεν παράγουν έργο (W'=0), δείξτε ότι η (6.30) εξακολουθεί να ισχύει.

6.6 Κρούσεις

Η *κρούση* είναι μια μορφή αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο μαζών, κατά την οποία οι μάζες έρχονται σε «επαφή» (αν και αυτό δεν είναι ακριβές σε ατομικό επίπεδο!), ανταλλάσσοντας ορμή και ενέργεια. Θεωρούμε ότι το φαινόμενο λαμβάνει χώρα μέσα σε ένα πάρα πολύ μικρό (απειροστό) χρονικό διάστημα dt. Δηλαδή, η αλληλεπίδραση των μαζών είναι σχεδόν στιγμιαία: αμέσως πριν και αμέσως μετά την επαφή, οι μάζες ουσιαστικά δεν ασκούν καμία δύναμη η μία στην άλλη.

Τα προβλήματα κρούσης μάς δίνουν μια καλή ευκαιρία να μελετήσουμε στην πράξη διάφορους νόμους διατήρησης:

1) Διατήρηση της ορμής

Όπως γνωρίζουμε, η μεταβολή $d\vec{P}$ της ολικής ορμής $\vec{P}$ ενός συστήματος σε ένα χρονικό διάστημα dt οφείλεται στην ολική εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$ (π.χ., βαρύτητα, τριβή, κλπ.) που δρα στο σύστημα στο διάστημα αυτό. Τα παραπάνω μεγέθη συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\varepsilon\xi} \quad \Rightarrow \quad d\vec{P} = \vec{F}_{\varepsilon\xi}\, dt \ .$$

Τώρα, στις κρούσεις οι εξωτερικές δυνάμεις (που αθροίζονται στην $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$) είναι σχεδόν αμελητέες σε σύγκριση με τις εσωτερικές δυνάμεις που οφείλονται στην αλληλεπίδραση των μαζών. Επιπλέον, το χρονικό διάστημα *dt* που διαρκεί η αλληλεπίδραση είναι απειροστό. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{F}_{\varepsilon\xi}\, dt \approx 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{P} \approx 0 \,.$$

Τούτο σημαίνει ότι

> *κατά τη διάρκεια μιας κρούσης, η ολική ορμή του συστήματος μένει σταθερή. Δηλαδή, η ορμή* ***αμέσως πριν*** *την κρούση είναι ίση με την ορμή* ***αμέσως μετά*** *την κρούση.*

2) Διατήρηση της στροφορμής

Η μεταβολή $d\vec{L}$ της ολικής στροφορμής ενός συστήματος (ως προς κάποιο σημείο) συνδέεται με την ολική εξωτερική ροπή $\vec{T}_{\varepsilon\xi}$ στο σύστημα (ως προς το σημείο αυτό), σύμφωνα με τη σχέση

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T}_{\varepsilon\xi} \quad \Rightarrow \quad d\vec{L} = \vec{T}_{\varepsilon\xi}\, dt \,.$$

Και πάλι,

$$\vec{T}_{\varepsilon\xi}\, dt \approx 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{L} \approx 0 \,.$$

Δηλαδή,

> *κατά τη διάρκεια μιας κρούσης, η ολική στροφορμή του συστήματος (ως προς οποιοδήποτε σημείο) μένει σταθερή (οι τιμές της στροφορμής* ***αμέσως πριν*** *και* ***αμέσως μετά*** *την κρούση είναι ίσες).*

3) Κινητική ενέργεια

Σε αντίθεση με την ορμή και τη στροφορμή, η ολική κινητική ενέργεια *δεν* διατηρείται απαραίτητα σε μια κρούση. Τούτο εξηγείται ως εξής: Θυμίζουμε ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός συστήματος σε ένα χρονικό διάστημα (εδώ, στο διάστημα *dt* που διαρκεί η κρούση) ισούται με το έργο των εξωτερικών *και* των εσωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα στο διάστημα αυτό. Και, αν το έργο των εξωτερικών δυνάμεων σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα είναι αμελητέο, το έργο των εσωτερικών δυνάμεων μπορεί να είναι σημαντικό, ιδιαίτερα αν η κρούση προκαλεί *παραμόρφωση* των συγκρουόμενων σωμάτων. Σε μια τέτοια περίπτωση, μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος καταναλώνεται λόγω του (αρνητικού) έργου των εσωτερικών δυνάμεων που προκαλούν την παραμόρφωση.

Με βάση τη διατήρηση ή όχι της κινητικής ενέργειας, διακρίνουμε τα εξής είδη κρούσης:

α) *Τέλεια ελαστική κρούση* (ή απλά *ελαστική*): Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος μένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κρούσης. Δηλαδή, οι τιμές της κινητικής ενέργειας *αμέσως πριν* και *αμέσως μετά* την κρούση είναι ίσες. Τούτο ισχύει όταν η κρούση δεν προκαλεί παραμόρφωση των σωμάτων. Παράδειγμα: η σύγκρουση ανάμεσα σε δύο μπάλες του μπιλιάρδου.

β) *Μη-ελαστική κρούση*: Μέρος της κινητικής ενέργειας του συστήματος χάνεται λόγω παραμόρφωσης κατά την κρούση, κι έτσι η ενέργεια αυτή δεν μένει σταθερή. Παράδειγμα: η σύγκρουση ανάμεσα σε δύο λαστιχένιες μπάλες.

γ) *Πλαστική κρούση*: Είναι ακραία μορφή μη-ελαστικής κρούσης κατά την οποία τα συγκρουόμενα σώματα προσκολλώνται το ένα στο άλλο και κινούνται μαζί, σαν ένα σώμα, με κοινή ταχύτητα. Μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος χάνεται λόγω παραμόρφωσης των σωμάτων. Παράδειγμα: η σύγκρουση ανάμεσα σε δύο μπάλες από πηλό.

6.7 Πλαστική και Ελαστική Κρούση

α) <u>*Πλαστική κρούση*</u>

Θεωρούμε δύο μάζες m_1 και m_2 που κινούνται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητες $\vec{v}_1 = v_1 \hat{u}_x$ και $\vec{v}_2 = v_2 \hat{u}_x$. (Προσέξτε ότι τα v_1 και v_2 είναι *αλγεβρικές τιμές* και μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά. Στο παράδειγμα του σχήματος, $v_1>0$ και $v_2<0$.) Μετά τη σύγκρουσή τους, οι μάζες προσκολλώνται η μία στην άλλη και κινούνται σαν ένα σώμα μάζας (m_1+m_2), με ταχύτητα $\vec{V} = V \hat{u}_x$.

Εδώ ισχύει μόνο η διατήρηση της ορμής. Εξισώνοντας τις τιμές της ολικής ορμής αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση, έχουμε:

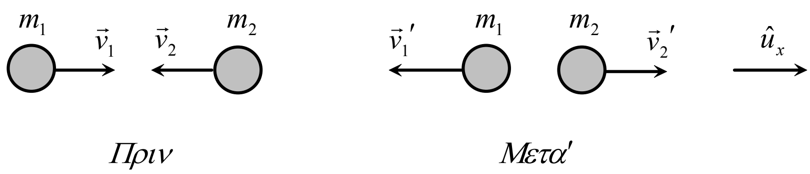
$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\, \hat{u}_x \equiv V \hat{u}_x \tag{6.31}$$

Στην περίπτωση που οι δύο μάζες είναι ίσες ($m_1=m_2$) και συγκρούονται μετωπικά με ταχύτητες ίσες κατά μέτρο ($v_2= -v_1$), η (6.31) δίνει $\vec{V}=0$. Δηλαδή, η σύνθετη μάζα που προκύπτει μένει ακίνητη. Γενικά, η κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{V}$ προσδιορίζεται από το πρόσημο της αλγεβρικής τιμής V.

Άσκηση: Βρείτε την ταχύτητα $\vec{V}$ στην περίπτωση που το σώμα m_2 είναι αρχικά ακίνητο. Τι θα συμβεί αν $m_2>>m_1$ (όπως, π.χ., όταν ένα κομμάτι πηλού εκτοξεύεται σε έναν τοίχο);

β) <u>*Ελαστική κρούση*</u>



Θεωρούμε δύο μάζες m_1 και m_2 που κινούνται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητες $\vec{v}_1 = v_1 \hat{u}_x$ και $\vec{v}_2 = v_2 \hat{u}_x$. Οι μάζες συγκρούονται ελαστικά και, αμέσως μετά την κρούση, αποκτούν νέες ταχύτητες $\vec{v}_1{}' = v_1{}' \hat{u}_x$ και $\vec{v}_2{}' = v_2{}' \hat{u}_x$. (Τα v_1 , v_2 , $v_1{}', v_2{}'$ είναι αλγεβρικές τιμές και μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά. Στο παράδειγμα του σχήματος, v_1>0, v_2<0, κλπ.) Ζητούμε τις ταχύτητες των μαζών μετά την κρούση.

Η διατήρηση της ορμής δίνει

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' \;\Rightarrow\; (m_1 v_1 + m_2 v_2)\,\hat{u}_x = (m_1 v_1{}' + m_2 v_2{}')\,\hat{u}_x \;\Rightarrow$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1{}' + m_2 v_2{}' \tag{6.32}$$

Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας, έχουμε

$$\frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1{}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}'^2 \;\Rightarrow$$

$$m_1 v_1{}^2 + m_2 v_2{}^2 = m_1 v_1{}'^2 + m_2 v_2{}'^2 \tag{6.33}$$

Η (6.32) γράφεται

$$m_1(v_1 - v_1{}') = m_2(v_2{}' - v_2) \tag{6.32΄}$$

ενώ η (6.33) δίνει

$$m_1(v_1 - v_1{}')(v_1 + v_1{}') = m_2(v_2{}' - v_2)(v_2 + v_2{}') \tag{6.33΄}$$

Τώρα, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι οι ταχύτητες των μαζών μεταβάλλονται κατά την κρούση. Έτσι, $v_1 - v_1{}' \neq 0$, $v_2{}' - v_2 \neq 0$, πράγμα που μας επιτρέπει να διαιρέσουμε κατά μέλη την (6.33΄) με την (6.32΄):

$$v_1 + v_1{}' = v_2 + v_2{}' \tag{6.34}$$

Οι (6.32) και (6.34) αποτελούν σύστημα με αγνώστους τα $v_1{}'$ και $v_2{}'$, για δοσμένα v_1 και v_2 . Λύνοντας το σύστημα αυτό, βρίσκουμε

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad , \qquad v_2' = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \qquad (6.35)$$

<u>Ειδικές περιπτώσεις</u>:

1) Αν $m_1 = m_2$, η (6.35) δίνει $v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$. Δηλαδή, *τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες*. Ειδικά, αν το m_2 είναι αρχικά ακίνητο, μετά την κρούση αποκτά την ταχύτητα που είχε αρχικά το m_1, το οποίο μετά την κρούση μένει, με τη σειρά του, ακίνητο.

2) Αν $m_2 >> m_1$, μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $m_1 / m_2 \simeq 0$. Η (6.35) τότε δίνει $v_1' \simeq -v_1 + 2v_2$, $v_2' \simeq v_2$ (δείξτε το!). Ειδικά, αν το m_2 είναι αρχικά ακίνητο (v_2=0), τότε $v_1' \simeq -v_1$, $v_2' \simeq 0$. Δηλαδή, μετά την κρούση το m_2 παραμένει ακίνητο, ενώ η φορά κίνησης του m_1 αντιστρέφεται χωρίς να αλλάξει το μέτρο της ταχύτητάς του. Αυτό συμβαίνει, π.χ., όταν μια μπάλα του μπιλιάρδου προσκρούει κάθετα σε μια σκληρή επιφάνεια και ανακλάται.

Σημείωση: Το είδος της κρούσης που περιγράψαμε ονομάζεται *κεντρική κρούση*, και έχει σαν χαρακτηριστικό ότι όλες οι ταχύτητες, πριν και μετά την κρούση, είναι στη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τα κέντρα μάζας των συγκρουόμενων σωμάτων. Όταν η συνθήκη αυτή δεν πληρούται, η κρούση καλείται *έκκεντρη*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

7.1 Στερεό Σώμα

Ένα σύστημα σωματιδίων αποτελεί *στερεό σώμα* αν οι σχετικές θέσεις και αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων μένουν σταθερές όταν στο σύστημα ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή ροπές. Έτσι, ένα στερεό σώμα διατηρεί το σχήμα του κατά τη διάρκεια της κίνησής του.[1]

Ένα στερεό σώμα μπορεί να εκτελεί δύο ειδών κινήσεις:

1) *Μεταφορική κίνηση*, όταν όλα τα σωματίδια κινούνται με την ίδια ταχύτητα και διαγράφουν παράλληλες τροχιές, έτσι ώστε το σώμα να μένει πάντα παράλληλο με την αρχική του θέση.

2) *Περιστροφική κίνηση* ως προς έναν άξονα, όταν τα σωματίδια διαγράφουν κυκλικές τροχιές γύρω από τον άξονα περιστροφής. Ο άξονας αυτός μπορεί να είναι σταθερός ή να μετατοπίζεται κατά την κίνηση.

Η πιο γενική κίνηση στερεού σώματος είναι συνδυασμός μεταφοράς και περιστροφής (παρατηρήστε, για παράδειγμα, την κίνηση μιας μπάλας ή μιας ρόδας αυτοκινήτου). Ένας τέτοιος συνδυασμός κινήσεων είναι αυτός που αποτελείται από μια μεταφορική κίνηση του σώματος και μια περιστροφική κίνηση ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Όπως θα δούμε, το κέντρο μάζας παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη της δυναμικής του στερεού σώματος.

7.2 Κέντρο Μάζας Στερεού Σώματος

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το κέντρο μάζας C ενός συστήματος σωματιδίων κινείται σαν να είναι σωματίδιο με μάζα ίση με την ολική μάζα M του συστήματος, πάνω στο οποίο ασκείται η ολική εξωτερική δύναμη που δρα στο σύστημα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα είναι οι δυνάμεις βαρύτητας. Το ολικό βάρος του συστήματος είναι

$$\vec{w} = \sum_i \vec{w}_i = \sum_i (m_i \vec{g}) = \left(\sum_i m_i \right) \vec{g} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{w} = M\vec{g} \quad \text{όπου} \quad M = \sum_i m_i \tag{7.1}$$

Προσέξτε ότι το $\vec{w}$ είναι άθροισμα δυνάμεων που ασκούνται σε διαφορετικά σωματίδια που βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χώρου.

Το ερώτημα τώρα είναι: Υπάρχει κάποιο σημείο του χώρου στο οποίο να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι εφαρμόζεται το ολικό βάρος $\vec{w}$ ενός συστήματος, και ειδικότερα

[1] Πιο γενικά, ένα στερεό σώμα είναι δυνατό να αποτελείται από κινητά μέρη. Η περίπτωση αυτή θα εξεταστεί στην Παρ.7.7.

ενός στερεού σώματος; Μια προφανής σκέψη είναι πως ένα τέτοιο σημείο θα μπορούσε να είναι το κέντρο μάζας C του σώματος, μια και, όπως προαναφέραμε, το σημείο αυτό συμπεριφέρεται σαν να συγκεντρώνει την ολική μάζα M του σώματος και την ολική εξωτερική δύναμη που δρα στο σώμα. Και το $\vec{w}$ είναι πράγματι η ολική εξωτερική δύναμη της βαρύτητας. Όμως εδώ υπάρχει ένα λεπτό σημείο: Σε αντίθεση με ένα σημειακό σωματίδιο (όπως το υποθετικό «σωματίδιο» μάζας M που κινείται μαζί με το C), που απλά μεταφέρεται στο χώρο, ένα στερεό σώμα είναι δυνατό να εκτελεί και πιο σύνθετες κινήσεις, όπως, π.χ., συνδυασμό μεταφοράς και περιστροφής. Η *μεταφορική* κίνηση του σώματος κάτω από την επίδραση της βαρύτητας αντιπροσωπεύεται πράγματι από την κίνηση του κέντρου μάζας C, αν θεωρήσουμε το σημείο αυτό σαν «σωματίδιο» μάζας M στο οποίο ασκείται η ολική δύναμη $\vec{w}$. Για την *περιστροφική* κίνηση του σώματος, όμως, υπεύθυνες είναι όχι οι δυνάμεις καθαυτές αλλά οι *ροπές* των δυνάμεων. Πού πρέπει να τοποθετήσουμε την ολική δύναμη $\vec{w}$, έτσι ώστε η περιστροφική κίνηση που προκαλεί στο σώμα να είναι ίδια με αυτή που προκαλούν όλες οι επιμέρους δυνάμεις $\vec{w}_i = m_i\vec{g}$ μαζί; Ισοδύναμα, πού πρέπει να τοποθετήσουμε το $\vec{w}$, έτσι ώστε η ροπή του *ως προς οποιοδήποτε σημείο O* να ισούται με την ολική ροπή των $\vec{w}_i$ ως προς το O ; Απάντηση: Στο κέντρο μάζας C ! (Αυτό θα το δείξουμε αναλυτικά στο Παράρτημα Α.) Συμπέρασμα: Τοποθετώντας το ολικό βάρος $\vec{w}$ του σώματος στο κέντρο μάζας C, πετυχαίνουμε να περιγράψουμε όχι μόνο τη μεταφορική, αλλά και την περιστροφική κίνηση του σώματος κάτω από την επίδραση της βαρύτητας. Στο εξής, λοιπόν, θα θεωρούμε ότι

το βάρος ενός σώματος εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας C του σώματος.

Για το λόγο αυτό, το C καλείται και *κέντρο βάρους* του σώματος. Σημειώνουμε ότι το κέντρο μάζας ενός σώματος *δεν είναι απαραίτητα σημείο του ίδιου του σώματος* (σκεφτείτε, για παράδειγμα, την περίπτωση ενός κρίκου ή ενός σφαιρικού φλοιού).

Είπαμε νωρίτερα ότι ένα στερεό σώμα είναι σύστημα σωματιδίων που διατηρούν σταθερές θέσεις και αποστάσεις μεταξύ τους. Για παράδειγμα, δύο μεταλλικά σφαιρίδια που συνδέονται μεταξύ τους με μια λεπτή, αβαρή ράβδο μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελούν στερεό σώμα. Η πιο συνηθισμένη εικόνα, όμως, που έχουμε για ένα στερεό είναι αυτή ενός φυσικού αντικειμένου πεπερασμένων διαστάσεων που δομείται με *συνεχή* κατανομή ύλης. Ένα τέτοιο σώμα μπορεί να θεωρηθεί σαν σύστημα που αποτελείται από ένα τεράστιο (πρακτικά άπειρο) πλήθος σωματιδίων με στοιχειώδεις (απειροστές) μάζες dm_i , τοποθετημένα έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σωματιδίων να είναι μηδέν. Η ολική μάζα του σώματος είναι

$$M = \sum_i dm_i = \int dm \qquad (7.2)$$

όπου αντικαταστήσαμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα λόγω του ότι τα dm_i είναι απειροστά και η κατανομή της ύλης είναι συνεχής.

Κάθε σημείο ενός στερεού σώματος προσδιορίζεται με το διάνυσμα θέσης του, $\vec{r}$, ή τις συντεταγμένες του, (x, y, z), ως προς την αρχή O των συντεταγμένων ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Έστω dV ένας απειροστός όγκος στο σημείο $\vec{r} \equiv (x, y, z)$, και έστω dm η μάζα του σώματος που περικλείεται στον όγκο αυτό. Η *πυκνότητα ρ* του σώματος στο σημείο $\vec{r}$ ορίζεται

$$\rho(\vec{r}) = \rho(x,y,z) = \frac{dm}{dV} \tag{7.3}$$

Έτσι,

$$dm = \rho(\vec{r})\, dV$$

και η σχέση (7.2) για την ολική μάζα γράφεται

$$M = \int \rho(\vec{r})\, dV \tag{7.4}$$

όπου η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα σε όλο τον όγκο του σώματος. (Το ολοκλήρωμα είναι στην πραγματικότητα *τριπλό* ολοκλήρωμα, αφού, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, $dV=dxdydz$.) Το κέντρο μάζας (ή κέντρο βάρους) C του σώματος βρίσκεται από τη σχέση (6.2):

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_i (dm_i)\vec{r}_i = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \quad \Rightarrow$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\rho(\vec{r})\, dV \tag{7.5}$$

όπου τα $\vec{r}$ και $\vec{r}_C$ μετρούνται από την αρχή O του συστήματος συντεταγμένων (θυμίζουμε, όμως, ότι *η θέση του σημείου C ως προς το σώμα προσδιορίζεται μονοσήμαντα και* ***δεν*** *εξαρτάται από την εκλογή του σημείου O*).

Αν το σώμα είναι *ομογενές*, η πυκνότητά του έχει παντού την ίδια τιμή ρ, ανεξάρτητη από το $\vec{r}$. Τότε,

$$M = \int \rho\, dV = \rho \int dV = \rho V \tag{7.6}$$

όπου V ο ολικός όγκος του σώματος. Επίσης, από την (7.5),

$$\vec{r}_C = \frac{\rho}{M}\int \vec{r}\, dV = \frac{1}{V}\int \vec{r}\, dV \tag{7.7}$$

Φανταστείτε τώρα ότι, αντί για μια κατανομή ύλης στο χώρο, έχουμε μια γραμμική κατανομή (π.χ., μια λεπτή ράβδο) κατά μήκος του άξονα x. Ορίζουμε τη *γραμμική πυκνότητα* της κατανομής,

$$\rho(x) = \frac{dm}{dx} \tag{7.8}$$

έτσι ώστε η ολική μάζα της είναι

$$M = \int dm = \int \rho(x)\, dx \tag{7.9}$$

Η θέση του κέντρου μάζας της κατανομής δίνεται από τη σχέση

$$x_C = \frac{1}{M}\int x\, dm = \frac{1}{M}\int x\,\rho(x)\, dx \tag{7.10}$$

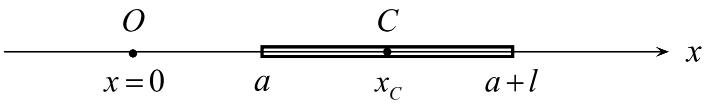
Αν η πυκνότητα ρ είναι σταθερή, ανεξάρτητη του x, τότε

$$M = \int \rho\, dx = \rho \int dx = \rho\, l \tag{7.11}$$

όπου l το ολικό μήκος της κατανομής. Επίσης,

$$x_C = \frac{\rho}{M} \int x\,dx = \frac{1}{l} \int x\,dx \tag{7.12}$$

Για παράδειγμα, θεωρούμε μια λεπτή, ομογενή ράβδο μήκους l, τοποθετημένη κατά μήκος του άξονα x από $x = a$ έως $x = a+l$:



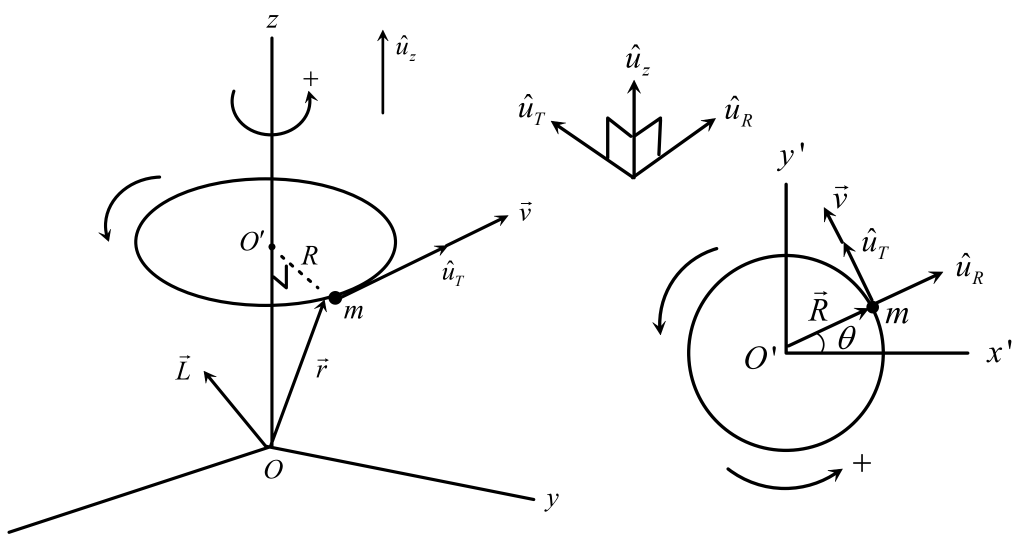
Η (7.12) δίνει

$$x_C = \frac{1}{l} \int_a^{a+l} x\,dx = \frac{1}{2l} \left[(a+l)^2 - a^2 \right] = a + \frac{l}{2}$$

που μας λέει ότι το κέντρο μάζας C της ράβδου βρίσκεται στο μέσο της. Προσέξτε ότι η θέση τού C στη ράβδο προσδιορίζεται μονοσήμαντα και δεν εξαρτάται από την εκλογή του σημείου αναφοράς O στον άξονα x, παρόλο που η τιμή τού x_C εξαρτάται από την εκλογή αυτή.

7.3 Περιστροφή Σωματιδίου ως προς Άξονα

Όπως έχουμε πει, κάθε στερεό σώμα μπορεί να θεωρηθεί σαν σύστημα σωματιδίων m_i (ή dm_i , αν έχουμε συνεχή κατανομή μάζας) των οποίων οι σχετικές θέσεις και αποστάσεις μένουν σταθερές. Πριν λοιπόν μελετήσουμε την περιστροφή ενός στερεού ως προς έναν άξονα, θα ήταν χρήσιμο να εξετάσουμε την περιστροφή ενός μοναδικού σωματιδίου m .



(α) (β)

Διαλέγουμε τον άξονα z των συντεταγμένων μας έτσι ώστε να συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής, και καλούμε R τη (σταθερή) κάθετη απόσταση του m από τον άξονα αυτό. Έτσι, το σωματίδιο διαγράφει κύκλο ακτίνας R με κέντρο κάποιο σημείο O' του άξονα z (όπου O' η κάθετη προβολή τού m πάνω στον άξονα). Σχεδιάζοντας το σχήμα (*β*), φανταζόμαστε ότι κοιτάζουμε το σχήμα (*α*) «από πάνω». Δηλαδή, οι άξονες x' και y', με αρχή το O', είναι παράλληλοι με τους x και y, αντίστοιχα, ενώ ο άξονας z είναι κάθετος στη σελίδα και το $\hat{u}_z$ έχει φορά προς τα *έξω* (προς εμάς). Η φορά τού $\hat{u}_z$ καθορίζει και τη θετική φορά του άξονα z.

Όπως θυμόμαστε (Παρ.2.6, 2.7), η θετική φορά διαγραφής του κύκλου καθορίζεται από τη φορά του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος $\hat{u}_T$ και είναι ανεξάρτητη από τη φορά της κίνησης. (Στο σχήμα, η κίνηση γίνεται στη θετική κατεύθυνση.) Κατά σύμβαση, η θετική φορά περιστροφής προσδιορίζεται από τη φορά τού $\hat{u}_z$ με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού: λυγίζοντας τα δάχτυλα κατά τη θετική φορά περιστροφής (δηλαδή, κατά τη φορά τού $\hat{u}_T$), ο δεξιός αντίχειρας δείχνει στην κατεύθυνση του $\hat{u}_z$. Αν $\vec{R}$ είναι το διάνυσμα θέσης τού m ως προς το O', και αν $\hat{u}_R$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{R}$ (έτσι ώστε $\vec{R} = R\hat{u}_R$), τότε η διατεταγμένη τριάδα $(\hat{u}_R, \hat{u}_T, \hat{u}_z)$ αποτελεί δεξιόστροφο τρισορθογώνιο σύστημα μοναδιαίων διανυσμάτων. Τούτο σημαίνει ότι

$$\hat{u}_R \times \hat{u}_T = \hat{u}_z \ , \quad \hat{u}_T \times \hat{u}_z = \hat{u}_R \ , \quad \hat{u}_z \times \hat{u}_R = \hat{u}_T \qquad (7.13)$$

Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι

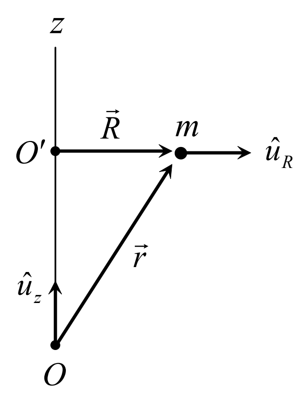
$$\vec{v} = v\,\hat{u}_T \qquad \text{όπου} \qquad v = R\,\omega = \pm|\vec{v}| \qquad (7.14)$$

Η γωνιακή ταχύτητα ω είναι θετική για αριστερόστροφη κίνηση (όπως στο σχήμα) και αρνητική για δεξιόστροφη κίνηση.

Το διάνυσμα θέσης τού m ως προς το O είναι

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{R} = z\,\hat{u}_z + R\,\hat{u}_R \qquad (7.15)$$

όπου η απόσταση $OO' = z$ του O' από το O είναι μία από τις τρεις συντεταγμένες της θέσης τού m:



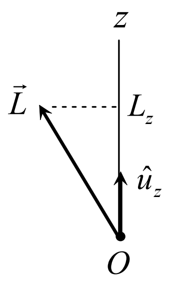
Στο σχήμα, το $\hat{u}_T$ (που προσδιορίζει τη θετική φορά περιστροφής) είναι κάθετο στη σελίδα, με φορά προς τα *μέσα*.

Η στροφορμή τού m ως προς την αρχή O των συντεταγμένων είναι $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$. Αντικαθιστώντας τα $\vec{r}$ και $\vec{v}$ από τις (7.15) και (7.14), και χρησιμοποιώντας τις (7.13), έχουμε:

$$\vec{L} = m(R\hat{u}_R + z\hat{u}_z) \times (R\omega\hat{u}_T) = mR^2\omega(\hat{u}_R \times \hat{u}_T) + mzR\omega(\hat{u}_z \times \hat{u}_T) \Rightarrow$$

$$\vec{L} = mR^2\omega\,\hat{u}_z - mzR\omega\,\hat{u}_R \qquad (7.16)$$

Η z-συνιστώσα της στροφορμής, δηλαδή η προβολή τού $\vec{L}$ πάνω στον άξονα z, είναι ο συντελεστής τού $\hat{u}_z$ στη σχέση (7.16):



$$L_z = mR^2\omega \qquad (7.17)$$

Παρατηρούμε ότι η L_z έχει το πρόσημο του ω. Έτσι, η L_z είναι θετική ή αρνητική, ανάλογα με το αν η περιστροφή γίνεται κατά τη θετική ή την αρνητική φορά. (Στο σχήμα, η L_z είναι θετική.)

Θα ήταν ενδιαφέρον να συγκρίνουμε τη στροφορμή $\vec{L}$ ως προς το O με τη στροφορμή $\vec{L}'$ ως προς το κέντρο O' της κυκλικής τροχιάς. Το διάνυσμα θέσης τού m ως προς το O' είναι το $\vec{R}$, έτσι ώστε

$$\vec{L}' = m(\vec{R} \times \vec{v}) = m(R\hat{u}_R) \times (R\omega\,\hat{u}_T) = mR^2\omega\,\hat{u}_z \qquad (7.18)$$

Η z-συνιστώσα τής $\vec{L}'$ είναι

$$L'_z = mR^2\omega = L_z \qquad (7.19)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι *η συνιστώσα L_z της στροφορμής στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής δεν εξαρτάται από το σημείο του άξονα ως προς το οποίο λαμβάνουμε τη στροφορμή*. (Φυσικά, το *διάνυσμα* $\vec{L}$ της στροφορμής *εξαρτάται* από την εκλογή του σημείου αυτού!) Η παρατήρηση αυτή έχει γενικότερη ισχύ:

> *Η συνιστώσα της ολικής στροφορμής ενός συστήματος στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής έχει την ίδια τιμή για κάθε εκλογή σημείου αναφοράς πάνω στον άξονα (δηλαδή, για κάθε σημείο του άξονα ως προς το οποίο λαμβάνεται η στροφορμή).*

Η ποσότητα

$$\boxed{I = mR^2} \qquad (7.20)$$

ονομάζεται *ροπή αδρανείας τού m ως προς τον άξονα περιστροφής*. Έτσι, η (7.17) παίρνει τη μορφή

$$\boxed{L_z = I\omega} \qquad (7.21)$$

Η σχέση (7.21) συνδέει την z-συνιστώσα της στροφορμής με τη γωνιακή ταχύτητα, με τον ίδιο τρόπο που η σχέση $p=mv$ συνδέει τη γραμμική ορμή με τη γραμμική ταχύτητα. Προσέξτε την αντιστοιχία ανάμεσα στα m και I στις δύο σχέσεις: η ροπή αδρανείας I στην περιστροφική κίνηση είναι το ανάλογο της μάζας m στη γραμμική κίνηση.

Έστω $\vec{F}$ η *συνισταμένη* δύναμη στο m στη θεωρούμενη θέση της τροχιάς του. Η ροπή τής $\vec{F}$ ως προς το O είναι $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$. Αν $\vec{L}$ είναι η στροφορμή τού m ως προς το O, και αν το σύστημα αναφοράς με αρχή το O υποτεθεί αδρανειακό, τότε

$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$T_x\,\hat{u}_x + T_y\,\hat{u}_y + T_z\,\hat{u}_z = \frac{d}{dt}\,(L_x\,\hat{u}_x + L_y\,\hat{u}_y + L_z\,\hat{u}_z) = \frac{dL_x}{dt}\,\hat{u}_x + \frac{dL_y}{dt}\,\hat{u}_y + \frac{dL_z}{dt}\,\hat{u}_z \ .$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές τού $\hat{u}_z$, έχουμε

$$T_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}\,(I\omega) = I\,\frac{d\omega}{dt}$$

διότι το I είναι σταθερό, ανεξάρτητο του χρόνου. Καλώντας

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

τη γωνιακή επιτάχυνση του σωματιδίου, έχουμε

$$\boxed{T_z = I\alpha} \qquad (7.22)$$

Αν $\vec{T}' = \vec{R} \times \vec{F}$ είναι η ροπή τής $\vec{F}$ ως προς το O', τότε

$$\vec{T}' = \frac{d\vec{L}'}{dt} \;\Rightarrow\; T_z' = \frac{dL_z'}{dt} \ .$$

Όμως, από τις (7.19) και (7.21),

$$L_z' = L_z = I\omega \ .$$

Έτσι, και πάλι,

$$T_z' = I\alpha = T_z \qquad (7.23)$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

> *η συνιστώσα της ολικής ροπής στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής έχει την ίδια τιμή για κάθε εκλογή σημείου αναφοράς πάνω στον άξονα (δηλαδή, για κάθε σημείο του άξονα ως προς το οποίο λαμβάνεται η ροπή).*

Προσέξτε ότι η σχέση (7.22) είναι το ανάλογο του νόμου του Νεύτωνα, $F=ma$, για τα αντίστοιχα γραμμικά μεγέθη.

Η σχέση (7.22) μας επιτρέπει να βρούμε τη γωνιακή επιτάχυνση του περιστρεφόμενου σωματιδίου *m* αν γνωρίζουμε την *z*-συνιστώσα της ολικής ροπής που ασκείται πάνω του. Το μόνο που χρειαζόμαστε τώρα είναι ένας πρακτικός τρόπος για να υπολογίζουμε την T_z . Καταρχήν, το σωματίδιο κινείται συνεχώς στο επίπεδο $x'y'$, που είναι παράλληλο στο επίπεδο *xy*. Τούτο σημαίνει ότι και η ολική δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο *m* είναι διάνυσμα του επιπέδου $x'y'$. Κάθε τέτοιο διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες στις κατευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{u}_R$ και $\hat{u}_T$:

$$\vec{F} = F_R\,\hat{u}_R + F_T\,\hat{u}_T \qquad (7.24)$$

Η F_T είναι η συνιστώσα τής $\vec{F}$ στη διεύθυνση της εφαπτομένης στην κυκλική τροχιά τού *m*, ενώ η F_R είναι η συνιστώσα τής $\vec{F}$ στην ακτινική διεύθυνση. Με χρήση των (7.15) και (7.24), βρίσκουμε τη ροπή τής $\vec{F}$ ως προς το *O* :

$$\begin{aligned}\vec{T} = \vec{r}\times\vec{F} &= (R\hat{u}_R + z\hat{u}_z)\times(F_R\hat{u}_R + F_T\hat{u}_T) \\ &= RF_T(\hat{u}_R\times\hat{u}_T) + zF_R(\hat{u}_z\times\hat{u}_R) + zF_T(\hat{u}_z\times\hat{u}_T) \;\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\vec{T} = RF_T\,\hat{u}_z + zF_R\,\hat{u}_T - zF_T\,\hat{u}_R \qquad (7.25)$$

Η *z*-συνιστώσα της ροπής είναι ο συντελεστής τού $\hat{u}_z$ στην (7.25):

$$\boxed{T_z = RF_T} \qquad (7.26)$$

Προσέξτε ότι η T_z δεν εξαρτάται από τη θέση του σημείου αναφοράς *O* πάνω στον άξονα περιστροφής (αφού δεν εξαρτάται από το *z*), σε συμφωνία με την παρατήρηση που κάναμε νωρίτερα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $\vec{F}$ είναι συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, που δρουν στο *m* :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots = \sum_i \vec{F}_i \ .$$

Αν F_{iR} και F_{iT} είναι οι συνιστώσες τής $\vec{F}_i$ (ακτινική και εφαπτομένη, αντίστοιχα), οι συνιστώσες F_R και F_T της $\vec{F}$ είναι

$$F_R = \sum_i F_{iR} \ , \qquad F_T = \sum_i F_{iT} \ .$$

Από την (7.26), η *z*-συνιστώσα της ολικής ροπής στο *m* είναι

$$T_z = R\sum_i F_{iT} = R(F_{1T} + F_{2T} + \cdots) = RF_{1T} + RF_{2T} + \cdots$$

ή

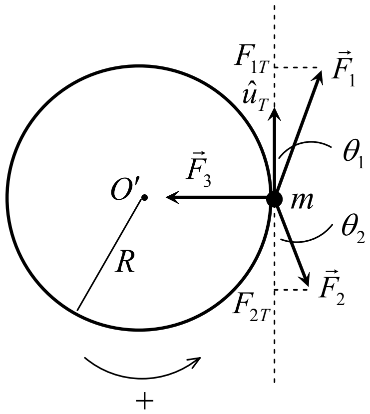
$$\boxed{T_z = T_{1z} + T_{2z} + \cdots = \sum_i T_{iz}} \qquad (7.27)$$

όπου

$$\boxed{T_{iz} = RF_{iT}} \qquad (7.28)$$

η *z*-συνιστώσα της ροπής τής $\vec{F}_i$. Προσέξτε ότι η (7.27) παριστά ένα *αλγεβρικό* άθροισμα όπου οι όροι μπορεί να είναι θετικοί ή αρνητικοί. Συγκεκριμένα, η T_{iz} είναι θετική (αρνητική) όταν η συνιστώσα F_{iT} της $\vec{F}_i$ στην κατεύθυνση του $\hat{u}_T$ είναι θετική (αρνητική). Αυτό, με τη σειρά του, σημαίνει ότι η $\vec{F}_i$ *τείνει* να προκαλέσει περιστροφή του m κατά τη θετική (αρνητική) φορά γύρω από τον άξονα z όταν το m είναι αρχικά ακίνητο. (Όπως έχουμε αναφέρει, η θετική φορά περιστροφής προσδιορίζεται σε συνάρτηση με τη θετική φορά του άξονα z, με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού.)

Σαν παράδειγμα, θεωρούμε την περίπτωση όπου στο σωματίδιο m δρουν τρεις δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Στο σχήμα, ο άξονας z είναι κάθετος στη σελίδα και το $\hat{u}_z$ έχει φορά προς τα *έξω* (προς εμάς). Το $\hat{u}_T$ δείχνει πάντα προς τη θετική φορά περιστροφής, η οποία, με τη σειρά της, προσδιορίζεται από τη φορά τού $\hat{u}_z$ με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού (στο σχήμα, θετική φορά είναι η αριστερόστροφη). Καλούμε F_1, F_2, F_3 τα μέτρα των τριών δυνάμεων. Οι συνιστώσες των δυνάμεων στη διεύθυνση του $\hat{u}_T$ (εφαπτομενικές συνιστώσες) είναι

$$F_{1T} = F_1 \cos\theta_1 \ , \quad F_{2T} = -F_2 \cos\theta_2 \ , \quad F_{3T} = 0 \ .$$

Τα πρόσημα των F_{1T} και F_{2T} συμφωνούν με την παρατήρηση ότι η $\vec{F}_1$ τείνει να προκαλέσει περιστροφή κατά τη θετική φορά, ενώ η $\vec{F}_2$ κατά την αρνητική. Ο μηδενισμός τής F_{3T} σημαίνει ότι η $\vec{F}_3$ (η οποία διέρχεται από το κέντρο O') δεν έχει από μόνη της την τάση να προκαλέσει περιστροφή του σωματιδίου m γύρω από τον άξονα z όταν το m είναι αρχικά ακίνητο. Οι z-συνιστώσες των ροπών είναι, σύμφωνα με την (7.28),

$$T_{1z} = RF_{1T} = RF_1 \cos\theta_1 \ , \quad T_{2z} = RF_{2T} = -RF_2 \cos\theta_2 \ , \quad T_{3z} = RF_{3T} = 0 \ .$$

Η z-συνιστώσα της ολικής ροπής δίνεται από την (7.27):

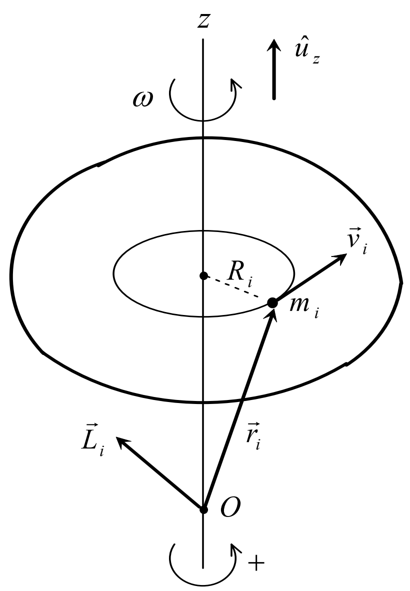
$$T_z = T_{1z} + T_{2z} + T_{3z} = R(F_1 \cos\theta_1 - F_2 \cos\theta_2) \ .$$

Η γωνιακή επιτάχυνση του m βρίσκεται από τις (7.22) και (7.20):

$$\alpha = \frac{T_z}{I} = \frac{T_z}{mR^2} = \frac{1}{mR} (F_1 \cos\theta_1 - F_2 \cos\theta_2) \ .$$

7.4 Στροφορμή Στερεού Σώματος ως προς Άξονα

Θεωρούμε τώρα ένα στερεό σώμα που εκτελεί περιστροφή ως προς έναν άξονα, τον οποίο αυθαίρετα επιλέγουμε να είναι ο άξονας z. Όπως πάντα, η φορά τού $\hat{u}_z$ καθορίζει και τη θετική φορά περιστροφής, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Υποθέτουμε ότι το σώμα αποτελείται από ένα πλήθος σωματιδίων m_i που βρίσκονται σε αντίστοιχες κάθετες αποστάσεις R_i από τον άξονα περιστροφής. Κατά την περιστροφή του σώματος, κάθε m_i εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R_i με κέντρο την κάθετη προβολή τού m_i στον άξονα z. *Όλα τα m_i έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, ίση με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος.* (Μπορείτε να το εξηγήσετε αυτό;)



Στο σχήμα, το σώμα περιστρέφεται κατά τη θετική φορά με γωνιακή ταχύτητα ω. Η στροφορμή ενός σωματιδίου m_i ως προς το σημείο O του άξονα περιστροφής είναι

$$\vec{L}_i = m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \ .$$

Η ολική στροφορμή του σώματος ως προς το O είναι

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \qquad (7.29)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (1.10), η z-συνιστώσα τής $\vec{L}$ ισούται με το άθροισμα των z-συνιστωσών των $\vec{L}_i$:

$$L_z = \sum_i L_{iz} \ .$$

Όμως, από τις (7.21) και (7.20),

$$L_{iz} = I_i\omega = m_i R_i^2 \omega \ .$$

Έτσι,

$$L_z = \sum_i (I_i\omega) = \omega \sum_i I_i$$

όπου βγάλαμε κοινό παράγοντα το ω γιατί είναι ίδιο για όλα τα m_i .

Ορίζουμε τώρα τη *ροπή αδρανείας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής*:

$$\boxed{I = \sum_i I_i = \sum_i m_i R_i^2} \tag{7.30}$$

όπου το άθροισμα περιλαμβάνει τις ροπές αδρανείας όλων των σωματιδίων που αποτελούν το στερεό σώμα. Έτσι, τελικά,

$$\boxed{L_z = I\omega} \tag{7.31}$$

Η (7.31) δίνει την z-συνιστώσα της ολικής στροφορμής του σώματος ως προς το O. Από τις (7.30) και (7.31) βλέπουμε ότι

> *η συνιστώσα της ολικής στροφορμής ενός στερεού στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής είναι ανεξάρτητη της εκλογής του σημείου O του άξονα ως προς το οποίο λαμβάνεται η στροφορμή.*

Πράγματι, το I στην (7.31) εξαρτάται μόνο από τις *κάθετες* αποστάσεις R_i των m_i από τον άξονα περιστροφής, και όχι από τις αποστάσεις r_i των σωματιδίων από το σημείο αναφοράς O. Για το λόγο αυτό, καλούμε (καταχρηστικά) την L_z «*στροφορμή του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής*». Το *διάνυσμα* $\vec{L}$ της στροφορμής, βέβαια, ορίζεται μόνο ως προς σημείο O και εξαρτάται, γενικά, από τη θέση τού O πάνω στον άξονα περιστροφής.

7.5 Εξισώσεις Κίνησης Στερεού

Στο βαθμό που ένα στερεό σώμα θεωρείται σαν σύστημα σωματιδίων, η κίνησή του διέπεται από τους νόμους των συστημάτων που εκτέθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η ιδιαιτερότητα ενός τέτοιου συστήματος είναι ότι μπορεί να εκτελεί δύο ειδών κινήσεις: μεταφορά και περιστροφή. Η πρώτη κίνηση καθορίζεται από την ολική εξωτερική δύναμη που δρα στο σώμα, ενώ η δεύτερη κίνηση από την ολική εξωτερική ροπή.

Η ορμή του σώματος αντιπροσωπεύει την ολική ορμή του αντίστοιχου συστήματος, και δίνεται από τη σχέση (6.9):

$$\vec{P} = M\,\vec{v}_C \tag{7.32}$$

όπου M η μάζα του σώματος και $\vec{v}_C$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του, C. Αν $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots,$ είναι οι εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο σώμα (μια τέτοια δύναμη είναι το βάρος $\vec{w}$, με σημείο εφαρμογής το C), η ολική εξωτερική δύναμη στο σώμα είναι

$$\vec{F}_{\varepsilon\xi} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots = \sum \vec{F} \tag{7.33}$$

Από τις εξισώσεις (6.7) και (7.32), τότε, έχουμε

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\,\frac{d\vec{v}_C}{dt} = M\,\vec{a}_C} \qquad (7.34)$$

όπου $\vec{a}_C$ η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του σώματος. Η (7.34) αποτελεί την *εξίσωση μεταφορικής κίνησης* του στερεού σώματος. Προσέξτε ότι, για τη μεταφορική κίνηση δεν έχει σημασία πού ακριβώς εφαρμόζονται οι επιμέρους δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, πάνω στο σώμα: αυτό που μας ενδιαφέρει είναι μόνο η συνισταμένη τους.

Αντίθετα, επειδή η περιστροφική κίνηση καθορίζεται από τη ροπή, η κίνηση αυτή επηρεάζεται όχι μόνο από τις εξωτερικές δυνάμεις καθαυτές αλλά και από τις θέσεις των σημείων εφαρμογής τους. Έστω $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \cdots$, οι ροπές των $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, ως προς κάποιο σημείο *O* του χώρου. Η ολική εξωτερική ροπή στο σώμα ως προς το *O* είναι

$$\vec{T}_{\varepsilon\xi} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \cdots = \sum \vec{T} \qquad (7.35)$$

Έστω τώρα $\vec{L}$ η ολική στροφορμή του σώματος ως προς *O*, ίση με το άθροισμα των στροφορμών όλων των σωματιδίων που αποτελούν το στερεό. Σύμφωνα με τη σχέση (6.17),

$$\sum \vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (7.36)$$

Στην Παρ.6.3 σημειώσαμε ότι η σχέση αυτή ισχύει σε δύο περιπτώσεις: (α) όταν το *O* είναι σταθερό σημείο σε κάποιο *αδρανειακό* σύστημα αναφοράς, ή (β) όταν το *O* συμπίπτει με το κέντρο μάζας *C*, έστω κι αν αυτό επιταχύνεται (άρα δεν μπορεί να μένει σταθερό σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς).

Στην περίπτωση περιστροφής ως προς άξονα, τον οποίο συμβατικά θα ονομάσουμε και πάλι άξονα *z*, οι ροπές και οι στροφορμές θα λαμβάνονται πάντα *ως προς σημείο O του άξονα αυτού*. Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, η δυνατότητα χρήσης τής (7.36) μάς περιορίζει στη θεώρηση δύο περιπτώσεων: (α) περιστροφή ως προς άξονα που διέρχεται από σημείο *O* το οποίο είναι ακίνητο ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ή (β) περιστροφή ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας *C* του σώματος, όπου το *C* μπορεί να κινείται με σταθερή ταχύτητα ή να επιταχύνεται ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή, ανάλογα με το αν η ολική εξωτερική δύναμη στο σώμα είναι μηδέν ή διάφορη του μηδενός, αντίστοιχα [βλ. σχέση (7.34)].

Η διανυσματική εξίσωση (7.36) μπορεί να αναλυθεί σε τρεις αλγεβρικές εξισώσεις αν πάρουμε τις συνιστώσες των διανυσμάτων ως προς *x,y,z*. Έχουμε:

$$\sum \vec{T} = \hat{u}_x \sum T_x + \hat{u}_y \sum T_y + \hat{u}_z \sum T_z \qquad [\beta\lambda.\ (1.10)]$$

όπου, π.χ., ΣT_z είναι το αλγεβρικό άθροισμα των *z*-συνιστωσών των ροπών ως προς *O*, που ασκούνται στο σώμα. Επίσης,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(L_x\hat{u}_x + L_y\hat{u}_y + L_z\hat{u}_z) = \frac{dL_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dL_y}{dt}\hat{u}_y + \frac{dL_z}{dt}\hat{u}_z \quad .$$

Εξισώνοντας συντελεστές τού $\hat{u}_z$, παίρνουμε

$$\sum T_z = \frac{dL_z}{dt} \tag{7.37}$$

Όμως, από την (7.31), $L_z = I\omega$, όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και I η ροπή αδρανείας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής z [βλ. εξίσ.(7.30)]. Υποθέτοντας ότι το I είναι σταθερό, έχουμε

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\,\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

όπου $\alpha = d\omega / dt$ η γωνιακή επιτάχυνση του περιστρεφόμενου σώματος. Έτσι, τελικά,

$$\boxed{\sum T_z = I\alpha} \tag{7.38}$$

Η (7.38) εκφράζει την *εξίσωση περιστροφικής κίνησης* του σώματος. Οι σχέσεις (7.34) και (7.38) αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης του στερεού.

Από την (7.38) βλέπουμε ότι

> *η συνιστώσα της ολικής ροπής στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής είναι ανεξάρτητη της θέσης του σημείου αναφοράς O (ως προς το οποίο λαμβάνονται οι ροπές) πάνω στον άξονα.*

Πράγματι, το I στην (7.38) εξαρτάται μόνο από τις κάθετες αποστάσεις R_i των στοιχειωδών μαζών m_i από τον άξονα. Για το λόγο αυτό, η ΣT_z συχνά (αν και καταχρηστικά) καλείται «*ολική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής*». (Να μην ξεχνάμε, όμως, ότι το *διάνυσμα* της ροπής ορίζεται πάντα *ως προς σημείο O*.)

Θα ήταν χρήσιμο, τώρα, να βρούμε έναν πρακτικό τρόπο υπολογισμού του ΣT_z . Αυτό μπορεί να γίνει με γενίκευση της σχέσης (7.26), ως εξής: Φανταστείτε ότι οι εξωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots,$ δρουν στα σημεία $P_1, P_2, \cdots,$ του σώματος, τα οποία απέχουν κάθετες αποστάσεις $R_1, R_2, \cdots,$ από τον άξονα περιστροφής z. Όπως στην Παρ.7.3, καλούμε $F_{1T}, F_{2T}, \cdots,$ τις συνιστώσες των $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots,$ σε διευθύνσεις κάθετες τόσο προς τις αντίστοιχες ακτίνες $R_1, R_2, \cdots,$ όσο και προς τον άξονα περιστροφής z. Σύμφωνα με την (7.26), οι z-συνιστώσες των ροπών των δυνάμεων ως προς O είναι

$$T_{1z} = R_1 F_{1T} \ , \quad T_{2z} = R_2 F_{2T} \ , \ \cdots \ .$$

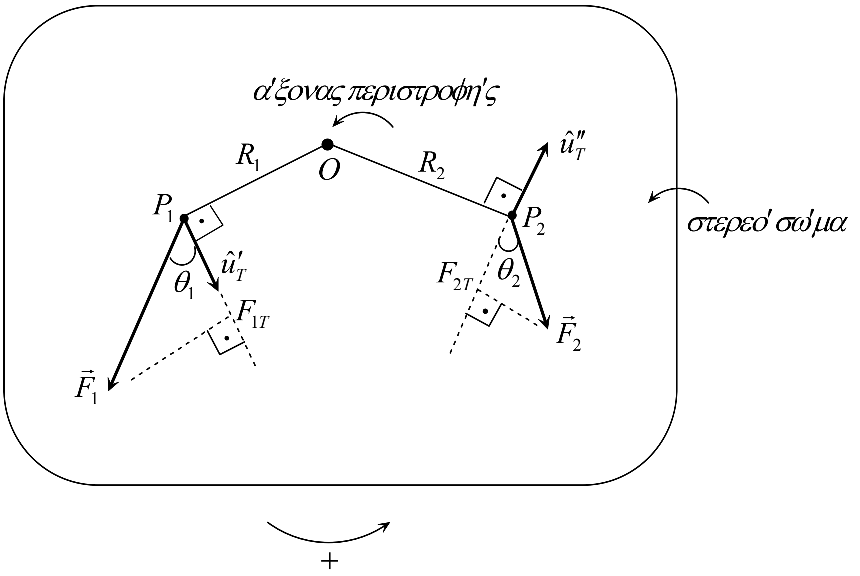
Έτσι, η z-συνιστώσα της ολικής ροπής στο σώμα, ίση με το άθροισμα των z-συνιστωσών των επιμέρους ροπών, είναι

$$\sum T_z = T_{1z} + T_{2z} + \cdots = R_1 F_{1T} + R_2 F_{2T} + \cdots$$

ή σύντομα,

$$\boxed{\sum T_z = \sum (R F_T)} \tag{7.39}$$

Προσέξτε ότι η (7.39) παριστά ένα *αλγεβρικό* άθροισμα, αφού μια συνιστώσα F_{iT} μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, ανάλογα με το αν η αντίστοιχη δύναμη $\vec{F}_i$ τείνει να προκαλέσει περιστροφή κατά τη θετική ή την αρνητική φορά. Ας δούμε ένα παράδειγμα:



Στο σχήμα, ο άξονας περιστροφής z είναι κάθετος στη σελίδα. Το $\hat{u}_z$ έχει φορά προς τα *έξω* (προς εμάς), άρα θετική φορά περιστροφής είναι η αριστερόστροφη. Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ δρουν στα σημεία P_1 και P_2 του σώματος, είναι κάθετες στον άξονα z (του οποίου μόνο η προβολή O φαίνεται στο σχήμα) και μπορεί να ανήκουν σε διαφορετικά, παράλληλα μεταξύ τους επίπεδα που τέμνουν κάθετα τον άξονα. Τα σημεία P_1 και P_2 διαγράφουν κυκλικές τροχιές με ακτίνες R_1 και R_2 , αντίστοιχα, όπου R_1 και R_2 οι κάθετες αποστάσεις των δύο σημείων από τον άξονα. (Η φορά περιστροφής του σώματος δεν προσδιορίζεται στο σχήμα, και δεν μας ενδιαφέρει.) Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{u}_T{}'$ και $\hat{u}_T{}''$, εφαπτόμενα στις κυκλικές τροχιές των P_1 και P_2 , αντίστοιχα, δείχνουν πάντα προς τη θετική κατεύθυνση περιστροφής, ανεξάρτητα από τη φορά περιστροφής του σώματος. Οι εφαπτομενικές συνιστώσες των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι

$$F_{1T} = F_1 \cos\theta_1 \;, \quad F_{2T} = -F_2 \cos\theta_2$$

όπου F_1 και F_2 τα μέτρα των δύο δυνάμεων. Τα πρόσημα των συνιστωσών έχουν τη φυσική ερμηνεία ότι η $\vec{F}_1$ τείνει να προκαλέσει περιστροφή κατά τη θετική φορά, ενώ η $\vec{F}_2$ κατά την αρνητική. Οι ροπές των δυνάμεων ως προς τον άξονα z είναι

$$T_{1z} = R_1 F_{1T} = R_1 F_1 \cos\theta_1 \;, \quad T_{2z} = R_2 F_{2T} = -R_2 F_2 \cos\theta_2 \;.$$

Η z-συνιστώσα της ολικής ροπής είναι

$$\sum T_z = T_{1z} + T_{2z} = R_1 F_1 \cos\theta_1 - R_2 F_2 \cos\theta_2 \;.$$

Τέλος, η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος δίνεται από τη σχέση (7.38):

$$\alpha = \frac{1}{I} \sum T_z = \frac{1}{I}\,(R_1 F_1 \cos\theta_1 - R_2 F_2 \cos\theta_2)$$

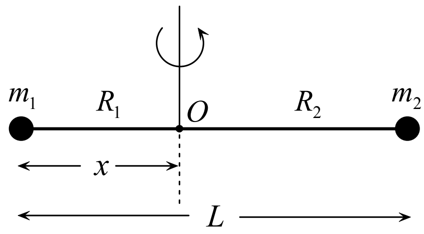
όπου I η ροπή αδρανείας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής.

7.6 Ροπές Αδρανείας

Όταν ένα στερεό σώμα αποτελείται από διακριτό πλήθος σωματιδίων m_1, m_2,..., η ροπή αδρανείας του ως προς έναν άξονα είναι

$$I = \sum_i m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \cdots \tag{7.40}$$

όπου R_i η κάθετη απόσταση του m_i από τον άξονα. Σαν παράδειγμα, θεωρούμε δύο σφαιρίδια με μάζες m_1 και m_2 που συνδέονται μεταξύ τους με λεπτή, αβαρή ράβδο μήκους L (η ράβδος έχει σαν ρόλο απλά να συγκρατεί τα σφαιρίδια σε σταθερή απόσταση L μεταξύ τους, και δεν λογίζεται σαν μέρος του στερεού σώματος):



Η ροπή αδρανείας του συστήματος ως προς άξονα διερχόμενο από το O, είναι

$$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 = m_1 x^2 + m_2 (L - x)^2$$

όπου θέσαμε $x=R_1$. Ειδικά, στην περίπτωση που ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το m_1, $x=0$ και $I=m_2L^2$. Όπως μπορεί να αποδειχθεί, η ροπή αδρανείας γίνεται ελάχιστη όταν ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο μάζας C του συστήματος. Για το λόγο αυτό, είναι ευκολότερο να περιστρέψουμε το σύστημα γύρω από έναν τέτοιο άξονα, αφού μια δοσμένη εξωτερική ροπή θα παράγει τη μέγιστη δυνατή γωνιακή επιτάχυνση, σύμφωνα με τη σχέση (7.38).

Για στερεά που δομούνται με συνεχή κατανομή ύλης, πρέπει να αντικαταστήσουμε το άθροισμα στην (7.40) με ολοκλήρωμα:

$$I = \int R^2 dm \tag{7.41}$$

όπου R η κάθετη απόσταση της στοιχειώδους μάζας dm από τον άξονα περιστροφής. Η μάζα αυτή γράφεται $dm=\rho dV$, όπου ρ η πυκνότητα του σώματος στο σημείο που βρίσκεται το dm, και dV ο όγκος που καταλαμβάνει το dm. Αν το σώμα είναι *ομογενές*, η πυκνότητα ρ είναι σταθερή και ίση με $\rho=M/V$, όπου M η μάζα και V ο ολικός όγκος του σώματος. Η (7.41), τότε, γράφεται

$$I = \int R^2 \rho dV = \rho \int R^2 dV = \frac{M}{V} \int R^2 dV \tag{7.42}$$

Η διαδικασία και το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης εξαρτώνται, βέβαια, από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του στερεού. Για τις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις, παραθέτουμε πίνακα ροπών αδρανείας στο Παράρτημα Β.

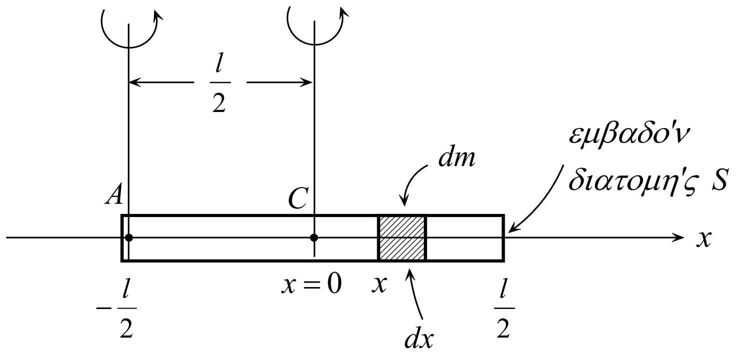
Μια χρήσιμη πρόταση, το *θεώρημα του Steiner* ή *θεώρημα των παράλληλων αξόνων*, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε εύκολα τη ροπή αδρανείας ενός στερεού ως προς έναν άξονα, αρκεί να γνωρίζουμε τη ροπή αδρανείας του στερεού ως προς έναν παράλληλο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος:

Θεωρούμε στερεό σώμα μάζας M. Έστω I η ροπή αδρανείας του ως προς έναν άξονα, και έστω I_C η ροπή αδρανείας ως προς παράλληλο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας C του σώματος. Αν a είναι η απόσταση μεταξύ των δύο αξόνων, ισχύει ότι

$$\boxed{I = I_C + M a^2} \qquad (7.43)$$

Η (7.43) μας λέει ότι, από ένα άπειρο σύνολο παράλληλων αξόνων, η ροπή αδρανείας γίνεται *ελάχιστη* για εκείνο τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος. Για το λόγο αυτό, όπως εξηγήσαμε νωρίτερα, ένα σώμα περιστρέφεται με τη μέγιστη δυνατή ευκολία γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. (Φυσικά, υπάρχουν άπειροι άξονες δια μέσου του C, και καθένας από αυτούς ορίζει μια ξεχωριστή απειρία παράλληλων αξόνων.)

Σαν εφαρμογή της σχέσης (7.42), θα υπολογίσουμε τη ροπή αδρανείας μιας λεπτής ράβδου μήκους l και μάζας M, ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο και διερχόμενο από το κέντρο της, C (που είναι και το κέντρο μάζας της, όπως δείξαμε στο παράδειγμα στο τέλος της Παρ.7.2). Καλούμε S το εμβαδόν διατομής της ράβδου, και υποθέτουμε ότι η ράβδος είναι τοποθετημένη κατά μήκος του άξονα x:



Τοποθετούμε, για ευκολία, το κέντρο μάζας C της ράβδου στο σημείο x=0, πράγμα που σημαίνει ότι η ράβδος εκτείνεται από $x=-l/2$ έως $x=l/2$ (μια τέτοια επιλογή δεν επηρεάζει την τιμή της ροπής αδρανείας, η οποία εξαρτάται μόνο από τη θέση του άξονα περιστροφής *ως προς το σώμα*). Θεωρούμε το στοιχειώδες τμήμα της ράβδου από x μέχρι $x+dx$. Ο όγκος του τμήματος είναι $dV=Sdx$, ενώ ο συνολικός όγκος της ράβδου είναι $V=S\,l$. Η απόσταση R του σημείου x της ράβδου από το κέντρο μάζας C (άρα και από τον άξονα που διέρχεται από το C) είναι $R=|x|$.

Η (7.42) γράφεται (με $I=I_C$, για άξονα που διέρχεται από το C):

$$I_C = \frac{M}{V} S \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2} \quad \Rightarrow$$

$$I_C = \frac{1}{12} M l^2 \tag{7.44}$$

Αν τώρα θέλουμε τη ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς παράλληλο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της, έστω το A, χρησιμοποιούμε την (7.43) με $a=l/2$:

$$I_A = I_C + M a^2 = \frac{1}{12} M l^2 + \frac{1}{4} M l^2 \quad \Rightarrow$$

$$I_A = \frac{1}{3} M l^2 \tag{7.45}$$

7.7 Διατήρηση της Στροφορμής

Μέχρι τώρα αντιμετωπίσαμε τη ροπή αδρανείας I σαν μέγεθος σταθερό, αμετάβλητο με το χρόνο. Τούτο συνδέεται με την αντίληψή μας ότι το σχήμα ενός στερεού δεν αλλάζει κατά την κίνησή του. Θα διευρύνουμε τώρα την έννοια του στερεού σώματος ώστε να περιλάβουμε και στερεά των οποίων το σχήμα μπορεί να μεταβάλλεται κατά την κίνηση. Τούτο συμβαίνει, π.χ., με το ανθρώπινο σώμα αν αυτό θεωρηθεί κατά προσέγγιση στερεό, και γενικότερα, με στερεά σώματα που αποτελούνται από κινητά μέρη. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η ροπή αδρανείας ως προς έναν άξονα είναι κι αυτή μεταβλητό μέγεθος, και η μεταβολή της μπορεί να επηρεάσει την κίνηση το ίδιο σημαντικά όπως και η παρουσία εξωτερικών ροπών.

Η μελέτη τέτοιων πολύπλοκων προβλημάτων, όπως και πολλών άλλων διαφορετικής μορφής (π.χ., συνδυασμός κρούσης και περιστροφικής κίνησης), απλουστεύεται σημαντικά με τη χρήση της αρχής διατήρησης της στροφορμής, εφόσον βέβαια πληρούνται οι προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες αυτή ισχύει.

Θυμίζουμε ότι η ολική στροφορμή ενός στερεού και η ολική εξωτερική ροπή σε αυτό συνδέονται με τη σχέση

$$\sum \vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{7.46}$$

Όπως τονίσαμε στην Παρ.7.5, η σχέση αυτή ισχύει για περιστροφή ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο αναφοράς O των $\vec{L}$ και $\vec{T}$, όπου το O μπορεί να είναι σταθερό σημείο σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς ή να συμπίπτει με το κέντρο μάζας C του σώματος (έστω και αν αυτό επιταχύνεται ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή). Παρατηρούμε ότι, αν $\Sigma \vec{T} = 0$, τότε $d\vec{L}/dt = 0 \Rightarrow \vec{L} = σταθ.$:

> *Όταν η ολική ροπή στο σώμα ως προς ένα σημείο O είναι μηδέν, η στροφορμή του σώματος ως προς το O μένει σταθερή.*

Η πρόταση αυτή αποτελεί την *αρχή διατήρησης της στροφορμής* ως προς σημείο O.

Προσέξτε ότι η διανυσματική σχέση (7.46) ισχύει πάντα *ως προς ένα σημείο O*. Παίρνοντας όμως την z-συνιστώσα της, βρίσκουμε μια αλγεβρική εξίσωση που ισχύει *ως προς τον άξονα περιστροφής z*, ανεξάρτητα από τη θέση του σημείου αναφοράς O πάνω σε αυτόν :

$$\sum T_z = \frac{dL_z}{dt} \tag{7.47}$$

Παρατηρούμε ότι, όταν $\Sigma T_z=0$, η συνιστώσα L_z μένει σταθερή :

> *Όταν η ολική ροπή στο σώμα ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν, η στροφορμή του σώματος ως προς τον άξονα αυτό μένει σταθερή.*

Η πρόταση αυτή αποτελεί την *αρχή διατήρησης της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής*. (Σημειώνουμε ότι η εκλογή του άξονα z του συστήματος συντεταγμένων μας έτσι ώστε να συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής, είναι εντελώς αυθαίρετη. Θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει διαφορετικά τους άξονες του χώρου μας, έτσι ώστε ο άξονας περιστροφής να ονομαζόταν, π.χ., άξονας x ή άξονας y. Η σχέση (7.47), τότε, θα έπρεπε να γραφεί με x ή y στη θέση του z.)

Τώρα, σύμφωνα με τη σχέση (7.31), έχουμε ότι $L_z=I\omega$, όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και I η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα περιστροφής z. Έτσι, η σταθερότητα της στροφορμής ως προς τον άξονα αυτό γράφεται

$$I\omega = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \quad \Leftrightarrow \quad I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \tag{7.48}$$

όπου οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται σε δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 . Στην περίπτωση που το I είναι σταθερό ($I_1=I_2$), πράγμα που συμβαίνει όταν η γεωμετρία του σώματος δεν μεταβάλλεται κατά την κίνησή του, η γωνιακή ταχύτητα ω μένει σταθερή ($\omega_1=\omega_2$). Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει και από την (7.38), σύμφωνα με την οποία η γωνιακή επιτάχυνση α είναι μηδέν (άρα η γωνιακή ταχύτητα ω είναι σταθερή) όταν η ολική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής μηδενίζεται.

Αναφερθήκαμε νωρίτερα σε μια βασική διαφορά ανάμεσα στη διανυσματική σχέση (7.46) και την αλγεβρική σχέση (7.47): Στην (7.46) τα $\vec{L}$ και $\vec{T}$ υπολογίζονται ως προς συγκεκριμένο *σημείο* O και, γενικά, εξαρτώνται από αυτό, ενώ στην (7.47) τα L_z και T_z αναφέρονται στον *άξονα* περιστροφής και δεν εξαρτώνται από τη θέση του σημείου αναφοράς O πάνω σε αυτόν. Για κάθε στερεό, όμως, υπάρχει πάντα ένα ειδικό σύνολο αξόνων περιστροφής, καθένας εκ των οποίων διέρχεται από το κέντρο μάζας C του σώματος και έχει την εξής ιδιότητα: το διάνυσμα της στροφορμής $\vec{L}$ του στερεού [άρα και η ολική ροπή $\Sigma\vec{T}$, λόγω της (7.46)] δεν εξαρτάται από την εκλογή του σημείου αναφοράς O πάνω στον άξονα αυτό, αλλά παίρνει την ίδια τιμή για όλα τα σημεία του άξονα. Επιπλέον, η $\vec{L}$ έχει διεύθυνση *παράλληλη* στον άξονα. Ένας τέτοιος άξονας περιστροφής ονομάζεται *κύριος άξονας*. Ειδικά, κάθε άξονας που διέρχεται από το κέντρο μάζας C του στερεού και είναι άξονας συμμετρίας, είναι κύριος άξονας για το σώμα. Έτσι, για μια σφαίρα, κάθε άξονας που περνάει από το κέντρο της είναι κύριος άξονας. Για έναν κύλινδρο, ο κεντρικός του άξονας, καθώς και κάθε άξονας κάθετος σε αυτόν και διερχόμενος από το κέντρο μάζας, είναι κύριοι άξονες. Για έναν κύβο, οι τρεις άξονες που είναι κάθετοι στις πλευρές και διέρχονται από το κέντρο του κύβου είναι κύριοι άξονες. (Μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις για τους κύριους άξονες θα βρείτε στο Παράρτημα Γ.)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο άξονας περιστροφής z είναι κύριος άξονας για το στερεό (ένας τέτοιος άξονας διέρχεται πάντα από το κέντρο μάζας C του σώματος). Η στροφορμή $\vec{L}$ του σώματος, τότε, ως προς οποιοδήποτε σημείο του άξονα έχει τιμή ανεξάρτητη από τη θέση του σημείου αυτού στον άξονα και ίση με

$$\vec{L} = I\omega\,\hat{u}_z \tag{7.49}$$

όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και I η ροπή αδρανείας ως προς τον κύριο άξονα (θυμίζουμε ότι το ω είναι *αλγεβρικό* μέγεθος, θετικό ή αρνητικό, ανάλογα με τη φορά περιστροφής).

Ορίζουμε το *διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας*

$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{u}_z \tag{7.50}$$

Η (7.49), τότε, γράφεται

$$\boxed{\vec{L} = I\,\vec{\omega}} \tag{7.51}$$

Η (7.51) δίνει τη στροφορμή ενός στερεού ως προς *οποιοδήποτε* σημείο ενός *κύριου* άξονα. Προσέξτε ότι *η στροφορμή του στερεού ως προς σημείο ενός κύριου άξονα είναι στη διεύθυνση του άξονα αυτού*.

Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι μια σχέση της μορφής (7.51) είναι δυνατό κάποιες φορές να ισχύει και για άξονες που *δεν* είναι κύριοι! Για παράδειγμα, η (7.51) δίνει τη στροφορμή $\vec{L}$ μιας λεπτής επίπεδης πλάκας που περιστρέφεται γύρω από άξονα κάθετο σε αυτήν, ή τη στροφορμή μιας ράβδου που περιστρέφεται γύρω από άξονα κάθετο στη ράβδο. Προσέξτε όμως: Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις, η στροφορμή $\vec{L}$ λαμβάνεται *ως προς το σημείο O του σώματος από το οποίο διέρχεται ο άξονας*! Για κάθε άλλο σημείο, η (7.51) *δεν* ισχύει, εκτός αν ο άξονας περιστροφής είναι *κύριος* άξονας (όπως, π.χ., ο άξονας που είναι κάθετος σε κυκλικό δίσκο και διέρχεται από το κέντρο του δίσκου, ή ο άξονας που τέμνει κάθετα μια ράβδο στο κέντρο της).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, για κάποιον από τους παραπάνω λόγους, ισχύει η σχέση (7.51) (ως προς κύριο άξονα ή ως προς μεμονωμένο σημείο O του σώματος). Η βασική σχέση (7.46), τότε, γράφεται

$$\sum \vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(I\vec{\omega}) \tag{7.52}$$

Αν η ροπή αδρανείας I είναι σταθερή,

$$\boxed{\sum \vec{T} = I\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}} \tag{7.53}$$

όπου $\vec{\alpha}$ το *διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης*. Στην περίπτωση που η ολική ροπή στο σώμα είναι μηδέν, $\Sigma\vec{T}=0$, η (7.52) μας λέει ότι η στροφορμή $\vec{L}$ είναι σταθερή:

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o' \quad \Leftrightarrow \quad I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2 \tag{7.54}$$

Επιπλέον, αν το I είναι σταθερό, η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι μηδέν και η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ είναι σταθερή, σύμφωνα με τις (7.53) και (7.54).

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα εφαρμογής της αρχής διατήρησης της στροφορμής:

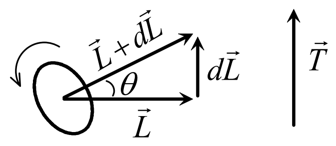
1. Θεωρούμε ένα σώμα μάζας M που κινείται στο χώρο κάτω από την επίδραση της βαρύτητας και μόνο. Δηλαδή, στο σώμα δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις εκτός από το βάρος του, $\vec{w} = M\vec{g}$. Έτσι, όπως εξηγήσαμε στην Παρ.7.2, η ολική εξωτερική δύναμη στο σώμα μπορεί να θεωρηθεί ότι ασκείται στο κέντρο μάζας C (έστω και αν το σημείο C δεν ανήκει στο σώμα, όπως, π.χ., συμβαίνει σε ένα δαχτυλίδι). Η ολική ροπή, τότε, ως προς το C είναι μηδέν και, σύμφωνα με την (7.46), η στροφορμή $\vec{L}$ του σώματος ως προς C είναι σταθερή:

> *Όταν ένα σώμα κινείται κάτω από την επίδραση του βάρους του και μόνο, η στροφορμή του σώματος ως προς το κέντρο μάζας του είναι σταθερή.*

Τι κάνει ένας πρωταθλητής των καταδύσεων για να αυξήσει τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του όταν είναι στον αέρα; Μαζεύει το σώμα του όσο μπορεί, έτσι ώστε η ροπή αδρανείας του ως προς τον άξονα περιστροφής (ο οποίος είναι οριζόντιος και διέρχεται από το κέντρο μάζας C του αθλητή) να γίνει όσο το δυνατόν μικρότερη. Αυτό, σύμφωνα με τις (7.48) και (7.54), έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής $\vec{\omega}$ του σώματος. (Θεωρούμε ότι η σχέση (7.51) ισχύει, έστω προσεγγιστικά, όταν το $\vec{L}$ λαμβάνεται ως προς το κέντρο μάζας του αθλητή.)

2. Θα έχετε προσέξει πώς περιστρέφονται οι χορεύτριες του καλλιτεχνικού πατινάζ πάνω στον πάγο. Σε μια χορεύτρια ασκούνται δύο δυνάμεις: το βάρος της και η κάθετη αντίδραση από τον πάγο (θεωρούμε πως δεν υπάρχει τριβή). Καμία από αυτές τις δυνάμεις δεν παράγει ροπή ως προς το κέντρο μάζας C της χορεύτριας, κι έτσι η στροφορμή της τελευταίας ως προς το C είναι σταθερή. Ο κατακόρυφος άξονας περιστροφής είναι κύριος άξονας, και η διατήρηση της στροφορμής εκφράζεται στη μορφή (7.54) [ή, αλγεβρικά, στη μορφή (7.48)]. Για να αυξήσει η χορεύτρια το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της, μαζεύει τα χέρια της κοντά στο σώμα της, πράγμα που ελαττώνει τη ροπή αδρανείας της. Το αντίθετο ακριβώς κάνει για να ελαττώσει τη γωνιακή της ταχύτητα.

3. Γιατί ένα ποδήλατο πέφτει πιο δύσκολα όταν είναι σε κίνηση; Ας θεωρήσουμε, για ευκολία, μια απλή ρόδα ποδηλάτου, και ας καλέσουμε $\vec{L}$ τη στροφορμή της ρόδας ως προς τον (κύριο) άξονα περιστροφής της τη χρονική στιγμή t. Αν $\vec{T}$ είναι η ολική εξωτερική ροπή στη ρόδα τη στιγμή αυτή, η μεταβολή της στροφορμής μέσα σε χρονικό διάστημα dt είναι $d\vec{L} = \vec{T}\,dt$. Τώρα, μια ανατροπή της ρόδας έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή διεύθυνσης της $\vec{L}$, πράγμα που μπορεί να επιτύχει μια ροπή $\vec{T}$ (ή γενικότερα, μια συνιστώσα της ροπής) *κάθετη* στην $\vec{L}$ (με τον ίδιο τρόπο που μια δύναμη κάθετη στην ταχύτητα αλλάζει τη διεύθυνση της ταχύτητας). Τότε, και η μεταβολή $d\vec{L}$ είναι κάθετη στην $\vec{L}$:



Παρατηρούμε τώρα ότι (βλ. σχήμα),

$$\tan\theta = \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}|} = \frac{|\vec{T}|dt}{|\vec{L}|} \tag{7.55}$$

Έτσι, όσο μεγαλύτερη είναι η στροφορμή $\vec{L}$ της ρόδας [άρα, λόγω της (7.51), όσο μεγαλύτερη είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της], τόσο μικρότερη θα είναι η γωνία εκτροπής θ για δοσμένη ροπή $\vec{T}$, και άρα τόσο πιο ευσταθής θα είναι η διεύθυνση της ρόδας. Για το λόγο αυτό, ένα ποδήλατο ανατρέπεται τόσο πιο δύσκολα όσο πιο γρήγορα κινείται.

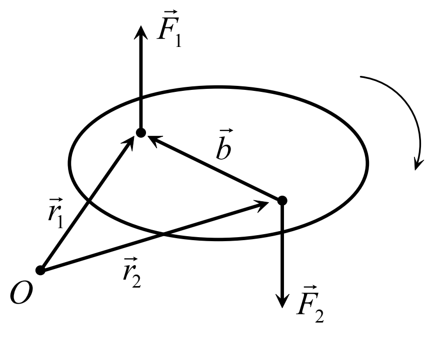
7.8 Ισορροπία Στερεού Σώματος

Ένα σώμα βρίσκεται σε μεταφορική και περιστροφική ισορροπία όταν η ασκούμενη σε αυτό ολική δύναμη, καθώς και η ολική ροπή *ως προς οποιοδήποτε σημείο*, είναι μηδέν:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= 0 \quad (\alpha) \\ \sum \vec{T} &= 0 \quad (\beta) \end{aligned} \tag{7.56}$$

Αν αναρωτιέστε, «τι χρειάζεται η (β), όταν ήδη ισχύει η (α);», ξανασκεφτείτε το! Μηδενική συνισταμένη δύναμη ***δεν*** σημαίνει απαραίτητα και μηδενική συνισταμένη ροπή, και αντίστροφα. Προσέξτε τα παρακάτω παραδείγματα:

1. Θεωρούμε ένα σώμα πάνω στο οποίο δρουν δύο δυνάμεις με ίσα μέτρα και αντίθετες κατευθύνσεις, με τρόπο ώστε οι άξονες των δυνάμεων να μην ταυτίζονται. Ένα τέτοιο σύστημα δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ όπου $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, ονομάζεται *ζεύγος δυνάμεων* :



Η ολική δύναμη στο σώμα είναι

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_1) = 0 \ .$$

Άρα, σύμφωνα με την (7.34), η ταχύτητα του κέντρου μάζας C του σώματος είναι σταθερή:

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}_C = M\frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_C = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \ .$$

Έτσι, αν το C είναι αρχικά ακίνητο ($\vec{v}_C = 0$), θα παραμείνει ακίνητο. Λέμε ότι το σώμα έχει *μεταφορική ισορροπία*.

Η ολική ροπή, τώρα, ως προς τυχαίο σημείο O είναι

$$\sum \vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \ .$$

Θέτοντας $\vec{b} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, έχουμε

$$\sum \vec{T} = \vec{b} \times \vec{F}_1 \tag{7.57}$$

Η (7.57) παριστά τη *ροπή ζεύγους* και, όπως βλέπουμε, η ροπή αυτή είναι *ανεξάρτητη της θέσης του σημείου αναφοράς O*. Παρατηρούμε ότι η ολική ροπή στο σώμα είναι διάφορη του μηδενός, παρόλο που η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν! Η ροπή αυτή θα προκαλέσει περιστροφή του σώματος γύρω από το (ακίνητο) κέντρο μάζας του, C. Αν ο άξονας περιστροφής είναι κύριος άξονας, μπορούμε να βρούμε τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του σώματος από τις σχέσεις (7.53) και (7.57):

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{I}\sum \vec{T} = \frac{1}{I}(\vec{b} \times \vec{F}_1) \tag{7.58}$$

2. Σαν δεύτερο παράδειγμα, θεωρούμε ένα σώμα σταθερού σχήματος, το οποίο υπόκειται μόνο στη δύναμη του βάρους του, $\vec{w}$. Έτσι,

$$\sum \vec{F} = \vec{w} \neq 0$$

οπότε το κέντρο μάζας C του σώματος επιταχύνεται, με επιτάχυνση

$$\vec{a}_C = \frac{1}{M}\sum \vec{F} = \frac{\vec{w}}{M} = \vec{g} \ .$$

Από την άλλη μεριά, η μοναδική δύναμη $\vec{w}$ διέρχεται από το C, κι έτσι η ολική ροπή στο σώμα ως προς C είναι μηδέν, πράγμα που σημαίνει ότι, κατά την κίνησή του, το σώμα δεν αναπτύσσει γωνιακή επιτάχυνση ως προς το κέντρο μάζας του. Λέμε ότι το σώμα έχει *περιστροφική ισορροπία* ως προς το C.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ένα σώμα θα βρίσκεται σε απόλυτη ισορροπία μόνο αν πληρούνται *ταυτόχρονα* και οι δύο σχέσεις (7.56). Οι σχέσεις αυτές ισοδυναμούν με σύστημα έξι αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\sum F_x = 0 \ , \quad \sum F_y = 0 \ , \quad \sum F_z = 0 \tag{7.59}$$

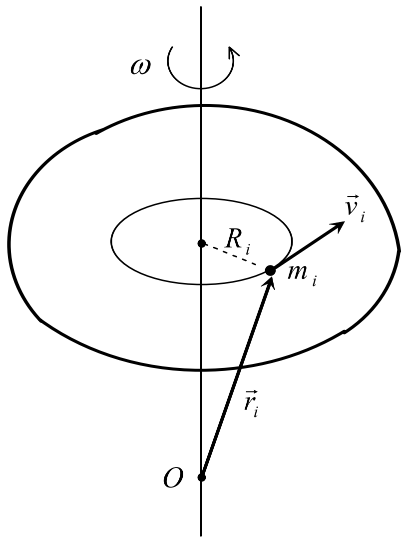
$$\sum T_x = 0 \ , \quad \sum T_y = 0 \ , \quad \sum T_z = 0 \tag{7.60}$$

όπου F_x , T_x , κλπ., οι συνιστώσες των επιμέρους δυνάμεων και ροπών. Ειδικά, οι (7.60) θα πρέπει να ικανοποιούνται ανεξάρτητα από την εκλογή της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων (x, y, z), δηλαδή, *ως προς οποιοδήποτε σημείο αναφοράς O*

των ροπών. Ένα σώμα που υπόκειται σε όλες τις παραπάνω συνθήκες θα κινείται με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας, καθώς και με σταθερή στροφορμή ως προς *οποιοδήποτε* σημείο του χώρου.

7.9 Κινητική και Ολική Μηχανική Ενέργεια

Θεωρούμε πρώτα ένα σώμα που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω ως προς άξονα που διέρχεται από σταθερό σημείο O του χώρου:



Κατά την περιστροφή, όλα τα σωματίδια m_i που αποτελούν το στερεό κινούνται κυκλικά γύρω από τον άξονα με κοινή γωνιακή ταχύτητα ω. Αν R_i είναι η κάθετη απόσταση του m_i από τον άξονα περιστροφής (άρα, η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς τού m_i), το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_i$ του σωματιδίου αυτού είναι $v_i = R_i\,\omega$. Η ολική *κινητική ενέργεια περιστροφής* του σώματος είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών όλων των σωματιδίων του στερεού:

$$E_{k,\pi\varepsilon\rho} = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2\right) = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i R_i^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{k,\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2} I\,\omega^2} \qquad (7.61)$$

όπου

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

η ροπή αδρανείας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής.

Η σχέση (7.61) παριστά την ολική κινητική ενέργεια ενός σώματος όταν αυτό εκτελεί *καθαρή περιστροφή* ως προς σταθερό άξονα. Μια πιο γενική μορφή κίνησης είναι η περιστροφή ως προς άξονα που μετακινείται στο χώρο. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ο άξονας περιστροφής διέρχεται σταθερά από το κέντρο μάζας C του σώματος, ενώ το C κινείται στο χώρο με ταχύτητα $\vec{v}_C$. Έτσι, το σώμα εκτελεί μια σύνθετη κίνηση αποτελούμενη από μια *μεταφορά* του κέντρου μάζας C και μια *περιστροφή* γύρω από το C. Όπως αποδεικνύεται (βλ. και Σημείωση στο τέλος της Παρ.6.4), η ολική κινητική ενέργεια του σώματος είναι άθροισμα δύο επιμέρους ποσοτήτων: μιας *κινητικής ενέργειας μεταφοράς*,

$$E_{k,\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2} M v_C^2 \tag{7.62}$$

(όπου M η μάζα του σώματος και v_C το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του), και μιας *κινητικής ενέργειας περιστροφής ως προς το C*,

$$E_{k,\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2} I_C \omega^2 \tag{7.63}$$

(όπου ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από άξονα που διέρχεται από το C, και I_C η ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα αυτό). Έτσι, η ολική κινητική ενέργεια του σώματος είναι

$$\boxed{E_k = E_{k,\mu\varepsilon\tau} + E_{k,\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2} \tag{7.64}$$

Αν το σώμα υπόκειται σε εξωτερικές δυνάμεις που είναι συντηρητικές (π.χ., βάρος), μπορούμε να ορίσουμε μια εξωτερική δυναμική ενέργεια E_p , καθώς και μια *ολική μηχανική ενέργεια E* που μένει σταθερή κατά την κίνηση:

$$\boxed{E = E_k + E_p = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + E_p} \tag{7.65}$$

Για παράδειγμα, αν το σώμα κινείται κάτω από την επίδραση της βαρύτητας και μόνο, η δυναμική του ενέργεια είναι

$$E_p = M g y_C \tag{7.66}$$

όπου y_C η κατακόρυφη απόσταση (το ύψος) του κέντρου μάζας C από ένα οριζόντιο επίπεδο αναφοράς. Πράγματι: Από τη σχέση (6.3),

$$y_C = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i$$

όπου y_i το ύψος στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο m_i του σώματος. Όμως, η ολική βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος είναι το άθροισμα των επιμέρους δυναμικών ενεργειών των σωματιδίων που το αποτελούν:

$$E_p = \sum_i (m_i g y_i) = g \sum_i m_i y_i = M g y_C \quad .$$

Η ολική μηχανική ενέργεια του σώματος είναι σταθερή και ίση με

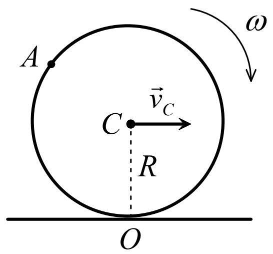
$$E = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + M g y_C \tag{7.67}$$

7.10 Σώματα που Εκτελούν Κύλιση

Την κύλιση ενός σώματος (π.χ., ενός κυλίνδρου ή μιας σφαίρας) πάνω σε ένα επίπεδο μπορούμε να την περιγράψουμε με δύο τρόπους:

α) Συνδυασμός μεταφοράς και περιστροφής

Θεωρούμε την κύλιση σαν σύνθετη κίνηση που αποτελείται από περιστροφή ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας C, με ταυτόχρονη μετατόπιση του ίδιου του άξονα παράλληλα προς τον εαυτό του και έτσι ώστε να είναι πάντα κάθετος προς τη διεύθυνση κίνησης του C :



Καλούμε ω τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ως προς τον άξονα, και $\alpha = d\omega/dt$ τη γωνιακή επιτάχυνση. Θεωρούμε μια επίπεδη τομή στο σώμα η οποία διέρχεται από το C και είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής (του οποίου μόνο η προβολή C φαίνεται στο σχήμα). Έστω A ένα τυχαίο σημείο της (κυκλικής) περιφέρειας της επίπεδης τομής (προφανώς, το A ανήκει στην επιφάνεια του σώματος). Η ταχύτητα $\vec{v}_C$ του κέντρου μάζας, ως προς το επίπεδο πάνω στο οποίο γίνεται η κύλιση (*επίπεδο κύλισης*), είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής, άρα το διάνυσμα $\vec{v}_C$ ανήκει στην κάθετη τομή που διέρχεται από το C και περιέχει το A.

Καλούμε O το σημείο της περιφέρειας της κάθετης τομής το οποίο βρίσκεται σε στιγμιαία επαφή με το επίπεδο κύλισης. Ισοδύναμα, το O μπορεί να θεωρηθεί σαν σημείο του επιπέδου. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του C ως προς το επίπεδο (ή, ως προς το σημείο επαφής O) γράφονται, συμβολικά,

$$\vec{v}_{C,O} \equiv \vec{v}_C \ , \quad \vec{a}_{C,O} \equiv \vec{a}_C \ .$$

Η ταχύτητα και η *επιτρόχια* επιτάχυνση του σημείου A *ως προς το κέντρο μάζας* C είναι, κατά μέτρο,

$$v_{A,C} = R\omega \ , \quad a_{A,C} = R\alpha \qquad (7.68)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (2.34) και (2.36).

Η κίνηση ονομάζεται *καθαρή κύλιση* αν το σώμα δεν ολισθαίνει ως προς το επίπεδο κατά την κύλισή του. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο του σώματος που έρχεται σε επαφή με το επίπεδο κύλισης δεν μετακινείται *κατά μήκος του επιπέδου*, αλλά η επαφή του με το επίπεδο είναι στιγμιαία. Το κύριο χαρακτηριστικό μιας τέτοιας κίνησης, το οποίο αποτελεί και τη *συνθήκη καθαρής κύλισης* που πρέπει να πληρούται στην περίπτωση αυτή, είναι το εξής:

Η ταχύτητα και η ***επιτρόχια*** *επιτάχυνση του σημείου A της επιφάνειας του σώματος,* ***ως προς το κέντρο μάζας C****, είναι ίσες κατά μέτρο με την ταχύτητα και την επιτάχυνση, αντίστοιχα, του ίδιου του C* ***ως προς το επίπεδο κύλισης*** *(ή, ως προς το σημείο στιγμιαίας επαφής O).*

Συμβολικά, γράφουμε

$$v_{A,C} = v_{C,O} \equiv v_C \ , \qquad a_{A,C} = a_{C,O} \equiv a_C \tag{7.69}$$

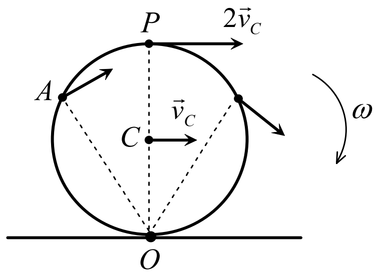
Με συνδυασμό των (7.68) και (7.69), η συνθήκη καθαρής κύλισης γράφεται

$$\boxed{v_C = R\omega \ , \quad a_C = R\alpha} \tag{7.70}$$

Τη συνθήκη αυτή μπορούμε να τη δικαιολογήσουμε απλά ως εξής: Όταν το σημείο A διαγράφει τόξο μήκους s ως προς το κέντρο C, και εφόσον δεν υπάρχει ολίσθηση, την ίδια απόσταση s διανύει εν τω μεταξύ και το C ως προς το επίπεδο κύλισης. (Για παράδειγμα, όταν το σώμα εκτελεί μια πλήρη περιστροφή ως προς το C, το σημείο A διαγράφει τόξο μήκους s=2πR ως προς το C, και την ίδια απόσταση διανύει το C ως προς το επίπεδο. Παρατηρήστε την κίνηση μιας ρόδας αυτοκινήτου που δεν γλιστρά στο δρόμο.) Έτσι, οι ταχύτητες του A ως προς C και του C ως προς O, είναι κατά μέτρο ίσες, πράγμα που σημαίνει ότι $v_C=R\omega$. Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή ως προς το χρόνο και λαμβάνοντας υπόψη ότι $dv_C/dt = a_C$ και $d\omega/dt = \alpha$, βρίσκουμε ότι $a_C = R\alpha$.

β) Περιστροφή ως προς στιγμιαίο άξονα

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε την καθαρή κύλιση σαν μια *αμιγή περιστροφή* ως προς τον *στιγμιαίο* άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής O του σώματος με το επίπεδο κύλισης και είναι κάθετος στην κίνηση του κέντρου μάζας C :



Για κάθε χρονική στιγμή, κάθε σημείο A της κάθετης τομής του σώματος τείνει *στιγμιαία* να κινηθεί κυκλικά με κέντρο το στιγμιαίο σημείο επαφής O και ακτίνα την απόσταση OA του θεωρούμενου σημείου από το O (το A μπορεί τώρα να ανήκει είτε στην περιφέρεια της τομής, είτε στο εσωτερικό της). Παρατηρούμε ότι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής τού *A ως προς το O* είναι ίση με τη γωνιακή ταχύτητα του *A ως προς το C*, δηλαδή ίση με ω. Πράγματι, η γωνιακή ταχύτητα του A ως προς O είναι ίδια με τη γωνιακή ταχύτητα οποιουδήποτε άλλου σημείου της τομής ως προς O, άρα και του C ως προς O, που είναι ίση με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του O ως προς C, δηλαδή ίση με ω. (Σκεφτείτε ότι η γωνία που διαγράφει το C ως προς το O, μέσα σε απειροστό χρονικό διάστημα dt, είναι ίση με τη γωνία που διαγράφει το O ως προς το C μέσα στο ίδιο διάστημα.)

Επειδή η κίνηση του A είναι στιγμιαία κυκλική ως προς O, το μέτρο της ταχύτητας του A ως προς O (δηλαδή, ως προς το επίπεδο κύλισης) είναι

$$v_{A,O} = (OA)\,\omega \tag{7.71}$$

ενώ η διεύθυνση της ταχύτητας είναι κάθετη στην ακτίνα OA. Όταν το A συμπίπτει με το O, τότε $(OA)=(OO)=0$ και

$$v_{O,O} = 0 \tag{7.72}$$

Όταν το A συμπίπτει με το C, τότε $(OA)=(OC)=R$ και

$$v_{C,O} \equiv v_C = R\omega \tag{7.73}$$

Με παραγώγιση ως προς το χρόνο,

$$a_{C,O} \equiv a_C = R\alpha \tag{7.74}$$

Ξαναβρήκαμε, έτσι, τη συνθήκη καθαρής κύλισης (7.70). Τέλος, όταν το A συμπίπτει με το P (αντιδιαμετρικό τού O ως προς το C), τότε $(OA)=(OP)=2R$ και

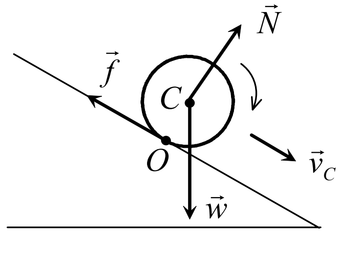
$$v_{P,O} \equiv v_P = 2R\omega = 2v_C \tag{7.75}$$

Με παραγώγιση,

$$a_{P,O} \equiv a_P = 2R\alpha = 2a_C \tag{7.76}$$

7.11 Στατική Τριβή στην Κύλιση

Σε πολλές περιπτώσεις (αν και όχι πάντοτε) η τριβή είναι αναγκαία ώστε να έχουμε κύλιση πάνω σε μια επιφάνεια. Φανταστείτε, για παράδειγμα, ένα αρχικά ακίνητο όχημα να προσπαθεί να κινηθεί πάνω σε μια πίστα από πάγο! Ο ρόλος της τριβής γίνεται φανερός με τη βοήθεια του παρακάτω παραδείγματος:



Ένας κύλινδρος εκτελεί καθαρή κύλιση (χωρίς ολίσθηση) πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του C αυξάνει καθώς ο κύλινδρος κατέρχεται, πράγμα που σημαίνει ότι στον κύλινδρο ασκείται εξωτερική ροπή ως προς το C. Ποια δύναμη, όμως, ευθύνεται γι' αυτή τη ροπή; Σίγουρα όχι το βάρος $\vec{w}$ ή η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο, αφού και οι δύο αυτές δυνάμεις διέρχονται από το C. Απάντηση: Τη ροπή ασκεί η *στατική τριβή* $\vec{f}$, της οποίας ο ρόλος είναι να εμποδίσει την ολίσθηση του κυλίνδρου πάνω στο επίπεδο, έτσι ώστε η κίνηση να είναι καθαρή κύλιση (αν υπήρχε ολίσθηση, η τριβή θα ήταν *κινητική*). Χωρίς την παρουσία στατικής τριβής, λοιπόν, θα ήταν αδύνατη η καθαρή κύλιση πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο. (Το συμπέρασμα αυτό δεν ισχύει, όμως, όταν το επίπεδο κύλισης είναι οριζόντιο. Βλ. Πρόβλημα 47.)

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι

> *στην καθαρή κύλιση, η στατική τριβή* ***δεν*** *παράγει έργο κι έτσι* ***δεν*** *επηρεάζει τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας*

(σε αντίθεση με την κύλιση με ολίσθηση, όπου η τριβή είναι κινητική και παράγει -στην ουσία, καταναλώνει- έργο). Αυτό συμβαίνει διότι το σημείο εφαρμογής O της στατικής τριβής $\vec{f}$ δεν μετακινείται κατά μήκος του επιπέδου, αφού, βάσει της (7.72), η στιγμιαία ταχύτητά του ως προς το επίπεδο είναι μηδέν.

7.12 Γυροσκοπική Κίνηση

Μια περιστροφική κίνηση ενός σώματος χαρακτηρίζεται, γενικά, ως *γυροσκοπική* όταν ο άξονας περιστροφής διέρχεται μεν από σταθερό σημείο του χώρου, αλλά η διεύθυνσή του μεταβάλλεται στο χώρο. Στην περίπτωση που ο άξονας περιστροφής είναι κύριος άξονας (π.χ., άξονας συμμετρίας που διέρχεται από το κέντρο μάζας), η σχέση (7.49) μας λέει ότι η στροφορμή $\vec{L}$ του σώματος είναι στη διεύθυνση του άξονα. Έτσι, στη γυροσκοπική κίνηση ως προς κύριο άξονα, η διεύθυνση της στροφορμής μπορεί να μεταβάλλεται.

Γενικά, η μεταβολή του διανύσματος $\vec{L}$ της στροφορμής του σώματος προϋποθέτει την ύπαρξη εξωτερικής ροπής $\vec{T}$. Τα $\vec{L}$ και $\vec{T}$ υπολογίζονται ως προς οποιοδήποτε σημείο του κύριου άξονα περιστροφής, και δεν εξαρτώνται από την εκλογή του σημείου αυτού. Σύμφωνα με την (7.46),

$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad d\vec{L} = \vec{T}\,dt \ .$$

Παρατηρούμε ότι η απειροστή χρονική μεταβολή $d\vec{L}$ της στροφορμής είναι στην κατεύθυνση της ροπής.

Στην περίπτωση που η ροπή $\vec{T}$ είναι *κάθετη* στη στροφορμή $\vec{L}$, η μεταβολή $d\vec{L}$ είναι επίσης κάθετη στην $\vec{L}$, έτσι ώστε $\vec{L}\cdot d\vec{L}=0$. Όμως,

$$\vec{L}\cdot d\vec{L} = \frac{1}{2}\,d(\vec{L}\cdot\vec{L}) = \frac{1}{2}\,d(L^2) = \frac{1}{2}(2LdL) = LdL$$

(όπου L το μέτρο τής $\vec{L}$), κι έτσι, $LdL=0$. Δοθέντος ότι $L\neq 0$, θα πρέπει να ισχύει ότι $dL=0$ ή $L=$*σταθερό*:

Όταν η ροπή είναι κάθετη στη στροφορμή, το ***μέτρο*** *της στροφορμής μένει σταθερό (παρόλο που η διεύθυνσή της μεταβάλλεται).*

Αυτό, βέβαια, σας θυμίζει τη σταθερότητα του μέτρου της ταχύτητας ενός σωματιδίου όταν η ολική δύναμη πάνω του είναι κεντρομόλος (κάθετη στην ταχύτητα). Μπορούμε να φανταστούμε τη στροφορμή $\vec{L}$ του στερεού σαν διάνυσμα σταθερού μέτρου L που αλλάζει συνεχώς διεύθυνση, συμπαρασύροντας και τη διεύθυνση του κύριου άξονα περιστροφής. Συχνά μάλιστα συμβαίνει ο ίδιος ο άξονας περιστροφής να περιστρέφεται γύρω από κάποιον άλλο, σταθερό άξονα. Αυτό το είδος γυροσκοπικής κίνησης συναντούμε, για παράδειγμα, στο γνωστό παιχνίδι της σβούρας.

Γενικά, τα σώματα που εκτελούν γυροσκοπική κίνηση και χρησιμεύουν στην πειραματική μελέτη της ονομάζονται *γυροσκόπια*. Μια σημαντική εφαρμογή τους είναι η *γυροσκοπική πυξίδα*, με τη βοήθεια της οποίας μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση προς βορρά. Λόγω της περιστροφής της Γης, στο γυροσκόπιο της συσκευής ασκείται ροπή που εξαναγκάζει τον άξονα περιστροφής του να ευθυγραμμιστεί με τον άξονα περιστροφής της Γης.

ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗΣ – ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Μεταφορική	**Περιστροφική**
$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	$\vec{T} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\alpha}$
$E_{k,\mu\varepsilon\tau} = \dfrac{1}{2}mv^2$	$E_{k,\pi\varepsilon\rho} = \dfrac{1}{2}I\omega^2$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

8.1 Ιδανικό Υγρό

Με τον όρο *ρευστό* εννοούμε ένα συνεχές μέσο που μπορεί να ρέει. Ανάλογα με τις φυσικές τους ιδιότητες, τα ρευστά χωρίζονται σε *υγρά* και *αέρια*. Στο κεφάλαιο αυτό θα περιοριστούμε στη μελέτη των υγρών, και με αυτή τη σημασία θα χρησιμοποιούμε στο εξής τον όρο «ρευστό». Η μηχανική των ρευστών χωρίζεται σε δύο ενότητες: την *στατική* των ρευστών (*Υδροστατική*), που μελετάει τα ρευστά σε κατάσταση ισορροπίας, και την *δυναμική* των ρευστών (*Υδροδυναμική*), που μελετάει τα ρευστά σε κίνηση.

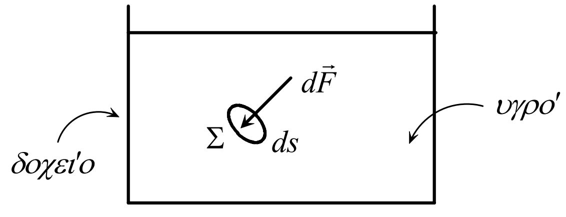
Στον κόσμο δεν υπάρχει τίποτα το ιδανικό! Δεν είναι απαισιόδοξη διαπίστωση αλλά απλή ερμηνεία του όρου «ιδανικός» (=*ιδέα*): κάτι που βρίσκεται μόνο στη σκέψη μας, που δεν υπάρχει στην πραγματικότητα. Επειδή τα *πραγματικά* υγρά έχουν χαρακτηριστικά (π.χ., ιξώδες) που συχνά δυσκολεύουν τη μελέτη τους, επινοούμε μια εξιδανίκευσή τους που την καλούμε *ιδανικό υγρό*, με τις εξής ιδιότητες:

1. Είναι *τελείως ασυμπίεστο*. Τούτο έχει σαν συνέπεια ότι η πυκνότητα ενός ιδανικού υγρού είναι σταθερή σε όλη την έκταση του υγρού. (Αυτή είναι και μια από τις βασικές διαφορές των υγρών από τα αέρια.)
2. Δεν έχει *εσωτερικές τριβές* (*ιξώδες*). Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία στην Υδροδυναμική, γιατί μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να μελετήσουμε την κίνηση του υγρού.

Πολλά πραγματικά υγρά (όπως, π.χ., το νερό) έχουν ιδιότητες που προσεγγίζουν αυτές των ιδανικών. Εν τούτοις, οι αποκλίσεις των υγρών από την ιδανική κατάσταση δεν είναι πάντα ανεπιθύμητες. Για παράδειγμα, αν τα υγρά ήταν *τελείως* ασυμπίεστα, δεν θα επέτρεπαν τη διάδοση ελαστικών κυμάτων (όπως ο ήχος) στο εσωτερικό τους.

8.2 Υδροστατική Πίεση

Ξεκινώντας τη μελέτη της Υδροστατικής, θεωρούμε ένα υγρό που ηρεμεί (ισορροπεί) και καλούμε ds μια *στοιχειώδη* (απειροστή) επιφάνεια που βρίσκεται τοποθετημένη σε κάποιο σημείο Σ του υγρού. Η ds μπορεί να αποτελεί τμήμα της επιφάνειας ενός αντικειμένου που βρίσκεται μέσα στο υγρό, ή και να είναι τμήμα μιας *νοητής* επιφάνειας μέσα στο υγρό (μιας επιφάνειας, δηλαδή, που αποτελείται από σημεία που ανήκουν στο ίδιο το υγρό). Μια τέτοια απειροστή επιφάνεια μπορεί πάντα, έστω προσεγγιστικά, να θεωρείται επίπεδη. Καλούμε $d\vec{F}$ τη στοιχειώδη δύναμη που ασκεί το υγρό στην επιφάνεια ds :



Όπως βρίσκεται πειραματικά, η $d\vec{F}$ έχει τις εξής ιδιότητες:

1) Είναι ανεξάρτητη από τη φύση της επιφάνειας *ds*. Δηλαδή, η δύναμη που ασκεί το υγρό στο στοιχείο *ds* δεν εξαρτάται από τη μοριακή σύνθεση του *ds* (από το υλικό από το οποίο αποτελείται το *ds*).

2) Η διεύθυνση της $d\vec{F}$ είναι πάντα *κάθετη* στο *ds*, ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό τού *ds*. Τούτο εξηγείται από την απουσία εσωτερικών τριβών στο υγρό και την υπόθεση ότι το υγρό ισορροπεί.

3) Το μέτρο *dF* της $d\vec{F}$ είναι ανεξάρτητο του προσανατολισμού τού *ds* (δηλαδή, το *dF* δεν αλλάζει αν στρέψουμε το *ds*, αφήνοντάς το όμως σταθερά τοποθετημένο στο σημείο *Σ* του υγρού). Όπως βρίσκεται, το *dF* εξαρτάται μόνο από τη θέση του σημείου *Σ* και, για απειροστό *ds*, είναι ανάλογο του εμβαδού τού *ds* (το εμβαδόν αυτό, για ευκολία, θα συμβολίζεται επίσης με *ds*).

Η τελευταία αυτή παρατήρηση μας οδηγεί στον ορισμό της *υδροστατικής πίεσης P* στο θεωρούμενο σημείο *Σ* του υγρού:

$$P = \frac{dF}{ds} \quad \Leftrightarrow \quad dF = P\,ds \tag{8.1}$$

Παρατηρούμε τα εξής:

1) Η *P* είναι, γενικά, συνάρτηση της θέσης του σημείου *Σ*.

2) Η *P* δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό τού *ds* (γιατί;), ούτε, επομένως, και από τον προσανατολισμό τής $d\vec{F}$. Άρα, η *P* είναι *μονόμετρο* μέγεθος.

3) Η *P* ορίζεται για κάθε σημείο του υγρού χωριστά, *δεν* ορίζεται αθροιστικά. Έτσι, δεν έχει νόημα να μιλάμε για «ολική πίεση» πάνω σε μια επιφάνεια (όπως δεν μιλάμε, π.χ., για «ολική θερμοκρασία» μέσα σε ένα δωμάτιο). Αντίθετα, η δύναμη *είναι* αθροιστικό μέγεθος. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την ολική δύναμη πάνω σε μια επιφάνεια *S* σαν το διανυσματικό άθροισμα των στοιχειωδών δυνάμεων $d\vec{F}$ που ασκούνται από το υγρό στις διάφορες στοιχειώδεις επιφάνειες *ds* από τις οποίες αποτελείται η *S*.

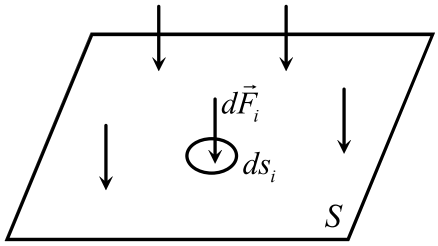
Όπως βρίσκεται πειραματικά,

> *όλα τα σημεία μιας* ***οριζόντιας*** *επιφάνειας μέσα σε ένα υγρό που ηρεμεί έχουν τη ίδια πίεση.*

Αυτό σημαίνει ότι η υδροστατική πίεση μεταβάλλεται μόνο στην *κατακόρυφη* διεύθυνση, δηλαδή στη διεύθυνση του πεδίου βαρύτητας. (Ο ρόλος της βαρύτητας γίνεται φανερός και από την παρουσία της σταθεράς *g* στις βασικές εξισώσεις της Υδροστατικής.) Σαν ειδική περίπτωση, η σταθερή πίεση στην *ελεύθερη επιφάνεια* του υγρού (η οποία είναι πάντα οριζόντια επιφάνεια) είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση P_0 .

Θεωρούμε τώρα μια *οριζόντια* επιφάνεια εμβαδού S μέσα στο υγρό. Χωρίζουμε την S σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος από στοιχειώδεις επιφάνειες ds_i :

$$S = \sum_i ds_i \ .$$



Η ολική δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί το υγρό στην S είναι *κάθετη* στην S, και το μέτρο της, F, είναι το άθροισμα των μέτρων dF_i όλων των στοιχειωδών δυνάμεων $d\vec{F}_i$ που α-σκούνται κάθετα στα αντίστοιχα ds_i :

$$F = \sum_i dF_i \ .$$

Αλλά, $dF_i = Pds_i$, όπου P η *σταθερή* πίεση πάνω στην S, κοινή για όλες τις στοιχειώδεις επιφάνειες ds_i . Έτσι,

$$F = \sum_i Pds_i = P\sum_i ds_i \quad \Rightarrow$$

$$F = PS \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{F}{S} \tag{8.2}$$

Προσέξτε ότι η (8.2) ισχύει μόνο για *οριζόντια* επιφάνεια, διότι προϋποθέτει ότι η πίεση P είναι σταθερή πάνω στην S. Αντίθετα, η *απειροστή* σχέση (8.1), που αφορά στοιχειώδη επιφάνεια ds σε μεμονωμένο σημείο Σ του υγρού, ισχύει πάντα, ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό τής ds.

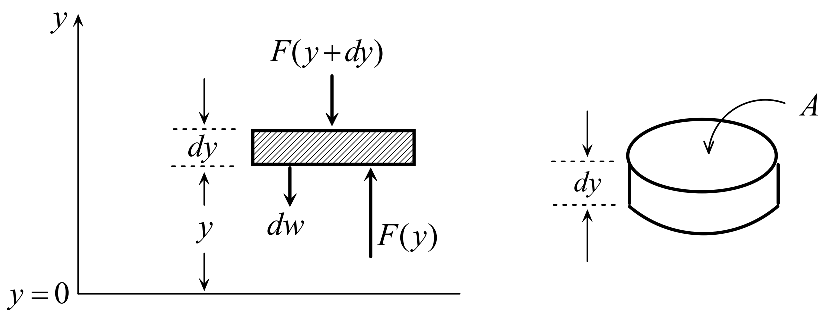
8.3 Θεμελιώδης Εξίσωση της Υδροστατικής

Αναφέρθηκε νωρίτερα ότι η υδροστατική πίεση P σε ένα υγρό που ισορροπεί, μεταβάλλεται μόνο στην *κατακόρυφη* διεύθυνση. Αναζητούμε τώρα την εξίσωση που περιγράφει αυτή τη μεταβολή.

Θεωρούμε ένα υγρό πυκνότητας ρ. Επειδή το υγρό είναι ιδανικό (άρα ασυμπίεστο), η ρ είναι σταθερή σε όλη την έκταση του υγρού. Αν dm είναι η μάζα και dV ο όγκος μιας στοιχειώδους ποσότητας του υγρού,

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \Leftrightarrow \quad dm = \rho\, dV \tag{8.3}$$

Έστω τώρα ένα στοιχείο όγκου του υγρού, σε σχήμα λεπτού οριζόντιου δίσκου εμβαδού βάσης A και απειροστού πάχους dy, άρα απειροστού όγκου $dV = Ady$:



Το βάρος του δίσκου είναι $dw=(dm)g=(\rho dV)g$, ή

$$dw = \rho g A dy \tag{8.4}$$

Καλούμε $P(y)$ και $P(y+dy)$ τις (σταθερές) πιέσεις στα οριζόντια επίπεδα που βρίσκονται σε ύψη y και $y+dy$, αντίστοιχα, πάνω από ένα αυθαίρετο επίπεδο αναφοράς $y=0$. Οι κατακόρυφες δυνάμεις πάνω στο δίσκο είναι το βάρος του, dw, και οι πιεστικές δυνάμεις από το υγρό πάνω στις δύο οριζόντιες επιφάνειες του δίσκου, $F(y)$ και $F(y+dy)$. Ο δίσκος ισορροπεί, αφού αποτελεί τμήμα ενός υγρού που βρίσκεται σε ισορροπία. Άρα, η ολική κατακόρυφη δύναμη πάνω του είναι μηδέν:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F(y) - F(y+dy) - dw = 0 \ .$$

Όμως,

$$F(y) = P(y)A \ , \qquad F(y+dy) = P(y+dy)A \ .$$

Αντικαθιστώντας και το dw από την (8.4), και απαλείφοντας το A, βρίσκουμε

$$P(y+dy) - P(y) = -\rho g dy$$

ή

$$dP = -\rho g dy \tag{8.5}$$

όπου dP η απειροστή μεταβολή της πίεσης που αντιστοιχεί στη μεταβολή dy του ύψους.

Για να βρούμε, τώρα, τη μεταβολή της πίεσης, $\Delta P=P_2-P_1$, καθώς μετακινούμαστε από ύψος y_1 σε ύψος y_2 (δηλαδή, κατά $\Delta y=y_2-y_1$), ολοκληρώνουμε την (8.5) από y_1 έως y_2 , λαμβάνοντας υπόψη ότι η πυκνότητα ρ είναι σταθερή:

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g dy = -\rho g \int_{y_1}^{y_2} dy \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{P_2 - P_1 = -\rho g (y_2 - y_1) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta P = -\rho g \Delta y} \tag{8.6}$$

Προσέξτε ότι η πίεση *ελαττώνεται* ($\Delta P<0$) όταν αυξάνει το ύψος ($\Delta y>0$).

Εναλλακτικά, αντί για τα ύψη y, που έχουν θετική φορά προς τα *πάνω*, μπορούμε να αναφερόμαστε στα *βάθη* h με θετική φορά προς τα *κάτω* και με επίπεδο αναφοράς (συνήθως) την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Τότε, $dh=-dy$, και η απειροστή σχέση (8.5) γράφεται

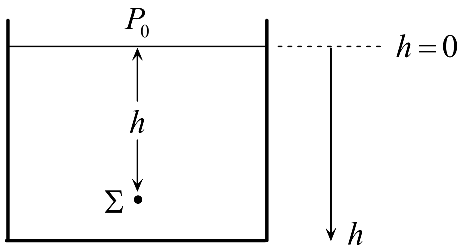
$$dP = \rho g dh \qquad (8.7)$$

ενώ η θεμελιώδης εξίσωση (8.6) παίρνει τη μορφή

$$\boxed{P_2 - P_1 = \rho g(h_2 - h_1) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta P = \rho g \Delta h} \qquad (8.8)$$

Προσέξτε ότι η πίεση *αυξάνει* με το βάθος ($\Delta P>0$ όταν $\Delta h>0$).

Έστω τώρα ότι ζητούμε την πίεση P σε ένα σημείο Σ σε βάθος h κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Φυσικά, *όλα* τα σημεία του υγρού στο ίδιο βάθος h με το Σ θα έχουν την ίδια πίεση P. Η πίεση στην επιφάνεια του υγρού, όπου $h=0$, είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση P_0 :



Θέτοντας $h_1=0$, $P_1=P_0$, και $h_2=h$, $P_2=P$, στη σχέση (8.8), έχουμε:

$$P - P_0 = \rho g(h-0) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{P = P_0 + \rho g h} \qquad (8.9)$$

Η σχέση (8.9) είναι μια εναλλακτική, ισοδύναμη μορφή της θεμελιώδους εξίσωσης (8.8). [Εφαρμόζοντας την (8.9) σε δύο σημεία P_1 και P_2 σε βάθη h_1 και h_2 , αντίστοιχα, βρείτε πάλι την (8.8).] Προσέξτε ότι η ατμοσφαιρική πίεση P_0 προστίθεται στην πίεση ρgh που θα προκαλούσε από μόνο του το υγρό στο σημείο Σ. Η παρατήρηση αυτή εκφράζει την *αρχή του Pascal*, την οποία θα εξετάσουμε στην Παρ.8.6.

8.4 Μονάδες Μέτρησης της Πίεσης

Η υδροστατική πίεση εκφράζεται σε διάφορα είδη μονάδων, ανάλογα και με τις εφαρμογές που μας ενδιαφέρουν. Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται συχνότερα στη Φυσική είναι οι παρακάτω:

1) Στο S.I. (m, kg, s) η μονάδα της πίεσης ονομάζεται *pascal* (*Pa*):

$$1\,Pa = 1\,\frac{N}{m^2} \qquad \text{όπου} \qquad 1\,N = 1\,kg \cdot m \cdot s^{-2}\ .$$

Στο *cgs* (cm, g, s) η μονάδα πίεσης είναι

$$1\,\frac{dyn}{cm^2} \qquad \text{όπου} \qquad 1\,dyn = 1\,g \cdot cm \cdot s^{-2}\ .$$

Δοθέντων ότι $1kg = 10^3\ g$ και $1m = 10^2\ cm$, βρίσκουμε ότι $1N = 10^5\ dyn$ και

$$1\,Pa = 10\,\frac{dyn}{cm^2}\ .$$

2) Η μονάδα *Bar* ορίζεται ως εξής:

$$1\,Bar = 10^6\,\frac{dyn}{cm^2} = 10^5\,Pa\ .$$

Έτσι,

$$1\,\frac{dyn}{cm^2} = 10^{-6}\,Bar = 1\,\mu Bar\ .$$

3) Ορίζουμε σαν $1Torr$ ή $1mmHg$ την πίεση που ασκεί στη βάση της μια στήλη υδραργύρου (Hg) ύψους $1mm=0.1cm$. Έτσι, $1Torr$ είναι η μεταβολή ΔP που θα προκύψει από τη σχέση (8.8) αν θέσουμε $\rho=13.6\ g/cm^3$ (πυκνότητα Hg), $g=9.8\ m/s^2$ και $\Delta h=0.1cm$:

$$\begin{aligned} 1\,Torr &= (13.6\ \frac{g}{cm^3})\times(980\frac{cm}{s^2})\times(0.1\,cm) \\ &= 1332.8\ \frac{dyn}{cm^2} = 1332.8\ \mu Bar \end{aligned}$$

4) Μια *φυσική ατμόσφαιρα* ($1atm$) ορίζεται ως η πίεση που ασκεί στη βάση της μια στήλη Hg ύψους $76cm=760mm$:

$$\begin{aligned} 1\,atm &= 760\,mmHg = 760\,Torr = 760\times 1332.8\,\mu Bar \\ &\simeq 1.01\,Bar \end{aligned}$$

Σε συνήθεις εφαρμογές, λαμβάνουμε την ατμοσφαιρική πίεση ίση με

$$P_0 = 1\,atm = 760\,Torr \quad (\text{επίπεδο θάλασσας, } 20^o\ C)\ .$$

Εφαρμογή: Μεταβολή της υδροστατικής πίεσης στη θάλασσα

Είναι γνωστό εμπειρικά ότι η πίεση στη θάλασσα αυξάνει κατά περίπου μία ατμόσφαιρα για κάθε 10 μέτρα βάθους. Αυτό μπορεί τώρα να δειχθεί με χρήση της θεμελιώδους εξίσωσης (8.8), αν θέσουμε $\rho=1.03\ g/cm^3$ (πυκνότητα θαλασσινού νερού), $g=9.8\ m/s^2$ και $\Delta h=10m$. Τότε,

$$\begin{aligned} \Delta P = \rho g\,\Delta h &= (1.03\ \frac{g}{cm^3})\times(980\ \frac{cm}{s^2})\times(10^3\ cm) = 1.03\times 9.8\times 10^5\ \frac{dyn}{cm^2} \\ &= 1.03\times 9.8\times 10^{-1}\ Bar = 1.03\times 9.8\times 10^{-1}\times\frac{1}{1.01}\ atm \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Delta P = 0.9994\ atm \simeq 1\,atm \quad \text{για κάθε 10 μέτρα βάθους.}$$

Έτσι, αν λάβουμε υπόψη και την ατμοσφαιρική πίεση $P_0=1atm$ (σύμφωνα με την αρχή του Pascal), η πίεση σε βάθος h στη θάλασσα είναι

$$P = \left(1 + \frac{h}{10m}\right) atm \qquad (\text{το } h \text{ σε μέτρα}).$$

Τι πίεση επικρατεί στο σημείο που βρίσκεται ο *Τιτανικός* (h=4km) ;

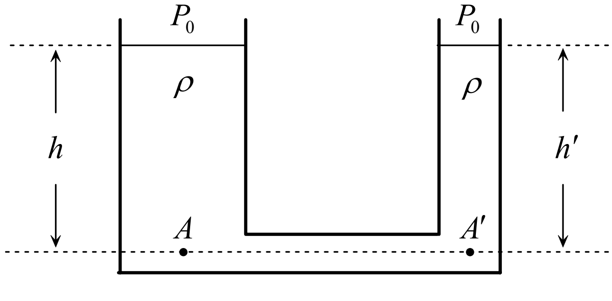
8.5 Αρχή των Συγκοινωνούντων Δοχείων

Φανταστείτε το εξής πείραμα: Παίρνουμε δύο δοχεία του ίδιου ύψους, ένα λεπτό και ένα φαρδύ, τα τρυπάμε σε σημεία κοντά στους πυθμένες τους, και προσαρμόζουμε στα ανοίγματα τις δύο άκρες ενός σωλήνα, συνδέοντας έτσι τα δοχεία και δημιουργώντας ένα ενιαίο *σύστημα συγκοινωνούντων δοχείων*. Στη συνέχεια, τοποθετούμε το σύστημα πάνω σε ένα τραπέζι και, με αργό αλλά σταθερό ρυθμό, γεμίζουμε ταυτόχρονα και τα δύο δοχεία με νερό. Ποιο δοχείο θα γεμίσει πρώτο;

Πιθανώς θα απαντήσετε «το λεπτό, γιατί σ' αυτό η ελεύθερη επιφάνεια του νερού θα φτάσει γρηγορότερα στο άνοιγμα του δοχείου». Αν κάνουμε, όμως, το πείραμα θα διαπιστώσουμε ότι τα δύο δοχεία γεμίζουν *ταυτόχρονα*! Αυτό είναι συνέπεια της *αρχής των συγκοινωνούντων δοχείων*, η οποία λέει ότι

> *αν δύο ή περισσότερα δοχεία συγκοινωνούν μεταξύ τους, περιέχουν το ίδιο υγρό, και υπόκεινται στην ίδια εξωτερική πίεση, τότε, σε κατάσταση ισορροπίας, οι ελεύθερες επιφάνειες του υγρού βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο σε όλα τα δοχεία.*

Η αρχή αποδεικνύεται θεωρητικά ως εξής:



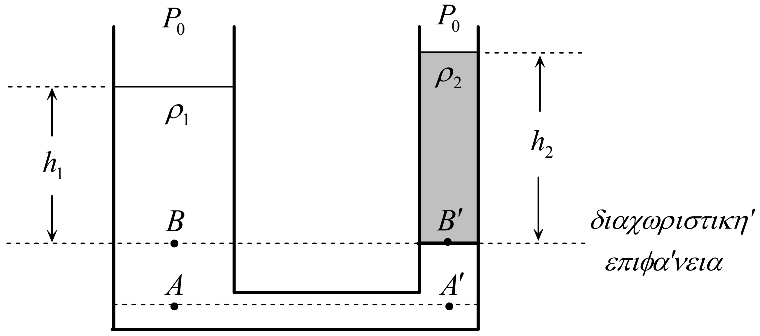
Θεωρούμε τα σημεία A και A' του υγρού, τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά δοχεία αλλά στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, άρα έχουν την ίδια πίεση. Καλούμε h και h' τα ύψη των ελεύθερων επιφανειών των δοχείων πάνω από το επίπεδο αυτό. Από την (8.9),

$$P_A = P_{A'} \;\Rightarrow\; P_0 + \rho g h = P_0 + \rho g h' \;\Rightarrow\; h = h' \;.$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δύο δοχείων.

Η αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων *δεν* ισχύει σε δύο περιπτώσεις: (α) όταν στα δοχεία υπάρχουν διαφορετικά υγρά που δεν αναμειγνύονται, και (β) όταν οι πιέσεις στις ελεύθερες επιφάνειες του περιεχόμενου υγρού είναι διαφορετικές. Ας δούμε δύο παραδείγματα:

α) Δοχεία με υγρά διαφορετικών πυκνοτήτων



Τα δύο δοχεία του σχήματος περιέχουν υγρά πυκνοτήτων ρ_1 και ρ_2, όπου υποθέτουμε ότι $\rho_1 > \rho_2$. Καλούμε h_1 και h_2 τα ύψη των ελεύθερων επιφανειών των δύο υγρών ως προς τη διαχωριστική τους επιφάνεια (η ύπαρξη μιας τέτοιας επιφάνειας σχετίζεται με το γεγονός ότι τα υγρά δεν αναμειγνύονται). Θεωρούμε τα σημεία A και A' που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο μέσα στο υγρό ρ_1. Επίσης, θεωρούμε το σημείο B στο υγρό ρ_1, και το σημείο B' στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών, στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το B. Επειδή τα A και A' βρίσκονται στο ίδιο υγρό, οι πιέσεις στα σημεία αυτά είναι ίσες. Από τη θεμελιώδη εξίσωση (8.8),

$$P_A - P_B = \rho_1 g(AB) \;\Rightarrow\; P_A = P_B + \rho_1 g(AB) \;,$$
$$P_{A'} - P_{B'} = \rho_1 g(A'B') \;\Rightarrow\; P_{A'} = P_{B'} + \rho_1 g(A'B') \;.$$

Δοθέντων ότι $P_A = P_{A'}$ και $AB=A'B'$, συμπεραίνουμε ότι $P_B = P_{B'}$. Η σχέση (8.9), τότε, δίνει

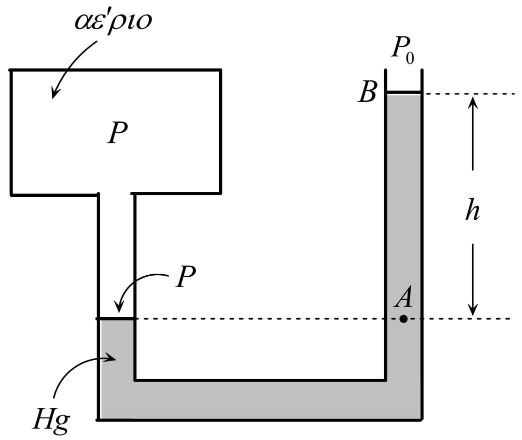
$$P_0 + \rho_1 g h_1 = P_0 + \rho_2 g h_2 \;\Rightarrow\; \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \;\Rightarrow$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \;.$$

Έτσι, αν $\rho_1 > \rho_2$, τότε $h_1 < h_2$.

β) Δοχεία με διαφορετικές επιφανειακές πιέσεις

Στα δοχεία του παρακάτω σχήματος, το ένα σκέλος συνδέεται με δεξαμενή που περιέχει αέριο πίεσης P, ενώ το άλλο σκέλος είναι ανοιχτό στην ατμοσφαιρική πίεση P_0. Το σύστημα των δοχείων περιέχει υδράργυρο (Hg). Καλούμε h το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του Hg (δεξί δοχείο) πάνω από το επίπεδο της διαχωριστικής επιφάνειας του Hg με το αέριο (αριστερό δοχείο), και θεωρούμε ένα σημείο A στο δεξί δοχείο, στο ύψος της διαχωριστικής επιφάνειας:



Η υδροστατική πίεση στο σημείο A του Hg είναι ίση με την πίεση P του αερίου στη δεξαμενή (γιατί;), ενώ η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια B του Hg είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση P_0. Από τη σχέση (8.8),

$$P_A - P_B = \rho g h \quad \Rightarrow \quad P - P_0 = \rho g h .$$

Η παραπάνω διάταξη ονομάζεται *ανοιχτό μανόμετρο* και χρησιμεύει για τη μέτρηση *υπερπιέσεων* ($P\!-\!P_0$). Γενικά, καλούμε *υπερπίεση* τη διαφορά πιέσεων ανάμεσα σε μια μεταβλητή πίεση P και μια προκαθορισμένη, σταθερή πίεση P_0 (στο παράδειγμά μας, η ατμοσφαιρική πίεση) η οποία λαμβάνεται ως «σημείο αναφοράς» για τη μέτρηση πιέσεων.

8.6 Αρχή του Pascal

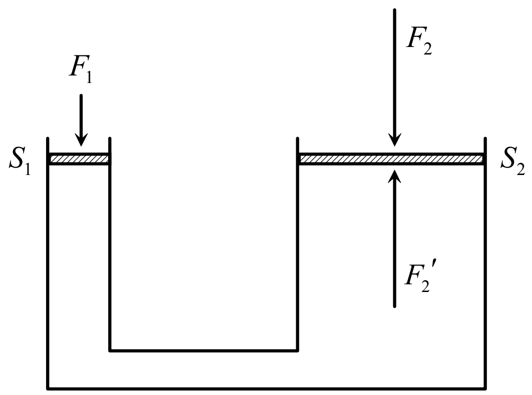
Η *αρχή του Pascal* μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

> *Κάθε μεταβολή της πίεσης στην επιφάνεια ενός υγρού γίνεται αισθητή ταυτόχρονα σε όλα τα σημεία του υγρού. Ειδικότερα, αν η εξωτερική πίεση μεταβληθεί κατά ΔP, η πίεση σε κάθε σημείο του υγρού θα μεταβληθεί επίσης κατά ΔP.*

Πράγματι: Όταν η εξωτερική πίεση είναι P_0, η πίεση σε ένα σημείο Σ του υγρού σε βάθος h είναι $P=P_0+\rho g h$. Αν η εξωτερική πίεση αυξηθεί κατά ΔP, έτσι ώστε η νέα τιμή της γίνει $P_0{}'=P_0+\Delta P$, η πίεση στο Σ θα είναι

$$P' = P_0{}' + \rho g h = (P_0+\Delta P) + \rho g h = (P_0 + \rho g h) + \Delta P = P + \Delta P .$$

Μια πρακτική εφαρμογή της αρχής του Pascal έχουμε στο *υδραυλικό πιεστήριο*. Στην απλούστερη μορφή του, αποτελείται από δύο κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία εμβαδών διατομής S_1 και S_2, όπου $S_1 < S_2$. Στο πάνω μέρος κάθε κυλίνδρου έχει τοποθετηθεί ένα έμβολο, κάτω από το οποίο υπάρχει υγρό, π.χ., ορυκτέλαιο. Οι δύο κύλινδροι συγκοινωνούν στο κάτω μέρος τους με σωλήνα. Στο μικρό έμβολο ασκείται μια κατακόρυφη δύναμη F_1 προς τα κάτω. Ποια δύναμη F_2 πρέπει να ασκήσουμε στο μεγάλο έμβολο ώστε το σύστημα να είναι σε ισορροπία;



Το μικρό έμβολο ασκεί στο υγρό μια πίεση $P=F_1 / S_1$. Κατά την αρχή του Pascal, η πίεση αυτή μεταφέρεται ακέραια στο μεγάλο έμβολο, στο οποίο έτσι ασκείται μια δύναμη κατακόρυφη προς τα πάνω, ίση με

$$F_2' = PS_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2 \ .$$

Για να ισορροπεί, λοιπόν, το μεγάλο έμβολο θα πρέπει να του ασκήσουμε δύναμη προς τα κάτω, ίση με $F_2=F_2'$, δηλαδή,

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 \qquad (8.10)$$

Παρατηρούμε ότι $F_2>F_1$. Έτσι, με μικρή προσπάθεια (δύναμη F_1) μπορούμε, π.χ., να συγκρατήσουμε ένα μεγάλο βάρος (δύναμη F_2).

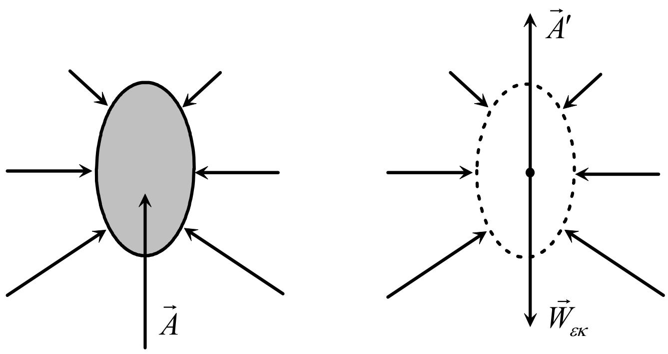
8.7 Αρχή του Αρχιμήδη

Η *αρχή του Αρχιμήδη* αποτελεί τη σπουδαιότερη, ίσως, αρχή της Υδροστατικής, και διατυπώνεται ως εξής:

> *Κάθε σώμα βυθισμένο (ολόκληρο ή κατά ένα μέρος του) μέσα σε ένα υγρό, δέχεται μια δύναμη την οποία ονομάζουμε **άνωση** και η οποία είναι η συνισταμένη όλων των στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούνται κάθετα από το υγρό στα διάφορα σημεία της βυθισμένης επιφάνειας του σώματος. Το μέτρο της άνωσης ισούται με το βάρος του υγρού που εκτοπίζεται από το σώμα, η κατεύθυνσή της είναι κατακόρυφη προς τα πάνω, και ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού (**κέντρο άνωσης**).*

Η αρχή αποδεικνύεται θεωρητικά ως εξής:

Καλούμε $V_{εκ}$ και $W_{εκ}$ τον όγκο και το βάρος, αντίστοιχα, του υγρού που εκτοπίζεται από το σώμα. (Αν το σώμα είναι εξ ολοκλήρου βυθισμένο στο υγρό, το $V_{εκ}$ ισούται με τον όγκο του σώματος. Αν όμως το σώμα είναι μερικώς βυθισμένο, το $V_{εκ}$ είναι μικρότερο.) Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το σώμα είναι βυθισμένο ολόκληρο:



(α) (β)

Στο σχήμα (α) βλέπουμε μια «φωτογραφία» του σώματος τη στιγμή που είναι βυθισμένο. Η εικόνα αυτή είναι στιγμιαία διότι, γενικά, το σώμα *δεν* ισορροπεί μέσα στο υγρό. Η άνωση $\vec{A}$ είναι η συνισταμένη των στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούνται κάθετα στο σώμα από το υγρό.

Στο σχήμα (β), το σώμα έχει αφαιρεθεί και στη θέση του έχει εισρεύσει υγρό του ίδιου σχήματος και όγκου με το σώμα. Η επιφάνεια αυτού του τμήματος του υγρού δέχεται τώρα μια ολική δύναμη (άνωση) $\vec{A}'$ από το υγρό που την περιβάλλει. Το βάρος $\vec{W}_{\varepsilon\kappa}$ αυτού του τμήματος είναι ίσο με το βάρος του υγρού που είχε εκτοπιστεί από το σώμα, και διέρχεται από το κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού.

Σε αντίθεση με το σώμα, το υγρό που το αντικατέστησε ισορροπεί (αφού αποτελεί τμήμα ενός υγρού σε ισορροπία). Άρα,

$$\vec{A}' + \vec{W}_{\varepsilon\kappa} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A}' = -\vec{W}_{\varepsilon\kappa} \ .$$

Όμως, η άνωση είναι ίδια στις δύο περιπτώσεις ($\vec{A} = \vec{A}'$) αφού, όπως έχουμε πει, οι δυνάμεις που ασκεί ένα υγρό σε μια επιφάνεια δεν εξαρτώνται από τη φύση της επιφάνειας. Έτσι, τελικά, η άνωση που ασκεί το υγρό στο σώμα είναι

$$\vec{A} = -\vec{W}_{\varepsilon\kappa} \tag{8.11}$$

Η κατεύθυνση της άνωσης είναι κατακόρυφη προς τα πάνω (αντίθετη του βάρους), ενώ το μέτρο της είναι

$$\boxed{A = W_{\varepsilon\kappa} = \rho g V_{\varepsilon\kappa}} \tag{8.12}$$

όπου ρ η πυκνότητα του υγρού.

Παρατηρούμε τα εξής:

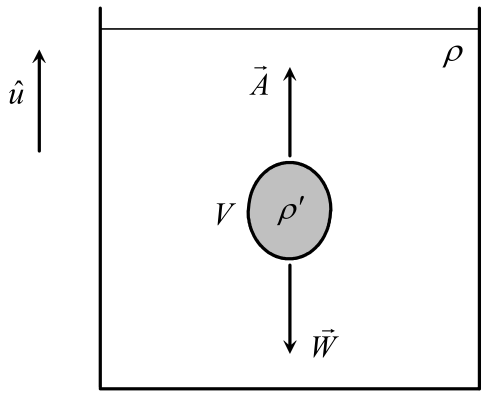
1) Η άνωση εξαρτάται μόνο από τον όγκο του *βυθισμένου* τμήματος του σώματος και είναι ανεξάρτητη από το βάρος, την πυκνότητα, ή το υλικό από το οποίο αποτελείται το σώμα.

2) Για σώμα που είναι ολόκληρο βυθισμένο, η άνωση δεν εξαρτάται από το βάθος στο οποίο βρίσκεται το σώμα μέσα στο υγρό.

3) Η άνωση *δεν* διέρχεται απαραίτητα από το κέντρο βάρους του σώματος, εκτός αν το σώμα είναι ομογενές και πλήρως βυθισμένο, οπότε το κέντρο βάρους του συμπίπτει με το κέντρο άνωσης (κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού).

8.8 Δυναμική του Βυθισμένου Σώματος

Βυθίζουμε ολόκληρο ένα σώμα μέσα σε ένα υγρό, και κατόπιν το αφήνουμε ελεύθερο. Πώς θα κινηθεί στη συνέχεια το σώμα; Όπως θα δείξουμε, η κίνηση εξαρτάται από το συσχετισμό της *μέσης* πυκνότητας ρ' του σώματος με την πυκνότητα ρ του υγρού.



Έστω m, V, W η μάζα, ο όγκος, και το βάρος, αντίστοιχα, του σώματος. Η μέση πυκνότητα του σώματος ορίζεται

$$\rho' = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m = \rho' V \qquad (8.13)$$

Άρα,

$$W = mg = \rho' g V \qquad (8.14)$$

Επειδή το σώμα είναι ολόκληρο βυθισμένο, $V_{εκ}=V$, όπου $V_{εκ}$ ο όγκος του υγρού που εκτοπίζεται από το σώμα. Από την (8.12), τότε, η άνωση που δέχεται το σώμα είναι, κατά μέτρο,

$$A = \rho g V \ .$$

Διανυσματικά, παίρνοντας τη θετική φορά (που καθορίζεται από το $\hat{u}$) προς τα πάνω,

$$\vec{A} = A\,\hat{u} = \rho g V\,\hat{u} \ , \qquad \vec{W} = -W\,\hat{u} = -\rho' g V\,\hat{u} \ .$$

Η ολική δύναμη στο σώμα είναι

$$\vec{F} = \vec{A} + \vec{W} = (A - W)\,\hat{u} = (\rho - \rho')gV\,\hat{u} \equiv F\,\hat{u} \ .$$

Παρατηρούμε ότι η φορά τής $\vec{F}$ εξαρτάται από το πρόσημο της αλγεβρικής τιμής

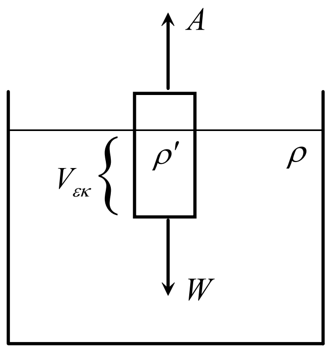
$$F = A - W = (\rho - \rho')gV \qquad (8.15)$$

- Αν $\rho' > \rho$, τότε $F < 0$ και το σώμα *βυθίζεται*.
- Αν $\rho' = \rho$, τότε $F = 0$ και το σώμα *ισορροπεί* βυθισμένο *ολόκληρο* στο υγρό.
- Αν $\rho' < \rho$, τότε $F > 0$ και το σώμα *ανέρχεται* και *επιπλέει*, βυθισμένο μόνο κατά ένα *μέρος* του στο υγρό.

Η μέση πυκνότητα ρ' ενός υποβρυχίου μπορεί να μεταβάλλεται με εισροή ή εκροή θαλασσινού νερού και να καθίσταται, έτσι, μεγαλύτερη, μικρότερη, ή και ίση με την πυκνότητα ρ του νερού. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η κατάδυση, η ανάδυση, ή η ισορροπία του υποβρυχίου μέσα στο νερό.

8.9 Ισορροπία Σώματος που Επιπλέει

Καταρχήν, αναγκαία συνθήκη για να επιπλέει ένα σώμα είναι να έχει μέση πυκνότητα ρ' *μικρότερη* από την πυκνότητα ρ του υγρού ($\rho' < \rho$). Καλούμε V και W τον όγκο και το βάρος, αντίστοιχα, του σώματος, και $V_{\varepsilon\kappa}$ τον όγκο του βυθισμένου τμήματός του (που είναι επίσης και ο όγκος του εκτοπιζόμενου υγρού). Εκτός από το W, στο σώμα επενεργεί και η άνωση A που ασκείται από το υγρό στη *βυθισμένη* επιφάνεια του σώματος. Θέλουμε να βρούμε το ποσοστό του όγκου του σώματος που είναι βυθισμένο στο υγρό.



Επειδή το σώμα ισορροπεί, η ολική δύναμη πάνω σε αυτό είναι μηδέν. Δηλαδή, η άνωση εξισορροπεί πλήρως το βάρος του σώματος: $A=W$. Όμως, από την (8.12), $A=\rho g V_{\varepsilon\kappa}$, ενώ από την (8.14), $W=\rho' g V$. Άρα (απαλείφοντας το g),

$$\rho V_{\varepsilon\kappa} = \rho' V \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{V_{\varepsilon\kappa}}{V} = \frac{\rho'}{\rho}} \tag{8.16}$$

Έτσι, π.χ., αν $\rho' = 3\rho/4$, τότε $V_{\varepsilon\kappa} = 3V/4$. Δηλαδή, το σώμα είναι βυθισμένο κατά τα 3/4 του όγκου του, *ανεξάρτητα από το σχήμα ή τις διαστάσεις του*. Εφαρμόζοντας ιδιότητες των αναλογιών στην (8.16), βρίσκουμε το ποσοστό του όγκου του σώματος που είναι *πάνω* από την επιφάνεια του υγρού:

$$\frac{V - V_{\varepsilon\kappa}}{V} = \frac{\rho - \rho'}{\rho} \tag{8.17}$$

Εφαρμογή: Γιατί ο καπετάνιος του *Τιτανικού* δεν είδε το παγόβουνο; Η πυκνότητα του πάγου είναι $\rho'=0.92 gr/cm^3$, ενώ αυτή του θαλασσινού νερού είναι $\rho=1.03 gr/cm^3$. Αντικαθιστώντας τα δεδομένα αυτά στη σχέση (8.17), βρίσκουμε ότι μόνο το 10.68% του ολικού όγκου του παγόβουνου ήταν ορατό πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.

Θα μπορούσατε να παρατηρήσετε ότι η σχέση $A=W$ που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, εξασφαλίζει μόνο τη *μεταφορική* αλλά όχι και την *περιστροφική* ισορροπία του σώματος. Τι θα συμβεί αν εκτρέψουμε λίγο το σώμα από την αρχική θέση ισορροπίας του, περιστρέφοντάς το ελαφρά ως προς οριζόντιο άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας του; Αν το σώμα έχει την τάση να επανέλθει στην αρχική του θέση, η ισορροπία καλείται *ευσταθής*. Αν όμως το σώμα ανατραπεί, η ισορροπία είναι *ασταθής*. Αν το σώμα, τέλος, παραμείνει στη νέα του θέση, η ισορροπία λέγεται *αδιάφορη*.

Όταν το κέντρο βάρους C του σώματος βρίσκεται *κάτω* από το κέντρο άνωσης K (κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού, από το οποίο διέρχεται η άνωση), η ισορροπία είναι *ευσταθής*, διότι, όταν εκτρέπουμε λίγο το σώμα από τη θέση ισορροπίας του, το βάρος $\vec{W}$ και η άνωση $\vec{A}$ δημιουργούν *ζεύγος επαναφοράς* που εξαναγκάζει το σώμα να επιστρέψει στην αρχική του θέση. Αυτό συμβαίνει, π.χ., στους πλωτήρες, που είναι αντικείμενα που επιπλέουν στη θάλασσα και έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε το κέντρο βάρους τους C να βρίσκεται πολύ χαμηλά.

Είναι όμως δυνατό η ισορροπία ενός σώματος που επιπλέει να είναι ευσταθής ακόμα και όταν το κέντρο βάρους C είναι *πάνω* από το κέντρο άνωσης K. Αυτό εξαρτάται από τη θέση τού C ως προς ένα άλλο σημείο M που ονομάζεται *μετάκεντρο*. Το M βρίσκεται ως εξής: Όταν το σώμα ισορροπεί, ο άξονας CK που διέρχεται από τα C και K είναι κατακόρυφος. Θεωρούμε ότι ο άξονας αυτός είναι σταθερά συνδεδεμένος με το σώμα και περιστρέφεται με αυτό. Κατά την εκτροπή του σώματος από τη θέση ισορροπίας του εμφανίζεται ένα *νέο* κέντρο άνωσης K', αφού η γεωμετρία του εκτοπιζόμενου υγρού γενικά αλλάζει. Η άνωση $\vec{A}$ διέρχεται τώρα από το K' . Το μετάκεντρο M είναι το σημείο τομής του φορέα τής $\vec{A}$ με τον άξονα CK. Όπως αποδεικνύεται:

- Αν το C βρίσκεται *κάτω* από το M, η ισορροπία είναι *ευσταθής*.
- Αν το C βρίσκεται *πάνω* από το M, η ισορροπία είναι *ασταθής*.
- Αν το C *συμπίπτει* με το M, η ισορροπία είναι *αδιάφορη*.

Στα πλοία, το κέντρο βάρους C βρίσκεται πάντα ψηλότερα από το κέντρο άνωσης K αλλά, για σχετικά μικρές γωνίες εκτροπής, το C είναι κάτω από το μετάκεντρο M. Έτσι, η ισορροπία των πλοίων είναι ευσταθής. Για γωνίες εκτροπής μεγαλύτερες από μια οριακή τιμή, το M είναι δυνατό να βρεθεί κάτω από το C, οπότε αναπτύσσεται ζεύγος ανατροπής.

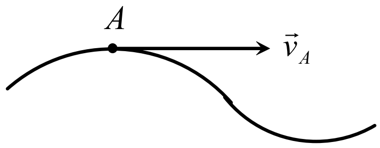
Στα υποβρύχια το μετάκεντρο M συμπίπτει με το *σταθερό* κέντρο άνωσης K. Έτσι, η ισορροπία ενός υποβρυχίου θα είναι ευσταθής όταν το κέντρο βάρους του, C, βρίσκεται *κάτω* από το K. Τούτο εξασφαλίζεται κατά την κατάδυση με εισροή θαλασσινού νερού σε κατάλληλες δεξαμενές. Οι δεξαμενές αυτές αδειάζουν κατά την ανάδυση του υποβρυχίου.

8.10 Φλέβες Ροής

Έχοντας μελετήσει τα ρευστά σε ισορροπία, περνάμε τώρα στα ρευστά σε κίνηση. Γενικά, η κίνηση ενός ρευστού καλείται *ροή*. Η μελέτη μιας πραγματικής ροής είναι συχνά μια εξαιρετικά περίπλοκη υπόθεση, γι' αυτό θα καταφύγουμε και πάλι σε κάποιες απλουστευτικές εξιδανικεύσεις. Ορίζουμε λοιπόν ως *ιδανική ροή* μια ροή με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

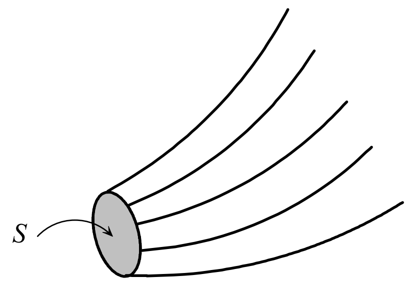
1. Το ρευστό είναι ένα ιδανικό υγρό, δηλαδή ασυμπίεστο και χωρίς εσωτερικές τριβές.
2. Η ροή είναι *στρωτή* ή *μόνιμη*. Τούτο σημαίνει ότι η ταχύτητα $\vec{v}$ του ρευστού είναι *χρονικά* σταθερή σε κάθε σημείο της ροής. (Η ταχύτητα ροής μπορεί, όμως, να μεταβάλλεται από ένα σημείο σε ένα άλλο.)
3. Η ροή είναι *αστρόβιλη*. Αυτό μπορούμε να το κατανοήσουμε ως εξής: Φανταστείτε το ρευστό σαν ένα τεράστιο πλήθος από «σωματίδια» (στοιχειώδεις όγκους) που κινούνται στη φορά της ροής. Τότε, σε κάθε σημείο της ροής, το διερχόμενο σωματίδιο δεν έχει στροφορμή ως προς το σημείο αυτό (εκτελεί μόνο μεταφορική και όχι περιστροφική κίνηση).

Η τροχιά ενός σωματιδίου του ρευστού αποτελεί μια *ρευματική γραμμή*. Σε κάθε σημείο μιας ρευματικής γραμμής, η ταχύτητα ροής (δηλαδή, η ταχύτητα του διερχόμενου σωματιδίου του ρευστού) είναι διάνυσμα *εφαπτόμενο* στη γραμμή:



Στη στρωτή ροή, κάθε σωματίδιο που διέρχεται από ένα σημείο A ακολουθεί πάντα την ίδια ρευματική γραμμή (διαφορετικά, η ταχύτητα ροής $\vec{v}_A$ στο σημείο αυτό δεν θα ήταν χρονικά σταθερή, αφού θα άλλαζε η κατεύθυνσή της). Τούτο σημαίνει ότι *οι ρευματικές γραμμές δεν τέμνονται*. (Τι σας θυμίζει αυτό από τον Ηλεκτρισμό; Τι παίζει εκεί τον ίδιο ρόλο που παίζει εδώ η ταχύτητα ροής;)

Ένας μεγάλος αριθμός ρευματικών γραμμών που σχηματίζουν δέσμη σωληνοειδούς σχήματος, αποτελούν μια *φλέβα ροής* (ονομάζεται και *σωλήνας ροής*):



Φανταστείτε μια επιφάνεια S κάθετη στις ρευματικές γραμμές της ροής. Το σύνολο των ρευματικών γραμμών που διέρχονται από το εσωτερικό και την περιφέρεια της S

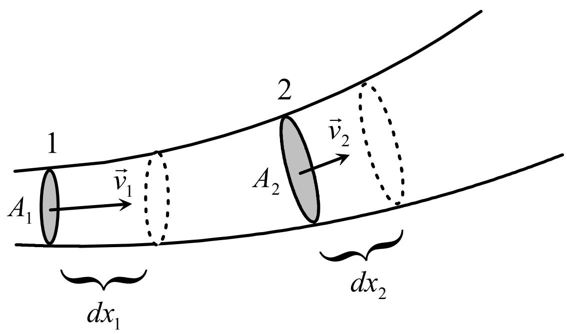
συνθέτουν αυτό που ονομάσαμε φλέβα ροής. Ειδικά, οι ρευματικές γραμμές που διέρχονται από την περιφέρεια της S αποτελούν την *επιφάνεια* της φλέβας.

Μια φλέβα συμπεριφέρεται σαν να είναι πραγματικός σωλήνας με αδιαπέραστα τοιχώματα. Πράγματι: Ένα σωματίδιο του ρευστού που δεν βρίσκεται στην επιφάνεια της φλέβας είναι αδύνατο να διαπεράσει την επιφάνεια, αφού, αν συνέβαινε αυτό, η ρευματική γραμμή του σωματιδίου θα έτεμνε μια ρευματική γραμμή της επιφάνειας. Στην πράξη, βέβαια, οι φλέβες ροής που παρατηρούμε περιβάλλονται από φυσικά τοιχώματα όπως, π.χ., ένα λάστιχο ποτίσματος ή ένας σωλήνας ύδρευσης.

8.11 Νόμος Συνεχείας

Ο νόμος αυτός είναι άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων της ιδανικής ροής, και αποτελεί την πρώτη θεμελιώδη αρχή της Υδροδυναμικής:

Θεωρούμε μια φλέβα ροής και δύο κάθετες τομές σε αυτή στα σημεία 1 και 2, με εμβαδά διατομής A_1 και A_2 , αντίστοιχα. (Ως κάθετη τομή σε κάποιο σημείο μιας φλέβας εννοούμε μια τομή της φλέβας με ένα επίπεδο κάθετο στην ταχύτητα ροής, ή στην κεντρική ρευματική γραμμή, στο σημείο αυτό.) Οι ταχύτητες ροής $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ στα σημεία 1 και 2 είναι κάθετες στις αντίστοιχες διατομές A_1 και A_2 :



Έστω ότι, μέσα σε χρόνο dt, τα σωματίδια του υγρού που διέρχονται από τη διατομή A_1 προχωρούν κατά απόσταση dx_1, ενώ αυτά που διέρχονται από την A_2 προχωρούν κατά dx_2 . Έτσι, στο διάστημα dt, από τις δύο διατομές περνούν όγκοι υγρού ίσοι με

$$dV_1 = A_1\, dx_1 \quad , \quad dV_2 = A_2\, dx_2 \ .$$

Όμως, λόγω του ότι το υγρό είναι ασυμπίεστο και τα τοιχώματα της φλέβας είναι αδιαπέραστα, ο όγκος του υγρού που διέρχεται από μια διατομή θα είναι ίσος με τον όγκο που διέρχεται από κάθε άλλη διατομή μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα. Έτσι,

$$dV_1 = dV_2 \ .$$

Επιπλέον, αν v_1 και v_2 είναι τα μέτρα των ταχυτήτων ροής στις δύο διατομές, τότε

$$dx_1 = v_1\, dt \quad , \quad dx_2 = v_2\, dt \ .$$

Έτσι, έχουμε:

$$A_1 v_1\, dt = A_2 v_2\, dt \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2} \qquad (8.18)$$

Επειδή τα σημεία 1 και 2 της φλέβας επιλέχθηκαν τυχαία, η σχέση (8.18) διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\boxed{A \cdot v = \textit{σταθερό κατά μήκος της φλέβας}} \tag{8.19}$$

Οι (8.18) και (8.19) εκφράζουν το *νόμο συνεχείας* για μια φλέβα ροής. Προσέξτε ότι η απόδειξη του νόμου βασίστηκε στην ιδιότητα που έχουν τα τοιχώματα της φλέβας να είναι αδιαπέραστα, πράγμα που καθιστά αδύνατο σε μια ποσότητα υγρού στο εξωτερικό της φλέβας να εισέλθει σε αυτήν, όπως και σε μια ποσότητα υγρού στο εσωτερικό της φλέβας να εξέλθει από αυτήν. Έτσι, η ποσότητα του διερχόμενου υγρού ανά μονάδα χρόνου πρέπει να είναι ίδια για όλες τις διατομές της φλέβας.

Το γινόμενο $A\,v$ έχει μια ιδιαίτερη φυσική σημασία, αν προσέξουμε ότι

$$A\,v = A\,\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

όπου dV είναι ο όγκος του υγρού που διέρχεται από τη διατομή A σε χρόνο dt. Έτσι, το γινόμενο $A\,v$ παριστά τον *όγκο υγρού ανά μονάδα χρόνου* που διέρχεται από τη διατομή A, και ονομάζεται *παροχή* της φλέβας:

$$\Pi = A\,v = \frac{dV}{dt} = \textit{παροχή} \tag{8.20}$$

Σύμφωνα με το νόμο συνεχείας (8.19),

η παροχή μιας φλέβας είναι σταθερή κατά μήκος της φλέβας.

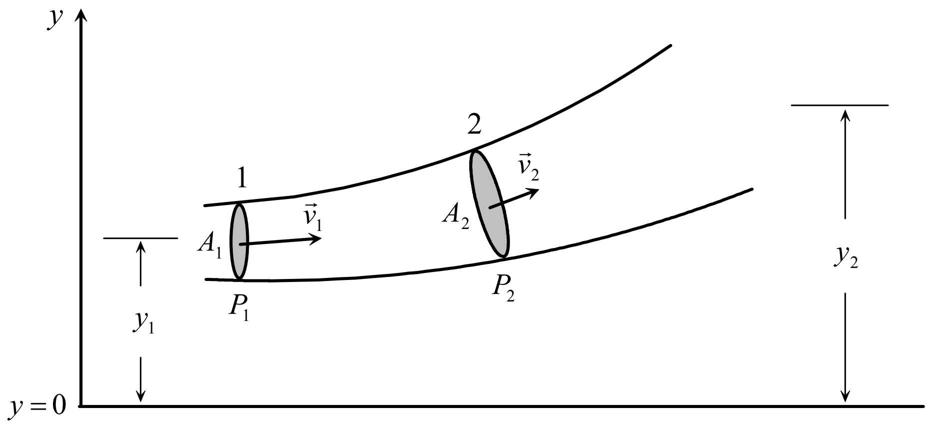
Δηλαδή, ο ίδιος όγκος υγρού ανά μονάδα χρόνου διέρχεται από κάθε διατομή της φλέβας, σε συμφωνία και με την παρατήρηση που κάναμε νωρίτερα.

Όταν ανοίγουμε τη βρύση, αυτό που ρυθμίζουμε με τη στρόφιγγα είναι η παροχή εκροής του νερού. Αν συνδέσουμε τη βρύση με ένα λάστιχο ποτίσματος, η ίδια αυτή παροχή θα εξέλθει από το στόμιο του λάστιχου. Όταν θέλουμε να στείλουμε το νερό πιο μακριά, καλύπτουμε με το δάχτυλό μας ένα μέρος του στομίου ώστε να ελαττώσουμε το εμβαδόν διατομής του. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να αυξηθεί η ταχύτητα εκροής του νερού, σύμφωνα με το νόμο συνεχείας.

8.12 Νόμος του Bernoulli

Ο νόμος αυτός, τον οποίο θα αποδείξουμε στο Παράρτημα Δ, δεν αποτελεί μια νέα, ανεξάρτητη αρχή της Μηχανικής: είναι απλά η έκφραση της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για ένα ρευστό (εδώ, ένα υγρό). Πιο συγκεκριμένα, είναι το ανάλογο της σχέσης (6.28) για την περίπτωση όπου το μηχανικό σύστημα αποτελείται από τα «σωματίδια» ενός ρευστού μέσου.

Θεωρούμε μια φλέβα ροής ενός υγρού πυκνότητας ρ, και δύο διατομές εμβαδών A_1 και A_2 στα σημεία 1 και 2 της φλέβας. Οι ταχύτητες ροής, μέτρων v_1 και v_2, είναι κάθετες στις αντίστοιχες διατομές. Καλούμε P_1, P_2 τις υδροστατικές πιέσεις στις δύο διατομές, και y_1, y_2 τα ύψη στα οποία βρίσκονται τα κέντρα των διατομών πάνω από ένα αυθαίρετο επίπεδο αναφοράς:



Για να κατανοήσουμε το πώς ακριβώς ορίζονται οι πιέσεις P_1 και P_2 , θεωρούμε το τμήμα της φλέβας που εκτείνεται από το σημείο 1 ως το σημείο 2. Το τμήμα αυτό οριοθετείται από τις διατομές A_1 και A_2. Υποθέτοντας, έστω προσεγγιστικά, ότι η υδροστατική πίεση έχει σταθερή τιμή πάνω σε κάθε διατομή, γράφουμε

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} \quad , \quad P_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

όπου F_1, F_2 οι δυνάμεις που ασκούνται κάθετα στις διατομές A_1, A_2 από το ρευστό που περιβάλλει το θεωρούμενο τμήμα της φλέβας. (Οι δυνάμεις είναι κάθετες στις διατομές, αφού οι τελευταίες κινούνται πάντα κάθετα προς τον εαυτό τους.)

Σύμφωνα τώρα με το *νόμο του Bernoulli*, για κάθε δύο σημεία 1 και 2 της φλέβας ισχύει ότι

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2} \qquad (8.21)$$

ή, πιο γενικά,

$$\boxed{P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \textit{σταθερό κατά μήκος της φλέβας}} \qquad (8.22)$$

Αν εξαιρέσουμε την παρουσία της πίεσης P, το αριστερό μέλος τής (8.22) θυμίζει ολική μηχανική ενέργεια στο πεδίο βαρύτητας, μόνο που στη θέση της μάζας m έχουμε την πυκνότητα ρ του ρευστού. Το P εδώ σχετίζεται με το έργο που απαιτείται για να μεταβληθεί αυτή η ενέργεια, σύμφωνα με τη σχέση (6.28). Πιο συγκεκριμένα, εκτός από τη συντηρητική δύναμη της βαρύτητας, στο θεωρούμενο τμήμα της φλέβας ασκούνται και οι πιεστικές δυνάμεις F_1, F_2 από το περιβάλλον ρευστό. Το έργο των δυνάμεων αυτών αντιπροσωπεύει ο όρος P στο νόμο του Bernoulli, και είναι αυτό το έργο που ευθύνεται για τη μεταβολή της ολικής μηχανικής ενέργειας του θεωρούμενου τμήματος (περισσότερες λεπτομέρειες στο Παράρτημα Δ).

Στο όριο που η ταχύτητα της ροής τείνει στο μηδέν, οι νόμοι της Υδροδυναμικής θα πρέπει να ανάγονται σε αυτούς της Υδροστατικής. Για ένα ακίνητο ρευστό έχουμε ότι $v_1=v_2=0$, για δύο τυχαίες διατομές A_1, A_2 του δοχείου που το περιέχει. Ο νόμος συνεχείας (8.18), τότε, ανάγεται σε μια τετριμμένη ισότητα της μορφής 0=0, ενώ ο νόμος του Bernoulli (8.21) δίνει

$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \tag{8.23}$$

Η σχέση αυτή δεν είναι άλλη από τη θεμελιώδη εξίσωση (8.6) της Υδροστατικής.

8.13 Οριζόντια Ροή

Μια φλέβα ροής καλείται οριζόντια αν ο άξονάς της (ή, η κεντρική ρευματική γραμμή της) κείται σε οριζόντιο επίπεδο. Προσέξτε ότι ο άξονας αυτός δεν είναι απαραίτητα ευθύγραμμος. Για παράδειγμα, η ροή νερού μέσα σε ένα λάστιχο ποτίσματος καμπύλου σχήματος, το οποίο ακουμπά ολόκληρο στο δάπεδο, συνιστά οριζόντια φλέβα.

Όλες οι διατομές μιας οριζόντιας φλέβας βρίσκονται στο ίδιο ύψος y πάνω από το επίπεδο αναφοράς. Θέτοντας $y_1=y_2$ στο νόμο του Bernoulli (8.21), οι όροι που περιέχουν τα ύψη απαλείφονται και ο νόμος παίρνει τη μορφή

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{8.24}$$

ή

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \tag{8.25}$$

Στην οριακή περίπτωση που το ρευστό είναι σε ισορροπία ($v=0$), η (8.25) μας λέει ότι $P = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$ κατά μήκος μιας οριζόντιας διαδρομής. Αυτό, βέβαια, μας είναι γνωστό από την Υδροστατική. Κάτω από ποιες προϋποθέσεις, τώρα, ισχύει στην Υδροδυναμική ($v \neq 0$) η υπόθεση ότι η πίεση P κατά μήκος μιας οριζόντιας φλέβας είναι σταθερή; Σύμφωνα με την (8.25), αυτό συμβαίνει όταν $v=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$ κατά μήκος της φλέβας. Όμως, από το νόμο συνεχείας, $A\,v = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$ κατά μήκος της φλέβας, όπου A η διατομή της φλέβας. Έτσι, θα πρέπει να ισχύει ότι $A = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$:

> *Η υδροστατική πίεση είναι σταθερή κατά μήκος μιας οριζόντιας φλέβας με σταθερή διατομή.*

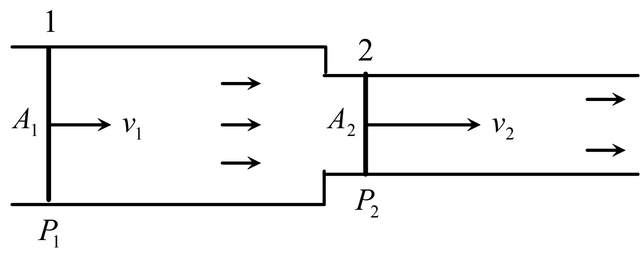
Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, όταν έχουμε ροή νερού μέσα σε ένα λάστιχο ποτίσματος τοποθετημένο ολόκληρο πάνω σε οριζόντια επιφάνεια.

Σε ποιο σημείο μιας οριζόντιας φλέβας είναι η πίεση μέγιστη (ή ελάχιστη); Σύμφωνα με την (8.25), η πίεση P είναι μέγιστη εκεί όπου η ταχύτητα v είναι ελάχιστη. Αυτό όμως, κατά το νόμο συνεχείας, συμβαίνει εκεί όπου η διατομή A είναι μέγιστη:

> *Σε οριζόντια ροή, η πίεση είναι μέγιστη (ελάχιστη) εκεί όπου η διατομή της φλέβας είναι μέγιστη (ελάχιστη).*

Έτσι, στα σημεία όπου ένας οριζόντιος σωλήνας ύδρευσης στενεύει, η πίεση του νερού ελαττώνεται.

Θεωρούμε τώρα έναν οριζόντιο σωλήνα μεταβλητής διατομής A και δύο σημεία του, 1 και 2. Έστω A_1 και A_2 οι διατομές του σωλήνα στα σημεία αυτά, όπου $A_1>A_2$. Μέσα στο σωλήνα ρέει υγρό πυκνότητας ρ. Η διαφορά πιέσεων ($P_1 - P_2$) στα δύο σημεία μετρήθηκε και βρέθηκε ίση με ΔP. Ποια είναι η παροχή της οριζόντιας φλέβας ;



Καλούμε v_1 και v_2 τις ταχύτητες ροής στα δύο σημεία της φλέβας. Οι βασικές μας εξισώσεις είναι

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \text{(νόμος συνεχείας)}$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad \text{(νόμος Bernoulli)}$$

Με το νόμο συνεχείας μπορούμε να απαλείψουμε, π.χ., το v_2, γράφοντας

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \tag{8.26}$$

Αντικαθιστώντας την (8.26) στο νόμο του Bernoulli, βρίσκουμε

$$P_1 - P_2 \equiv \Delta P = \frac{\rho (A_1^2 - A_2^2)}{2 A_2^2} v_1^2 \tag{8.27}$$

Παρατηρούμε ότι $P_1>P_2$, δοθέντος ότι $A_1>A_2$. Λύνοντας την (8.27) ως προς v_1 , και χρησιμοποιώντας την (8.26) για το v_2 , έχουμε

$$v_1 = A_2 \left[\frac{2\Delta P}{\rho (A_1^2 - A_2^2)} \right]^{1/2}, \quad v_2 = A_1 \left[\frac{2\Delta P}{\rho (A_1^2 - A_2^2)} \right]^{1/2} \tag{8.28}$$

Η παροχή της φλέβας είναι

$$\Pi = A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_1 A_2 \left[\frac{2\Delta P}{\rho (A_1^2 - A_2^2)} \right]^{1/2} \tag{8.29}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Α. Σύνθεση Δυνάμεων που Δρουν στο Χώρο

Θεωρούμε ένα σύστημα δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, οι οποίες δρουν σε διάφορα σημεία του χώρου. Τα σημεία αυτά έχουν αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots$, ως προς ένα σταθερό σημείο *O*, το οποίο επιλέγεται σαν αρχή των συντεταγμένων (x, y, z). Οι δυνάμεις μπορεί να δρουν, π.χ., σε διάφορα σωματίδια ενός συστήματος σωματιδίων, ή σε διάφορα σημεία ενός στερεού σώματος. Τίθεται το εξής ερώτημα: Κάτω από ποιες προϋποθέσεις είναι δυνατό να αντικατασταθεί το σύνολο των δυνάμεων αυτών από μία και μοναδική δύναμη;

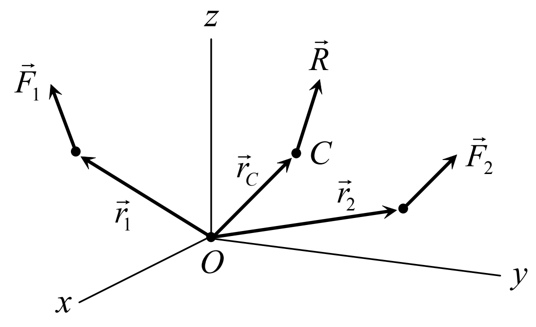
Είναι προφανές ότι αυτή η δύναμη, αν υπάρχει, θα είναι η *συνισταμένη* $\vec{R}$ των δυνάμεων:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots = \sum_i \vec{F}_i \qquad \text{(A.1)}$$

Το ερώτημα όμως είναι: *πού* ακριβώς θα πρέπει να τοποθετήσουμε την $\vec{R}$; Αν το ερώτημα αυτό επιδέχεται απάντηση, τότε η αντικατάσταση για την οποία μιλάμε είναι εφικτή. Αναγκαία συνθήκη για να συμβεί αυτό είναι η εξής:

> *Η ροπή της ολικής δύναμης $\vec{R}$, ως προς* ***οποιοδήποτε*** *σημείο O του χώρου, θα πρέπει να ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των ροπών των επιμέρους δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, ως προς το O.*

Έστω *C* το σημείο εφαρμογής τής $\vec{R}$, με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_C$ ως προς το O:



Οι ροπές των $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, ως προς *O* είναι

$$\vec{T}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \ , \quad \vec{T}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \ , \ \cdots$$

και η ολική ροπή ως προς *O* είναι

$$\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \cdots = \sum_i \vec{T}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad \text{(A.2)}$$

Επίσης, η ροπή τής $\vec{R}$ ως προς *O* είναι

$$\vec{r}_C \times \vec{R} = \vec{r}_C \times \sum_i \vec{F}_i \ .$$

Έτσι, η αναγκαία συνθήκη που διατυπώσαμε παραπάνω γράφεται

$$\vec{r}_C \times \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{T}_i \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r}_C \times \vec{R} = \vec{T} \qquad \text{(A.3)}$$

Το ζήτημα, λοιπόν, είναι αν η εξίσωση (Α.3) έχει λύση ως προς $\vec{r}_C$ για δοσμένα $\vec{R}$ και $\vec{T}$, για *αυθαίρετη* εκλογή του σημείου αναφοράς *O*.

Μια ειδική περίπτωση είναι όταν όλες οι δυνάμεις $\vec{F}_i$ δρουν στο ίδιο σημείο *A*, το οποίο έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}$. Τότε, $\vec{r}_i = \vec{r}$ για κάθε *i*, και

$$\vec{T} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r} \times \vec{F}_i = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{R} \ .$$

Δηλαδή, η (Α.3) έχει τη λύση $\vec{r}_C = \vec{r}$, που σημαίνει ότι

> *ένα σύστημα δυνάμεων που συντρέχουν στο σημείο A μπορεί να αντικατασταθεί από τη συνισταμένη τους, τοποθετημένη στο ίδιο σημείο A .*

Τα πράγματα όμως δεν είναι τόσο απλά στην περίπτωση των μη-συντρεχουσών δυνάμεων, αφού η (Α.3) είναι δυνατό να μην επιδέχεται λύση ως προς $\vec{r}_C$. Μπορούμε πάντως αμέσως να δούμε δύο *αναγκαίες συνθήκες* για την ύπαρξη λύσης:

1. Η συνισταμένη δύναμη $\vec{R}$ πρέπει να είναι διάφορη του μηδενός ($\vec{R} \neq 0$). Διαφορετικά, η (Α.3) είτε θα είναι αδύνατη ως προς $\vec{r}_C$ (αν $\vec{T} \neq 0$), είτε θα είναι απροσδιόριστη (αν $\vec{T} = 0$). Για παράδειγμα, στην περίπτωση *ζεύγους δυνάμεων* $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ (βλ. Παρ.7.8), το $\vec{r}_C$ δεν ορίζεται, αφού $\vec{R} = 0$ αλλά $\vec{T} \neq 0$, κι έτσι η λύση τής (Α.3) είναι αδύνατη.
2. Η συνισταμένη ροπή $\vec{T}$ πρέπει να είναι κάθετη στη συνισταμένη δύναμη $\vec{R}$. Αυτό προκύπτει άμεσα από την (Α.3) και τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου. Η καθετότητα αυτή πρέπει να υφίσταται ανεξάρτητα από την επιλογή του σημείου αναφοράς *O* των ροπών.

Επιπλέον, παρόλο που το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_C$ εξαρτάται από την εκλογή του σημείου αναφοράς *O*, το σημείο εφαρμογής *C* της συνισταμένης δύναμης $\vec{R}$ θα πρέπει να προσδιορίζεται μονοσήμαντα, ανεξάρτητα από τη θέση τού *O*.

Μια περίπτωση όπου όλες οι παραπάνω συνθήκες πληρούνται είναι αυτή ενός συστήματος *παράλληλων και ομόρροπων* δυνάμεων:

$$\vec{F}_i = F_i \hat{u} \ , \quad i = 1, 2, \cdots \qquad \text{(A.4)}$$

όπου $\hat{u}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση των δυνάμεων, και F_i το μέτρο τής $\vec{F}_i$. Η συνισταμένη δύναμη είναι

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i (F_i \hat{u})$$

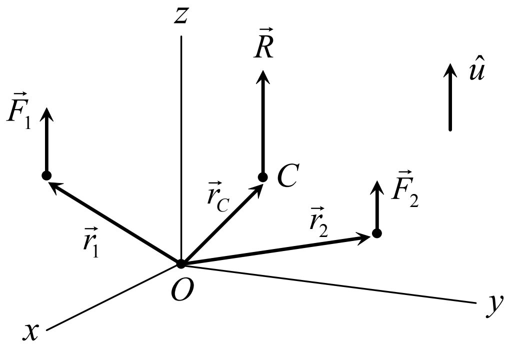
ή, βγάζοντας κοινό παράγοντα το $\hat{u}$,

$$\vec{R} = \left(\sum_i F_i \right) \hat{u} \equiv R\,\hat{u} \tag{A.5}$$

όπου R το μέτρο τής $\vec{R}$. Παρατηρούμε ότι $\vec{R} \neq 0$, άρα πληρούται η αναγκαία συνθήκη (1), και ότι η $\vec{R}$ είναι παράλληλη και ομόρροπη με τις $\vec{F}_i$ και το μέτρο της ισούται με το άθροισμα των μέτρων των $\vec{F}_i$:

$$R = \sum_i F_i = F_1 + F_2 + \cdots \tag{A.6}$$

Έστω τώρα O ένα τυχαίο σημείο του χώρου, το οποίο επιλέγουμε ως αρχή των συντεταγμένων (x, y, z). Έστω $\vec{r}_i$ το διάνυσμα θέσης του σημείου εφαρμογής τής $\vec{F}_i$ ως προς το O :



Η ολική ροπή του συστήματος ως προς O είναι

$$\vec{T} = \sum_i \vec{T}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times F_i\,\hat{u}) = \sum_i (F_i\,\vec{r}_i \times \hat{u}) = \left(\sum_i F_i\,\vec{r}_i \right) \times \hat{u}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε μια ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου:

$$\vec{A} \times \lambda\vec{B} = (\lambda\vec{A}) \times \vec{B}$$

και στη συνέχεια βγάλαμε κοινό παράγοντα το $\hat{u}$. Παρατηρούμε ότι η ολική ροπή $\vec{T}$ είναι κάθετη στο $\hat{u}$, άρα και στην ολική δύναμη $\vec{R}$, σε συμφωνία με την αναγκαία συνθήκη (2).

Έστω C το σημείο εφαρμογής τής $\vec{R}$, και έστω $\vec{r}_C$ το διάνυσμα θέσης του ως προς το O. Για να βρούμε το $\vec{r}_C$, πρέπει να επιλύσουμε την (Α.3) για τα δοσμένα $\vec{R}$ και $\vec{T}$:

$$\vec{r}_C \times \vec{R} = \vec{T} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_C \times R\hat{u} = \vec{T} \quad \Rightarrow$$

$$(R\,\vec{r}_C) \times \hat{u} = \left(\sum_i F_i \vec{r}_i \right) \times \hat{u} \ .$$

Η σχέση αυτή ικανοποιείται αμέσως αν

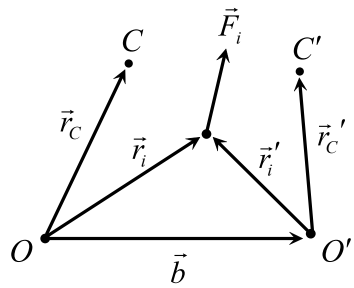
$$R\,\vec{r}_C = \sum_i F_i \vec{r}_i \quad \Rightarrow$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{R}\sum_i F_i \vec{r}_i = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2 + \cdots}{F_1 + F_2 + \cdots} \qquad (A.7)$$

Οι συντεταγμένες του σημείου C, το οποίο καλείται *κέντρο των παράλληλων δυνάμεων*, είναι

$$x_C = \frac{1}{R}\sum_i F_i x_i \ , \quad y_C = \frac{1}{R}\sum_i F_i y_i \ , \quad z_C = \frac{1}{R}\sum_i F_i z_i \qquad (A.8)$$

Παρατηρούμε ότι η θέση τού C δεν εξαρτάται από τη διεύθυνση των παράλληλων δυνάμεων, αφού η (Α.7) δεν εμπεριέχει το $\hat{u}$. Θα πρέπει τώρα να δείξουμε ότι η θέση τού C στο χώρο δεν εξαρτάται και από την εκλογή του σημείου αναφοράς O. Ας υποθέσουμε, εν τούτοις, ότι το σημείο εφαρμογής τής $\vec{R}$ εξαρτάται από την εκλογή του σημείου αναφοράς. Έστω C και C' δύο διαφορετικά σημεία εφαρμογής, που αντιστοιχούν στα σημεία αναφοράς O και O'. Καλούμε $\vec{r}_C$ και $\vec{r}_C{}'$ τα διανύσματα θέσης των C και C' ως προς τα O και O', αντίστοιχα, και καλούμε $\vec{r}_i$ και $\vec{r}_i{}'$ τα διανύσματα θέσης του σημείου εφαρμογής τής $\vec{F}_i$ ως προς O και O'. Για ευκολία, θα συμβολίζουμε με $\vec{b}$ το διάνυσμα $\overrightarrow{OO'}$:



Η (Α.7), εκφρασμένη διαδοχικά ως προς O και O', δίνει

$$\vec{r}_C = \frac{1}{R}\sum_i F_i \vec{r}_i \ , \quad \vec{r}_C{}' = \frac{1}{R}\sum_i F_i \vec{r}_i{}'$$

όπου $\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{b}$. Τώρα, γενικεύοντας λίγο αυτά που εκθέσαμε στην Παρ.1.1 για τον γραφικό υπολογισμό αθροίσματος διανυσμάτων, έχουμε:

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C'} = -\vec{r}_C + \vec{b} + \vec{r}_C{}' \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{CC'} = -\frac{1}{R}\sum_i F_i\vec{r}_i + \vec{b} + \frac{1}{R}\sum_i F_i\vec{r}_i{}' = \vec{b} - \frac{1}{R}\sum_i F_i(\vec{r}_i - \vec{r}_i{}')$$

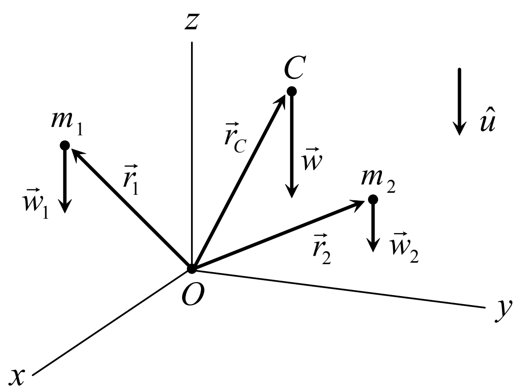
$$= \vec{b} - \frac{1}{R}\sum_i F_i\vec{b} = \vec{b} - \frac{1}{R}\left(\sum_i F_i\right)\vec{b} = \vec{b} - \frac{1}{R}R\vec{b} = 0$$

που σημαίνει ότι τα σημεία C και C' ταυτίζονται. Άρα, το σημείο εφαρμογής της ολικής δύναμης $\vec{R}$ είναι ανεξάρτητο από την εκλογή της αρχής των συντεταγμένων του χώρου μας.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

> *ένα σύστημα παράλληλων και ομόρροπων δυνάμεων ισοδυναμεί με μια μοναδική δύναμη, τη συνισταμένη τους, εφαρμοσμένη στο κέντρο των παράλληλων δυνάμεων.*

Σαν εφαρμογή των παραπάνω, θα ορίσουμε τώρα το *κέντρο βάρους* ενός συστήματος σωματιδίων και θα δείξουμε ότι συμπίπτει με το κέντρο μάζας του συστήματος. Θεωρούμε ένα σύστημα σωματιδίων με μάζες m_1, m_2,..., που βρίσκονται στα σημεία με διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots$, ως προς την αρχή O του συστήματος συντεταγμένων του χώρου μας:



Στα σωματίδια ασκούνται μόνο τα βάρη τους $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \cdots$, που αποτελούν ένα σύστημα παράλληλων και ομόρροπων δυνάμεων:

$$\vec{w}_i = m_i g\,\hat{u} = w_i\,\hat{u} \tag{A.9}$$

όπου $w_i = m_i g$ και όπου $\hat{u}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια της Γης και με κατεύθυνση προς αυτήν. Η ολική δύναμη βαρύτητας στο σύστημα (ολικό βάρος) είναι

$$\vec{w} = \sum_i \vec{w}_i = \sum_i (m_i g\hat{u}) = \left(\sum_i m_i\right) g\hat{u} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{w} = Mg\hat{u} = w\hat{u} \tag{A.10}$$

όπου M η ολική μάζα του συστήματος, και όπου $w=Mg$. Προσέξτε ότι τα $\vec{w}$ και w παίζουν εδώ τους ρόλους των $\vec{R}$ και R, αντίστοιχα, σε σχέση με τις προηγούμενες γενικές εξισώσεις μας.

Το *κέντρο βάρους* του συστήματος είναι το κέντρο C των παράλληλων δυνάμεων $\vec{w}_i$, το σημείο δηλαδή στο οποίο θεωρούμε ότι εφαρμόζεται το ολικό βάρος $\vec{w}$ του συστήματος (το σημείο αυτό δεν συμπίπτει απαραίτητα με τη θέση κάποιου σωματιδίου του συστήματος!). Η θέση τού C ως προς το O βρίσκεται από τη σχέση (Α.7), στην οποία τώρα θέτουμε $F_i = w_i$ και $R = w$:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{w}\sum_i w_i \vec{r}_i = \frac{1}{Mg}\sum_i m_i g \vec{r}_i = \frac{1}{Mg}\, g \sum_i m_i \vec{r}_i \quad \Rightarrow$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \qquad \text{(A.11)}$$

Παρατηρούμε ότι

το κέντρο βάρους του συστήματος συμπίπτει με το κέντρο μάζας του

[βλ. εξίσ.(6.2)]. Όπως δείξαμε προηγουμένως,

η θέση του σημείου αυτού στο χώρο ορίζεται μονοσήμαντα, ανεξάρτητα από την εκλογή της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων μας.

Οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους (ή κέντρου μάζας) του συστήματος είναι

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \;,\quad y_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \;,\quad z_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i \qquad \text{(A.12)}$$

Β. Πίνακας Ροπών Αδρανείας[1]

Συμπαγής κύλινδρος ακτίνας R, ως προς τον άξονά του: $I = \frac{1}{2}MR^2$

Κυλινδρικός φλοιός ακτίνας R, ως προς τον άξονά του: $I = MR^2$

Κυκλικός δίσκος ακτίνας R, ως προς κάθετο άξονα από το κέντρο του: $I = \frac{1}{2}MR^2$

Δαχτυλίδι ακτίνας R, ως προς κάθετο άξονα από το κέντρο του: $I = MR^2$

Συμπαγής σφαίρα ακτίνας R, ως προς άξονα από το κέντρο της: $I = \frac{2}{5}MR^2$

Σφαιρικός φλοιός ακτίνας R, ως προς άξονα από το κέντρο του: $I = \frac{2}{3}MR^2$

Λεπτή ράβδος μήκους l, ως προς κάθετο άξονα από το κέντρο της: $I = \frac{1}{12}Ml^2$

Λεπτή ράβδος μήκους l, ως προς κάθετο άξονα από ένα άκρο της: $I = \frac{1}{3}Ml^2$

[1] Το M παριστά τη μάζα του στερεού σώματος .

Γ. Κύριοι Άξονες Περιστροφής

Ορίζουμε ως *κύριο άξονα περιστροφής* ενός στερεού έναν άξονα με τα εξής χαρακτηριστικά:

- Διέρχεται από το κέντρο μάζας του στερεού.
- Η στροφορμή του στερεού ως προς τα σημεία του άξονα παίρνει την ίδια (διανυσματική) τιμή για όλα τα σημεία του άξονα, και η διεύθυνσή της είναι παράλληλη με τον άξονα.

Σημειώνουμε ότι

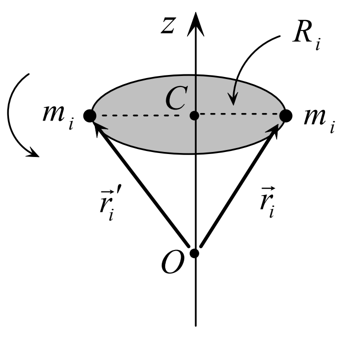
- κάθε άξονας που διέρχεται από το κέντρο μάζας C του στερεού και είναι άξονας συμμετρίας για το σώμα, είναι κύριος άξονας.

Η ολική στροφορμή του σώματος και η ολική εξωτερική ροπή που ασκείται σ' αυτό συνδέονται με τη σχέση

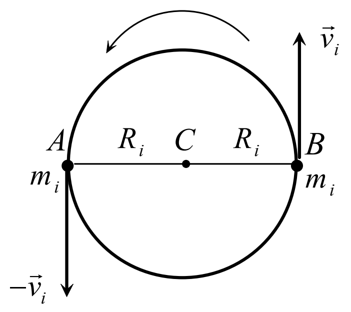
$$\sum \vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (\Gamma.1)$$

η οποία, ως γνωστόν, ισχύει όταν το (κοινό) σημείο αναφοράς των $\vec{L}$ και $\vec{T}$ είναι σταθερό σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ή συμπίπτει με το κέντρο μάζας C του σώματος (έστω κι αν αυτό επιταχύνεται). Στην περίπτωση περιστροφής γύρω από σταθερό κύριο άξονα, το διάνυσμα στο δεξί μέλος τής (Γ.1) είναι στη διεύθυνση του άξονα και δεν εξαρτάται από τη θέση του σημείου O πάνω σε αυτόν. Το ίδιο, λοιπόν, θα πρέπει να ισχύει και για την ολική ροπή $\Sigma\vec{T}$.

Σαν παράδειγμα, ας θεωρήσουμε λεπτό, οριζόντιο, κυκλικό δίσκο που περιστρέφεται γύρω από σταθερό, κατακόρυφο άξονα διερχόμενο από το κέντρο C του δίσκου :



Ο άξονας περιστροφής είναι κύριος άξονας, αφού διέρχεται από το κέντρο μάζας του δίσκου και είναι άξονας συμμετρίας για το δίσκο. Λόγω της συμμετρίας αυτής, για κάθε στοιχειώδη μάζα m_i του δίσκου, κινούμενη με ταχύτητα $\vec{v}_i$, υπάρχει μια ίση, αντιδιαμετρική μάζα που κινείται με αντίθετη ταχύτητα, $-\vec{v}_i$:

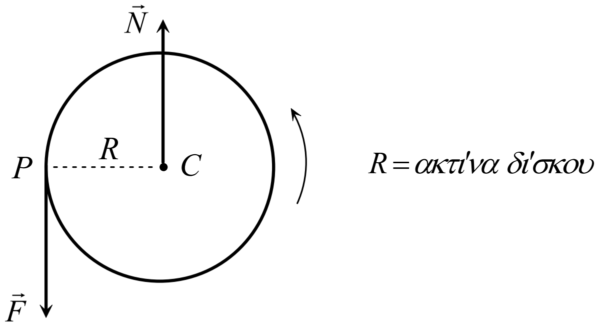


(Ο κατακόρυφος άξονας z είναι κάθετος στη σελίδα, με θετική φορά προς τα *έξω*. Για ευκολία στη σχεδίαση, επιλέξαμε δύο μάζες στην περιφέρεια του δίσκου.) Οι δύο μάζες m_i συνεισφέρουν, αθροιστικά, στην ολική στροφορμή του δίσκου ως προς O μια ποσότητα ίση με

$$\vec{L}_i + \vec{L}_i{}' = m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) + m_i\left[\vec{r}_i{}' \times (-\vec{v}_i)\right] = m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_i{}') \times \vec{v}_i = m_i(\overrightarrow{AB} \times \vec{v}_i)$$

Όπως είναι εύκολο να δούμε, το διάνυσμα αυτό είναι στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής z και δεν εξαρτάται από τη θέση του σημείου O πάνω στον άξονα. Τώρα, η ολική στροφορμή του δίσκου ως προς το O είναι το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών όλων των *ζευγών* αντιδιαμετρικών στοιχειωδών μαζών. Επειδή η στροφορμή κάθε ζεύγους είναι στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και δεν εξαρτάται από τη θέση του σημείου αναφοράς O πάνω στον άξονα, το ίδιο θα ισχύει και για την ολική στροφορμή $\vec{L}$ του δίσκου.

Υποθέτουμε τώρα ότι ασκούμε μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ στο δίσκο (π.χ., τυλίγοντας ένα νήμα στην περιφέρεια του δίσκου και τραβώντας την άκρη του νήματος):



Επειδή ο σταθερός άξονας περιστροφής διέρχεται από το κέντρο μάζας C του δίσκου, το C είναι ακίνητο ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς μας. Συνεπώς, η ολική εξωτερική δύναμη πάνω στο δίσκο πρέπει να είναι μηδέν. Εκτός από την $\vec{F}$ που ασκούμε εμείς, στο δίσκο δρα και η αντίδραση $\vec{N}$ από τον άξονα στο σημείο C. Έτσι,

$$\vec{F} + \vec{N} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{N} = -\vec{F}$$

Παρατηρούμε ότι οι $\vec{F}$ και $\vec{N}$ σχηματίζουν *ζεύγος δυνάμεων*. Όπως είδαμε στην Παρ.7.8, η ροπή ενός ζεύγους ως προς σημείο O, ίση εδώ με την ολική ροπή $\Sigma\vec{T}$ που ασκείται στο δίσκο, ισούται με

$$\sum \vec{T} = \overrightarrow{CP} \times \vec{F}$$

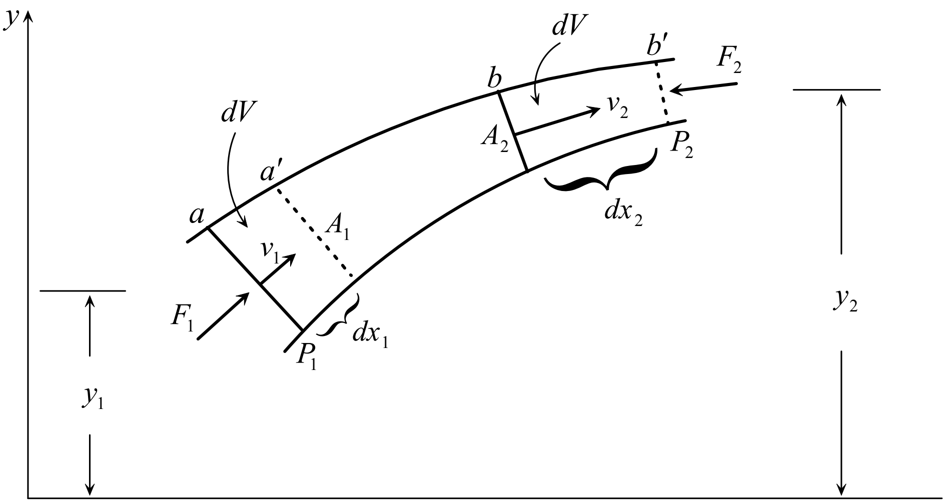
Παρατηρούμε ότι η $\Sigma\vec{T}$ είναι στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και δεν εξαρτάται από τη θέση του σημείου *O* πάνω σε αυτόν, σε συμφωνία με την παρατήρηση που κάναμε νωρίτερα σε σχέση με την εξίσωση (Γ.1).

Συμπέρασμα: Όταν η ολική στροφορμή και η ολική ροπή εκφράζονται ως προς τα σημεία ενός *κύριου* άξονα, τα διανύσματα αυτά

- είναι στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής,
- δεν εξαρτώνται από τη θέση του σημείου αναφοράς *O* πάνω στον άξονα.

Παρατήρηση: Σε προβλήματα με κύλιση, ο κύριος άξονας περιστροφής δεν είναι σταθερός στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς μας, συχνά μάλιστα επιταχύνεται μαζί με το κέντρο μάζας *C*. Εν τούτοις, η σχέση (Γ.1) ισχύει πάντα ως προς το *C*, άρα και ως προς κάθε σημείο του κύριου άξονα. Τα προηγούμενα συμπεράσματά μας, λοιπόν, εξακολουθούν να ισχύουν.

Δ. Απόδειξη του Νόμου του Bernoulli



Θεωρούμε ένα μικρό τμήμα φλέβας που εκτείνεται από a μέχρι b. Έστω A_1 και A_2 οι διατομές της φλέβας στα a και b, αντίστοιχα. Καλούμε v_1, v_2 και P_1, P_2 τις ταχύτητες ροής και τις υδροστατικές πιέσεις, αντίστοιχα, στις διατομές A_1 και A_2. (Οι ταχύτητες είναι κάθετες στις αντίστοιχες διατομές.) Επίσης, καλούμε y_1 και y_2 τα ύψη στα οποία βρίσκονται οι διατομές αυτές (ακριβέστερα, τα κέντρα τους) πάνω από ένα αυθαίρετο επίπεδο αναφοράς.

Κατά την κίνηση του θεωρούμενου τμήματος φλέβας μέσα σε χρονικό διάστημα dt, η διατομή A_1 μετατοπίζεται από το a στο a' κατά $dx_1=v_1dt$, ενώ η διατομή A_2 μετατοπίζεται από το b στο b' κατά $dx_2=v_2dt$. Επειδή το υγρό είναι ασυμπίεστο, ο όγκος του τμήματος μένει σταθερός κατά τη μετακίνησή του. Έτσι, οι όγκοι που περικλείονται μεταξύ a και a', και μεταξύ b και b', είναι ίσοι:

$$A_1 dx_1 = A_2 dx_2 = dV \qquad (\Delta.1)$$

Το ίδιο λοιπόν θα ισχύει και για τις αντίστοιχες μάζες υγρού που περιέχονται σε αυτούς τους δύο όγκους:

$$dm_1 = dm_2 = dm = \rho\, dV \qquad (\Delta.2)$$

όπου ρ η (σταθερή) πυκνότητα του ρευστού.

Έστω F_1, F_2 οι δυνάμεις που ασκούνται κάθετα στις διατομές A_1, A_2 από το υγρό που περιβάλλει το θεωρούμενο τμήμα φλέβας (οι δυνάμεις πρέπει να ασκούνται κάθετα στις διατομές, αφού οι τελευταίες κινούνται πάντα κάθετα προς τον εαυτό τους). Θεωρώντας (έστω προσεγγιστικά) ότι η πίεση έχει την ίδια τιμή σε όλη την έκταση μιας διατομής, μπορούμε να γράψουμε

$$F_1 = P_1 A_1 \ , \quad F_2 = P_2 A_2 \qquad (\Delta.3)$$

Παρατηρούμε ότι η F_1 έχει φορά σύμφωνη με τη μετατόπιση του τμήματος, ενώ η φορά τής F_2 είναι αντίθετη στη μετατόπιση. Αυτό σημαίνει ότι η F_1 *παράγει* έργο (το έργο της είναι θετικό), ενώ η F_2 *καταναλώνει* έργο (το έργο της είναι αρνητικό). Το συνολικό έργο των δυνάμεων F_1 και F_2 κατά τη στοιχειώδη μετατόπιση του τμήματος *ab* της φλέβας σε χρόνο *dt*, είναι

$$W = F_1 dx_1 - F_2 dx_2 = P_1 A_1 dx_1 - P_2 A_2 dx_2 \quad \Rightarrow$$

$$W = (P_1 - P_2)\,dV \qquad (\Delta.4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις (Δ.3) και (Δ.1).

Σύμφωνα με τα συμπεράσματα της Παρ.6.5, γενικευμένα εδώ για την περίπτωση ενός συνεχούς μέσου, το έργο W των μη-συντηρητικών δυνάμεων F_1 και F_2 (εξωτερικών ως προς το τμήμα *ab*) ισούται με τη μεταβολή του αθροίσματος κινητικής και δυναμικής ενέργειας του τμήματος κατά τη μετατόπισή του:

$$W = \Delta(E_k + E_p) = \Delta E_k + \Delta E_p \qquad (\Delta.5)$$

Έχουμε:

$$\Delta E_k = (E_k)_{a'b'} - (E_k)_{ab} = (E_k)_{bb'} - (E_k)_{aa'} \qquad (\Delta.6)$$

(Επειδή η ροή είναι στρωτή, η $(E_k)_{a'b}$, για σταθερά a' και b, είναι χρονικά σταθερή, κι έτσι απαλείφεται κατά την αφαίρεση.) Τώρα, με χρήση και της (Δ.2), η (Δ.6) γράφεται

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(dm)v_2^2 - \frac{1}{2}(dm)v_1^2 = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)\,dm \quad \Rightarrow$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)\,dV \qquad (\Delta.7)$$

Με ανάλογο συλλογισμό,

$$\Delta E_p = (E_p)_{bb'} - (E_p)_{aa'} = (dm)g\,y_2 - (dm)g\,y_1 = (dm)g\,(y_2 - y_1) \quad \Rightarrow$$

$$\Delta E_p = \rho g\,(y_2 - y_1)\,dV \qquad (\Delta.8)$$

Αντικαθιστώντας τις (Δ.4), (Δ.7) και (Δ.8) στην (Δ.5), και απαλείφοντας το *dV*, βρίσκουμε

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g\,(y_2 - y_1) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το νόμο του Bernoulli για ιδανική ροή.

Π Ρ Ο Β Λ Η Μ Α Τ Α

1. *Η θέση ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος του άξονα x, δίνεται σαν συνάρτηση του χρόνου από την εξίσωση* $x=2t^3-3t^2+6t-5$ *, όπου το x εκφράζεται σε μέτρα και το t σε δευτερόλεπτα. Βρείτε (α) την κατεύθυνση της κίνησης για όλες τις χρονικές στιγμές, και (β) τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η κίνηση είναι επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη. Σταματάει ποτέ το σωματίδιο να κινείται;*

Λύση: Οι αλγεβρικές τιμές της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σωματιδίου είναι

$$v=\frac{dx}{dt}=6(t^2-t+1)\ , \quad a=\frac{dv}{dt}=6(2t-1)\ .$$

Έτσι,

$$va=36(t^2-t+1)(2t-1)\ .$$

Παρατηρούμε ότι $t^2-t+1>0$, για κάθε τιμή τού t. Άρα, $v>0$ για κάθε t, που σημαίνει ότι το σωματίδιο κινείται πάντα στη θετική κατεύθυνση του άξονα x, χωρίς ποτέ να σταματάει. Επίσης, είναι εύκολο να δούμε ότι $va>0$ όταν $t>0.5$, ενώ $va<0$ όταν $t<0.5$. Άρα (βλ. Παρ.2.4), η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη για $t<0.5s$ και επιταχυνόμενη για $t>0.5s$.

2. *Ένα σωματίδιο κινείται στον άξονα x, έχοντας ξεκινήσει τη χρονική στιγμή t=0 από το σημείο x=0 με αρχική ταχύτητα* $v=v_0$ *. Βρείτε την ταχύτητα v και τη θέση x του σωματιδίου σαν συναρτήσεις του χρόνου, καθώς και την ταχύτητα σαν συνάρτηση της θέσης x, όταν η επιτάχυνση του σωματιδίου δίνεται, σαν συνάρτηση της ταχύτητας, από τις εκφράσεις (α)* $a=-kv$ *, (β)* $a=-kv^2$*, όπου k μια θετική σταθερά.*

Λύση: (α) Έστω $a=-kv$:

$$\frac{dv}{dt}=-kv \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v}=-kdt \;\Rightarrow\; \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=-k\int_0^t dt \;\Rightarrow\; \ln\left(\frac{v}{v_0}\right)=-kt \;\Rightarrow$$

$$\frac{v}{v_0}=e^{-kt} \;\Rightarrow\; v=v_0e^{-kt} \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt}=v_0e^{-kt} \;\Rightarrow\; dx=v_0e^{-kt}dt \;\Rightarrow\; \int_0^x dx=v_0\int_0^t e^{-kt}dt \;\Rightarrow\; x=\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt}) \quad (2)$$

Απαλείφοντας το e^{-kt} από τις (1) και (2), βρίσκουμε: $v=v_0-kx$ (3)

Εναλλακτικά, έχουμε ότι $dv=adt$, $dx=vdt$, και διαιρώντας κατά μέλη,

$$\frac{dv}{dx}=\frac{a}{v}=-k \;\Rightarrow\; dv=-kdx \;\Rightarrow\; \int_{v_0}^{v}dv=-k\int_0^x dx \;\Rightarrow\; v-v_0=-kx \;\Rightarrow (3)$$

(β) Έστω $a=-kv^2$. Δουλεύοντας με όμοιο τρόπο, δείξτε ότι

$$v=\frac{v_0}{1+kv_0t} \quad , \quad x=\frac{1}{k}\ln(1+kv_0t)\ , \quad v=v_0e^{-kx}\ .$$

3. *Ένα σώμα κινείται στον άξονα x με επιτάχυνση a=(4x-2)m/s ^{2}, όπου x η στιγμιαία θέση του κινητού. Η αρχική ταχύτητά του είναι v_0=10m/s στη θέση x_0=0. Βρείτε την ταχύτητα v του σώματος σαν συνάρτηση της θέσης x.*

Λύση: Επειδή το *a* δίνεται σαν συνάρτηση του *x*, χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.5):

$$v^2 = v_0{}^2 + 2\int_{x_0}^{x} a\,dx = 10^2 + 2\int_0^x (4x-2)dx \;\;\Rightarrow\;\; v^2 = 4(x^2 - x + 25)\;.$$

Παρατηρούμε ότι $x^2 - x+25>0$, για κάθε τιμή τού *x*. Έτσι, $v = \pm 2(x^2 - x + 25)^{1/2}$. Απορρίπτουμε το αρνητικό πρόσημο γιατί μας δίνει $v_0 = -10$ για *x*=0, αντίθετα με την υπόθεση του προβλήματος. Άρα, τελικά,

$$v = 2\,(x^2 - x+ 25)^{1/2}\;\; m/s\;.$$

4. *Ένα σωματίδιο κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου. Η θέση του τη χρονική στιγμή t δίνεται από την εξίσωση $s=t^3+2t^2$, όπου το s μετριέται σε μέτρα πάνω στην περιφέρεια και το t μετριέται σε δευτερόλεπτα. Το μέτρο της επιτάχυνσης του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t=2s είναι $a=16\sqrt{2}$ m/s ^{2}. Βρείτε την ακτίνα R του κύκλου.*

Λύση: Το μέτρο της ταχύτητας είναι $\quad v = \dfrac{ds}{dt} = 3t^2 + 4t$.

Γνωρίζουμε ότι $\quad a^2 = a_T{}^2 + a_N{}^2 = \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2$.

Έτσι, $\quad a^2 = (6t+4)^2 + \dfrac{(3t^2+4t)^4}{R^2}$.

Θέτοντας t=2 και $a=16\sqrt{2}$, και λύνοντας ως προς *R*, βρίσκουμε *R*=25*m* .

5. *Ένα σωματίδιο κινείται στο επίπεδο xy. Οι συντεταγμένες του, x και y, δίνονται σαν συναρτήσεις του χρόνου t από τις εξισώσεις $x= t^2$, $y= (t-1)^2$. Βρείτε:*
(α) Την εξίσωση της τροχιάς, στη μορφή F(x,y)= σταθερό.
(β) Τις συνιστώσες a_T και a_N της επιτάχυνσης, για κάθε χρονική στιγμή t.
(γ) Την ακτίνα καμπυλότητας ρ για κάθε t.

Λύση: (α) Παρατηρώντας ότι $x\geq 0$, $y\geq 0$, και υποθέτοντας ότι $t \geq 1$, γράφουμε: $\sqrt{x} = t$, $\sqrt{y} = t-1$. Απαλείφοντας το *t*, βρίσκουμε: $F(x,y) \equiv \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$.

(β) Έχουμε ότι

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2t\;,\;\; v_y = \frac{dy}{dt} = 2(t-1)\;,\;\; a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2\;,\;\; a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2\;.$$

Αν $|\vec{v}| = v$ και $|\vec{a}| = a$,

$$a^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 = 8\;,\quad v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 = 8t^2 - 8t + 4\;.$$

Άρα, $\quad v = 2(2t^2 - 2t + 1)^{1/2}$.

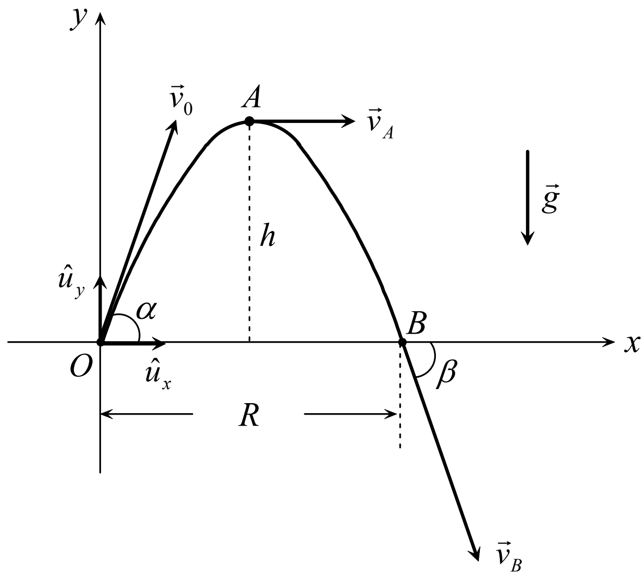
Τότε, $a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{4t-2}{(2t^2-2t+1)^{1/2}}$.

Για το a_N δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας τη σχέση $a_N = v^2/\rho$, αφού δεν γνωρίζουμε ακόμα το ρ. Όμως,

$$a_T^{\ 2} + a_N^{\ 2} = a^2 = 8 \;\Rightarrow\; a_N^{\ 2} = 8 - a_T^{\ 2} = \frac{4}{2t^2-2t+1} \;\Rightarrow\; a_N = \frac{2}{(2t^2-2t+1)^{1/2}} \ .$$

(γ) $a_N = \dfrac{v^2}{\rho} \;\Rightarrow\; \rho = \dfrac{v^2}{a_N} = 2(2t^2-2t+1)^{3/2}$.

6. *Να μελετηθεί η κίνηση ενός βλήματος (βλ. σχήμα). Βρείτε:*
(α) Το χρόνο t_A για να φτάσει στο πιο ψηλό σημείο Α της τροχιάς.
(β) Το μέγιστο ύψος h.
(γ) Τη χρονική στιγμή t_B που επιστρέφει στο έδαφος, στο σημείο Β.
(δ) Την ολική οριζόντια απόσταση R=OB. Δείξτε ότι είναι μέγιστη όταν η γωνία α είναι ίση με 45^o .
(ε) Δείξτε ότι η ταχύτητα στο Β είναι ίση κατά μέτρο με την αρχική ταχύτητα στο Ο, και ότι οι γωνίες α και β είναι ίσες.
(ζ) Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς, στη μορφή y=f(x).



Λύση: Το βλήμα εκτελεί κίνηση με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{u}_y$. Άρα, η κίνηση γίνεται σε σταθερό επίπεδο κάθετο στην επιφάνεια της Γης, στο οποίο ανήκει το διάνυσμα της αρχικής ταχύτητας $\vec{v}_0$. (Βλ. Παρ.2.5. Υποθέτουμε ότι το βλήμα ξεκινάει από το *O* τη χρονική στιγμή *t*=0, με ταχύτητα $\vec{v}_0$.) Έστω τυχαίο σημείο της τροχιάς με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, και έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του βλήματος στο σημείο αυτό. Τα $\vec{r}$ και $\vec{v}$ δίνονται σαν συναρτήσεις του χρόνου από τις σχέσεις

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \ , \quad \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

ή, αναλύοντας σε συνιστώσες,

$$v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y = (v_{0x} \hat{u}_x + v_{0y} \hat{u}_y) - g t \hat{u}_y \ ,$$

$$x \hat{u}_x + y \hat{u}_y = (v_{0x} \hat{u}_x + v_{0y} \hat{u}_y) t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{u}_y \ .$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των $\hat{u}_x$ και $\hat{u}_y$ στα δύο μέλη κάθε εξίσωσης, βρίσκουμε τις εξισώσεις κίνησης του βλήματος στο επίπεδο *xy*:

$$v_x = v_{0x} = \sigma\tau\alpha\theta. \ , \qquad v_y = v_{0y} - gt$$

$$x = v_{0x} t \ , \qquad y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

όπου

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \ , \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha \qquad (v_0 = |\vec{v}_0|) \ .$$

(Προσέξτε ότι η κίνηση είναι ομαλή στην οριζόντια διεύθυνση και ομαλά επιταχυνόμενη στην κατακόρυφη.)

(α) Στο σημείο *A*, $v_y = 0 \Rightarrow v_{0y} - g t_A = 0 \Rightarrow t_A = \dfrac{v_{0y}}{g} = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$.

(β) $h = y_A = v_{0y} t_A - \dfrac{1}{2} g {t_A}^2 \Rightarrow h = \dfrac{{v_{0y}}^2}{2g} = \dfrac{{v_0}^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

(γ) $y_B = 0 \Rightarrow v_{0y} t_B - \dfrac{1}{2} g {t_B}^2 = 0 \Rightarrow t_B = \dfrac{2 v_{0y}}{g} = 2 t_A$.

(δ) $R = x_B = v_{0x} t_B = \dfrac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} = \dfrac{2 {v_0}^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \Rightarrow R = \dfrac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Παρατηρούμε ότι R=max όταν $\sin 2\alpha$=1 ή α= 45° .

(ε) Στο σημείο *B*, $v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y} - g t_B = v_{0y} - 2 v_{0y} = -v_{0y}$.

Άρα, $|\vec{v}_B|^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 = {v_{0x}}^2 + {v_{0y}}^2 = {v_0}^2 \Rightarrow |\vec{v}_B| = v_0 = |\vec{v}_0|$.

Επίσης, $\tan\beta = \dfrac{|v_y|}{|v_x|} = \dfrac{v_{0y}}{v_{0x}} = \tan\alpha \Rightarrow \beta = \alpha$.

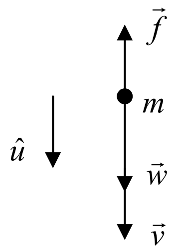
(ζ) $x = v_{0x} t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_{0x}} = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$. Τότε,

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y = -\frac{g}{2 {v_0}^2 \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha) x$$

που είναι της μορφής $y = \kappa x^2 + \lambda x$ (εξίσωση παραβολής).

7. Κάθε σώμα που κινείται στον αέρα αισθάνεται μια δύναμη τριβής $\vec{f}$ (αντίσταση του αέρα) που είναι, κατά μέτρο, ανάλογη της ταχύτητας του σώματος και έχει κατεύθυνση αντίθετη στην ταχύτητα: $\vec{f} = -k\vec{v}$ (όπου k μια θετική σταθερά). Θεωρούμε σώμα μάζας m το οποίο αφήνεται να πέσει, χωρίς αρχική ταχύτητα, κάτω από την επίδραση της βαρύτητας. (α) Βρείτε την ταχύτητα του σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου. Μπορεί να γίνει μηδέν ή να αλλάξει φορά; (β) Βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η ταχύτητα του σώματος κατά την πτώση.

Λύση: Στο σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις: το βάρος του, $\vec{w}$, και η αντίσταση $\vec{f}$.



Γράφουμε

$$\vec{w} = mg\,\hat{u}\ ,\quad \vec{f} = -kv\,\hat{u}$$

όπου v η *αλγεβρική τιμή* της ταχύτητας: $v = \pm|\vec{v}|$ (προβλέπουμε και για την περίπτωση που η φορά κίνησης τυχόν αντιστρέφεται). Η ολική δύναμη στο σώμα είναι

$$\vec{F} = \vec{w} + \vec{f} = (mg - kv)\,\hat{u}\quad .$$

Η επιτάχυνση του σώματος είναι

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{u}) = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}\ .$$

Από το νόμο του Νεύτωνα, $\vec{F} = m\vec{a}$, παίρνουμε (απαλείφοντας το $\hat{u}$):

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = dt \;\Rightarrow$$

$$\int_0^v \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = \int_0^t dt \;\Rightarrow\; -\frac{m}{k}\left[\ln\left(g - \frac{k}{m}v\right)\right]_0^v = t \;\Rightarrow$$

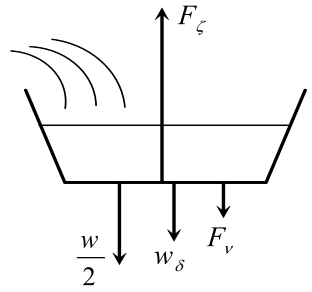
$$\ln\left[\frac{1}{g}\left(g - \frac{k}{m}v\right)\right] = -\frac{kt}{m} \;\Rightarrow\; v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)\ .$$

Παρατηρούμε ότι $v>0$ για κάθε $t>0$. Άρα, η ταχύτητα ούτε μηδενίζεται ούτε αλλάζει φορά. Επίσης, καθώς το $t \to \infty$, η ταχύτητα τείνει σε μια μέγιστη τιμή

$$v_{\max} = \frac{mg}{k}\quad .$$

8. *Ένα δοχείο βάρους w_δ=5N έχει συνολική χωρητικότητα w=50N νερού. Το δοχείο είναι τοποθετημένο πάνω σε ζυγαριά, και μέσα σ' αυτό πέφτει νερό από ύψος h=10m και με ρυθμό λ=0.5kg/s. Να βρεθεί η ένδειξη της ζυγαριάς τη στιγμή που το δοχείο έχει γεμίσει κατά το ήμισυ της χωρητικότητάς του με νερό. ($g=9.8m/s^2$)*

Λύση:



Το δοχείο ισορροπεί κάτω από την επίδραση τεσσάρων δυνάμεων: του βάρους του, w_δ , του βάρους $w/2$ του περιεχόμενου νερού, της δύναμης F_v που του ασκεί το νερό που πέφτει από ύψος h, και της δύναμης F_ζ που του ασκεί η ζυγαριά. Από το νόμο δράσης-αντίδρασης, το δοχείο ασκεί στη ζυγαριά μια δύναμη προς τα κάτω, μέτρου F_ζ . Αυτή ακριβώς τη δύναμη μετράει η ζυγαριά, και σε αυτή αντιστοιχεί η ένδειξή της. Για την ισορροπία,

$$F_\zeta = w_\delta + \frac{w}{2} + F_v \qquad (1)$$

Για να βρούμε την F_v εργαζόμαστε ως εξής: Έστω dm η μάζα του νερού που προστίθεται στο δοχείο μέσα σε χρονικό διάστημα dt. Η dm πέφτει στο δοχείο τη χρονική στιγμή t με ταχύτητα $\vec{v}$ κατακόρυφη προς τα κάτω, και στη συνέχεια, μέσα στο διάστημα dt, ενσωματώνεται στο υπόλοιπο νερό και τελικά ισορροπεί. Η ορμή τής dm τις χρονικές στιγμές t και $t+dt$ είναι

$$\vec{p}(t) = (dm)\vec{v} \ , \qquad \vec{p}(t+dt) = (dm)\cdot 0 = 0 \ .$$

Άρα,

$$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = -(dm)\vec{v} \ .$$

Η δύναμη που ασκείται στην dm από το υπόλοιπο σύστημα είναι ίση με

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{dm}{dt}\vec{v} = -\lambda\vec{v}$$

όπου, σύμφωνα με τα δεδομένα, ο ρυθμός dm/dt με τον οποίο το νερό πέφτει στο δοχείο είναι ίσος με λ. Από το νόμο δράσης-αντίδρασης, η dm ασκεί στο σύστημα μια αντίθετη δύναμη με φορά προς τα κάτω, μέτρου $F_v=\lambda v$. Τώρα, η dm εκτελεί ελεύθερη πτώση χωρίς αρχική ταχύτητα, από ύψος h. Έτσι, η ταχύτητα με την οποία πέφτει στο δοχείο είναι

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (\text{δείξτε το!}) \ .$$

Άρα,

$$F_v = \lambda v = \lambda\sqrt{2gh} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε, τελικά,

$$F_\zeta = w_\delta + \frac{w}{2} + \lambda\sqrt{2gh} \ .$$

Με αντικατάσταση των δεδομένων, βρίσκουμε ότι $F_\zeta = 37N$.

9. *Μια αλυσίδα βάρους w=2N κρατιέται κατακόρυφη από το πάνω άκρο της, ενώ το κάτω άκρο της αγγίζει το πάτωμα. Κατόπιν, η αλυσίδα αφήνεται να πέσει ελεύθερα. Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο πάτωμα τη στιγμή ακριβώς που το μισό του συνολικού μήκους της αλυσίδας έχει ήδη πέσει.*

Λύση: Δουλεύουμε, κατά βάση, όπως στο Πρόβλημα 8. Η ολική δύναμη στο πάτωμα τη θεωρούμενη στιγμή είναι

$$F = \frac{w}{2} + F_\alpha \qquad (1)$$

όπου F_α η δύναμη που ασκείται στο πάτωμα λόγω της πτώσης της αλυσίδας. Έστω dm ένα μικρό κομμάτι μάζας στο κέντρο της αλυσίδας. Το κομμάτι αυτό πέφτει στο πάτωμα τη χρονική στιγμή t από ύψος $h=L/2$, όπου L το συνολικό μήκος της αλυσίδας, και μέσα σε χρόνο dt απλώνεται στο πάτωμα και ισορροπεί. Η ορμή τού dm τις στιγμές t και $t+dt$ είναι

$$\vec{p}(t) = (dm)\vec{v} \ , \quad \vec{p}(t+dt) = (dm)\cdot 0 = 0 \ \Rightarrow$$
$$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = -(dm)\vec{v}$$

όπου $\vec{v}$ η ταχύτητα πτώσης τού dm στο πάτωμα, μέτρου

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\frac{L}{2}} = \sqrt{gL} \qquad (2)$$

Η δύναμη που δέχεται το dm από το πάτωμα είναι ίση με

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{dm}{dt}\vec{v} \ .$$

Από το νόμο δράσης-αντίδρασης, το dm ασκεί στο πάτωμα μια αντίθετη δύναμη με φορά προς τα κάτω, μέτρου

$$F_\alpha = \frac{dm}{dt}v \qquad (3)$$

Έστω dl το μήκος του τμήματος dm, και έστω M η μάζα της αλυσίδας. Αν $\rho=M/L$ είναι η γραμμική πυκνότητα της αλυσίδας, τότε

$$dm = \rho dl = \frac{M}{L}dl \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt} = \frac{M}{L}\frac{dl}{dt} = \frac{M}{L}v \qquad (4)$$

αφού η ταχύτητα πτώσης v ισούται με dl/dt. Από τις (3) και (4), και χρησιμοποιώντας την (2), έχουμε

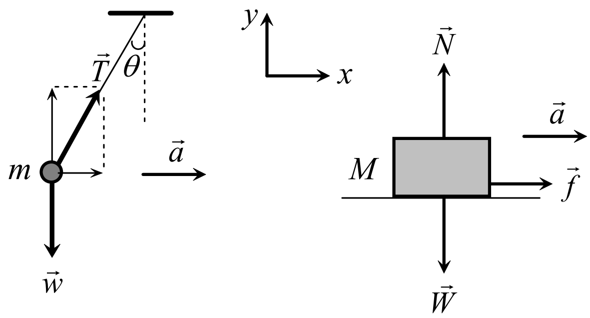
$$F_\alpha = \frac{M}{L}v^2 = \frac{M}{L}gL = Mg = w$$

όπου w το βάρος της αλυσίδας. Η (1) δίνει, τελικά,

$$F = \frac{w}{2} + w = \frac{3w}{2} = 3N \ .$$

10. *Ένα τραίνο κινείται σε οριζόντια ευθύγραμμη τροχιά. Ένα εκκρεμές που κρέμεται από την οροφή του τραίνου έχει κλίση κατά γωνία θ ως προς την κατακόρυφο. Το τραίνο μεταφέρει ένα κιβώτιο τοποθετημένο στο δάπεδο ενός βαγονιού. Βρείτε τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής ανάμεσα στο κιβώτιο και το δάπεδο του τραίνου, έτσι ώστε το κιβώτιο να μην ολισθαίνει.*

Λύση:



Έστω m η μάζα του εκκρεμούς και M η μάζα του κιβώτιου. Στο m ασκούνται το βάρος του, $\vec{w}$, και η τάση $\vec{T}$ του νήματος. Στο M ασκούνται το βάρος του, $\vec{W}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το δάπεδο του τραίνου, και η στατική τριβή $\vec{f}$ (εξηγήστε την κατεύθυνσή της προς τα δεξιά). Και τα δύο σώματα κινούνται με την επιτάχυνση $\vec{a}$ του τραίνου. Ο νόμος του Νεύτωνα για τις δύο μάζες γράφεται

$$\vec{T} + \vec{w} = m\vec{a} \ , \quad \vec{N} + \vec{W} + \vec{f} = M\vec{a} \ .$$

Παίρνοντας τις x και y συνιστώσες,

$$T\sin\theta = ma \quad (1)$$

$$T\cos\theta - mg = 0 \ \Rightarrow \ T\cos\theta = mg \quad (2)$$

$$f = Ma \quad (3)$$

$$N - Mg = 0 \ \Rightarrow \ N = Mg \quad (4)$$

Διαιρώντας την (1) με την (2) $\Rightarrow \ \tan\theta = \dfrac{a}{g} \ \Rightarrow \ a = g\tan\theta \quad (5)$

Διαιρώντας την (3) με την (4) και χρησιμοποιώντας την (5) $\Rightarrow$

$$\frac{f}{N} = \frac{a}{g} = \tan\theta \ \Rightarrow \ f = N\tan\theta \quad (6)$$

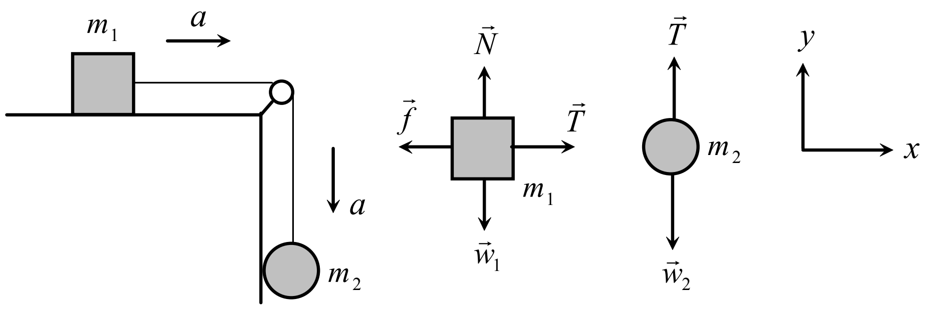
Όμως,

$$f \le f_{\max} = \mu N \ \overset{(6)}{\Rightarrow} \ N\tan\theta \le \mu N \ \Rightarrow$$

$$\mu \ge \tan\theta \ \Leftrightarrow \ \mu_{\min} = \tan\theta \ .$$

11. *Δύο μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με ελαφρύ νήμα και μέσω μιας τροχαλίας, όπως στο σχήμα. (α) Βρείτε τον ελάχιστο συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ της m_1 και της οριζόντιας επιφάνειας, έτσι ώστε το σύστημα να βρίσκεται σε ισορροπία. (β) Για τιμή του συντελεστή τριβής μικρότερη της οριακής, βρείτε την επιτάχυνση των δύο μαζών, καθώς και την τάση του νήματος.*

Λύση: Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις σε κάθε μάζα ξεχωριστά. Καλούμε $\vec{T}$ την τάση του νήματος, $\vec{f}$ την τριβή μεταξύ m_1 και οριζόντιας επιφάνειας, $\vec{w}_1$ και $\vec{w}_2$ τα βάρη, και $\vec{N}$ την κάθετη δύναμη από το οριζόντιο επίπεδο στην m_1 . Προσέξτε ότι το μέτρο T της τάσης του νήματος είναι κοινό για όλο το νήμα και δεν επηρεάζεται από την παρουσία της τροχαλίας, αφού το νήμα δεν είναι τυλιγμένο γύρω από την τροχαλία αλλά απλά «γλιστράει» πάνω της χωρίς τριβή:



(α) Το σύστημα ισορροπεί. Άρα, $\sum \vec{F} = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum F_x = \sum F_y = 0$, για κάθε μάζα ξεχωριστά. Έτσι, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
T - f &= 0 \quad \Rightarrow \quad T = f && (1)\\
N - w_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad N = w_1 = m_1 g && (2)\\
T - w_2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad T = w_2 = m_2 g && (3)
\end{aligned}
$$

Από τις (1) και (3) $\Rightarrow$ $\qquad f = m_2 g \quad (4)$

Όμως,

$$f \le f_{\max} = \mu N \overset{(2),(4)}{\Rightarrow} m_2 g \le \mu m_1 g \;\Rightarrow$$

$$\mu \ge \frac{m_2}{m_1} \;\Leftrightarrow\; \mu_{\min} = \frac{m_2}{m_1} \,.$$

(β) Όταν $\mu < \mu_{\min}$, οι μάζες κινούνται με επιταχύνσεις κοινού μέτρου a. Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \;\Leftrightarrow\; \sum F_x = m a_x \,,\;\; \sum F_y = m a_y$$

για κάθε μάζα ξεχωριστά, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
T - f &= m_1 a \quad \Rightarrow \quad T = f + m_1 a && (5)\\
N - w_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad N = w_1 = m_1 g && (6)\\
T - w_2 &= -m_2 a \quad \Rightarrow \quad T = w_2 - m_2 a = m_2 g - m_2 a && (7)
\end{aligned}
$$

Η f είναι τώρα κινητική τριβή, με συντελεστή μ. Έτσι,

$$f = \mu N \overset{(6)}{\Rightarrow} f = \mu m_1 g\ .$$

Τότε, από την (5) $\Rightarrow$ $$T = \mu m_1 g + m_1 a \quad (8)$$

Από τις (7) και (8) $\Rightarrow$ $\mu m_1 g + m_1 a = m_2 g - m_2 a \ \Rightarrow$

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g \quad (9)$$

(Προσέξτε ότι $a > 0 \Leftrightarrow m_2 - \mu m_1 > 0 \Leftrightarrow \mu < \frac{m_2}{m_1} = \mu_{\min}$.)

Αντικαθιστώντας την (9) στην (7) $\Rightarrow$

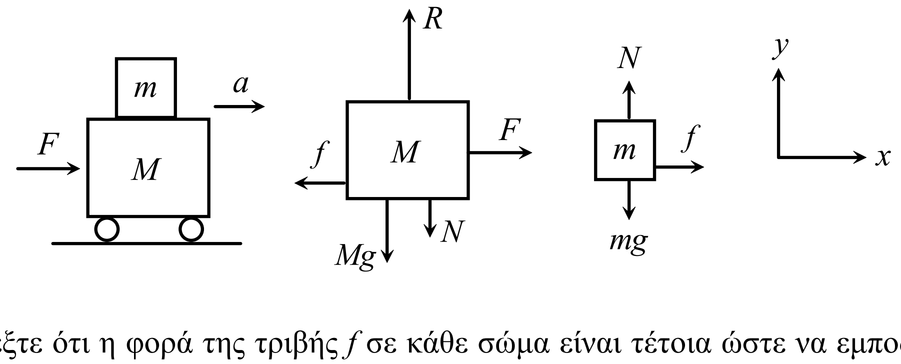
$$T = \frac{(\mu + 1) m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (10)$$

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει τριβή (μ=0), οι (9) και (10) γίνονται

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g\ , \quad T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g\ .$$

12. *Ένα κιβώτιο μάζας m είναι τοποθετημένο πάνω σε ένα καρότσι μάζας M, όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στο m και το M είναι μ. Βρείτε τη μέγιστη οριζόντια δύναμη F που μπορούμε να ασκήσουμε στο καρότσι, έτσι ώστε το κιβώτιο να κινείται μαζί με το καρότσι χωρίς να ολισθαίνει πάνω του.*

Λύση: Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις σε κάθε σώμα ξεχωριστά. Καλούμε f τη στατική τριβή ανάμεσα στα δύο σώματα, N την κάθετη δύναμη που ασκείται από το ένα στο άλλο, και R την κάθετη αντίδραση του εδάφους στο καρότσι:



(Προσέξτε ότι η φορά της τριβής f σε κάθε σώμα είναι τέτοια ώστε να εμποδίζεται η ολίσθηση μεταξύ τους όταν η ασκούμενη δύναμη F είναι προς τα δεξιά.) Όταν δεν υπάρχει ολίσθηση, τα δύο σώματα κινούνται με κοινή επιτάχυνση a. Εφαρμόζουμε το νόμο του Νεύτωνα στις κατευθύνσεις x και y, για κάθε σώμα ξεχωριστά:

$$
\begin{aligned}
F - f = Ma \;\Rightarrow\; & F = Ma + f && (1)\\
R - Mg - N = 0 \;\Rightarrow\; & R = Mg + N && (2)\\
& f = ma && (3)\\
N - mg = 0 \;\Rightarrow\; & N = mg && (4)
\end{aligned}
$$

Από τις (2) και (4) => $R = (M+m)\,g$.

Από τις (1) και (3) => $F = (M+m)\,a$ (5)

[η (5) είναι απλά ο νόμος του Νεύτωνα για το σύστημα (M+m)]. Τώρα,

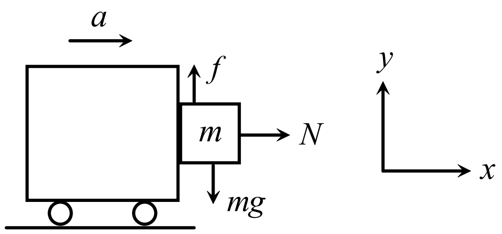
$$f \le f_{\max} = \mu N \overset{(3),(4)}{\Rightarrow} ma \le \mu mg \;\Rightarrow\; a \le \mu g \quad (6)$$

Η (6) δίνει τις επιτρεπτές τιμές της επιτάχυνσης ώστε οι δύο μάζες να κινούνται μαζί, χωρίς να ολισθαίνει η μία στην άλλη. Από τις (5) και (6) βρίσκουμε τις επιτρεπτές τιμές της εξωτερικής δύναμης F :

$$F \le \mu(M+m)g \quad \Leftrightarrow \quad F_{\max} = \mu(M+m)g \;.$$

13. *Βρείτε τις τιμές της επιτάχυνσης που πρέπει να έχει το καρότσι του σχήματος ώστε το κιβώτιο να μην πέφτει στο έδαφος. Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στο κιβώτιο και το καρότσι είναι μ.*

Λύση: Έστω a η επιτάχυνση του συστήματος, κοινή για το κιβώτιο και το καρότσι. Καλούμε m τη μάζα του κιβώτιου, f την τριβή ανάμεσα σε κιβώτιο και καρότσι, και N την κάθετη δύναμη στο κιβώτιο από το καρότσι:



Ο νόμος του Νεύτωνα για το κιβώτιο: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \Sigma F_x = ma_x$, $\Sigma F_y = ma_y$, δίνει

$$N = ma \quad (1)$$
$$f - mg = 0 \;\Rightarrow\; f = mg \quad (2)$$

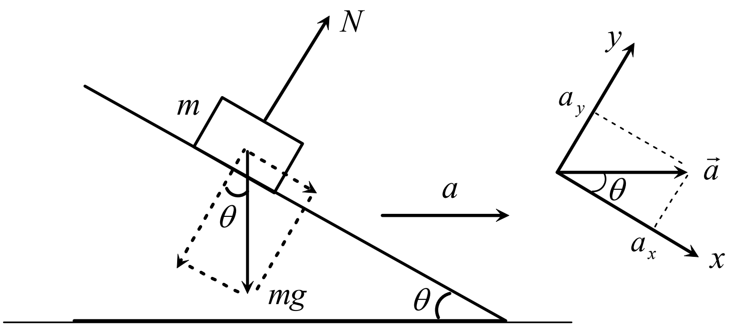
Αλλά,

$$f \le f_{\max} = \mu N \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} mg \le \mu ma \;\Rightarrow$$
$$a \ge \frac{g}{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad a_{\min} = \frac{g}{\mu} \;.$$

Παρατηρούμε ότι $a_{\min} \to \infty$ όταν $\mu \to 0$. Τι σημαίνει αυτό πρακτικά;

14. *Ένα κιβώτιο μάζας m είναι τοποθετημένο πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ, όπως στο σχήμα. Το επίπεδο μπορεί να κινείται με μεταβλητή επιτάχυνση μέτρου a, κατευθυνόμενη προς τα δεξιά. (α) Βρείτε την τιμή της επιτάχυνσης του επιπέδου για την οποία το κιβώτιο δεν ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο. Ποια κάθετη δύναμη ασκεί το επίπεδο στο κιβώτιο στην περίπτωση αυτή; (β) Βρείτε τις τιμές της επιτάχυνσης a για τις οποίες το κιβώτιο κινείται προς τα πάνω ή προς τα κάτω στο κεκλιμένο επίπεδο. (γ) Για μια δοσμένη τιμή της επιτάχυνσης a, διάφορη γενικά από αυτή που βρήκατε στο ερώτημα (α), και υποθέτοντας τώρα ότι το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι εντελώς λείο, βρείτε τις τιμές του συντελεστή στατικής τριβής μ ανάμεσα στο κιβώτιο και το επίπεδο έτσι ώστε το κιβώτιο να μην ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο. [Προσοχή: Στις περιπτώσεις (α) και (β) δεν υπάρχει τριβή.]*

Λύση: Θεωρούμε ένα *αδρανειακό* σύστημα αναφοράς *xy* το οποίο δεν επιταχύνεται ως προς το έδαφος. Ο άξονας *x* είναι παράλληλος στο κεκλιμένο επίπεδο, ενώ ο άξονας *y* είναι κάθετος σε αυτό. Όλα τα διανύσματα θα αναλύονται ως προς αυτό το σύστημα αξόνων. (Δεν θα μπορούσαμε να πάρουμε ένα σύστημα αξόνων που κινείται μαζί με το επίπεδο, αφού ένα τέτοιο σύστημα θα είχε επιτάχυνση ως προς το έδαφος και άρα ***δεν*** θα ήταν αδρανειακό. Έτσι, δεν θα είχαμε το δικαίωμα να εφαρμόσουμε τους νόμους του Νεύτωνα στο σύστημα αυτό.)



(α) Για να μην ολισθαίνει το *m* θα πρέπει η επιτάχυνσή του ως προς το σύστημα *xy* να ισούται με την επιτάχυνση $\vec{a}$ του κεκλιμένου επιπέδου. Έτσι, από το νόμο του Νεύτωνα για το *m*,

$$\Sigma F_x = ma_x \;\Rightarrow\; mg\sin\theta = ma\cos\theta \;\Rightarrow\; a = g\tan\theta \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = ma_y \;\Rightarrow\; N - mg\cos\theta = ma\sin\theta \;\Rightarrow$$

$$N = m\,(g\cos\theta + a\sin\theta) \overset{(1)}{=} mg\,(\cos\theta + \sin\theta\tan\theta)\,.$$

(β) Για να ολισθαίνει το *m* θα πρέπει η επιτάχυνσή του, $\vec{a}'$, να διαφέρει από την επιτάχυνση $\vec{a}$ του κεκλιμένου επιπέδου. Εδώ μας ενδιαφέρει μόνο η *x*-συνιστώσα της επιτάχυνσης (αυτή κατά μήκος του επιπέδου):

$$\Sigma F_x = ma_x' \;\Rightarrow\; mg\sin\theta = ma_x' \;\Rightarrow\; a_x' = g\sin\theta\;.$$

Το σώμα θα ολισθαίνει προς τα *κάτω* αν $a_x' > a_x$, ή

$$g\sin\theta > a\cos\theta \;\Rightarrow\; a < g\tan\theta \quad (\textit{κάτω}) \quad (2)$$

ενώ θα ολισθαίνει προς τα *πάνω* αν $a_x' < a_x$, ή

$$g\sin\theta < a\cos\theta \;\Rightarrow\; a > g\tan\theta \quad (\textit{πάνω}) \quad (3)$$

(γ) Οι συνθήκες (2) και (3) περιγράφουν την τάση τού m να κινηθεί προς τα κάτω ή προς τα πάνω, αντίστοιχα, ως προς το κεκλιμένο επίπεδο όταν δεν υπάρχει τριβή. Άρα, η τριβή είναι απαραίτητη ώστε να μην ολισθαίνει το m πάνω στο επίπεδο για επιταχύνσεις a του επιπέδου διάφορες από αυτή που δίνει η σχέση (1). Προφανώς, η τριβή f θα κατευθύνεται προς τα πάνω ή προς τα κάτω κατά μήκος του επιπέδου, ανάλογα με το αν η επιτάχυνση του επιπέδου υπακούει στην (2) ή την (3), αντίστοιχα. Παίρνοντας ξεχωριστά τις περιπτώσεις (2) και (3), και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$f \leq f_{\max} = \mu N \ ,$$

δείξτε ότι

$$\mu \geq \frac{|g\sin\theta - a\cos\theta|}{g\cos\theta + a\sin\theta} \ .$$

15. *Ένας δορυφόρος βρίσκεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη. Μέσα στο δορυφόρο, ένας παρατηρητής μελετάει την κίνηση ενός αντικειμένου μάζας m. (α) Εξηγήστε γιατί η χρήση των νόμων του Νεύτωνα θα οδηγούσε τον παρατηρητή αυτό σε λανθασμένα συμπεράσματα. (β) Σαν εφαρμογή, δείξτε ότι, σύμφωνα με τον παρατηρητή, το αντικείμενο m δεν έχει βάρος!*

Λύση: Ο δορυφόρος βρίσκεται σε *ελεύθερη πτώση* αφού κινείται κάτω από την επίδραση της βαρύτητας και μόνο, με επιτάχυνση ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$. (Μη σας ξεγελά το γεγονός ότι κινείται κυκλικά αντί να πέφτει προς τη Γη. Το $\vec{g}$ κατευθύνεται πάντα προς τη Γη και παίζει εδώ το ρόλο κεντρομόλου επιτάχυνσης. Ο δορυφόρος θα έπεφτε κατακόρυφα προς τα κάτω αν δεν του είχαμε δώσει μια αρχική ταχύτητα κάθετη στη διεύθυνση της ακτίνας της Γης.) Ο επιταχυνόμενος δορυφόρος αποτελεί ένα *μη-αδρανειακό* σύστημα αναφοράς, και ένας παρατηρητής που κινείται μαζί με το δορυφόρο (μη-αδρανειακός παρατηρητής) θα οδηγηθεί σε λανθασμένα συμπεράσματα αν προσπαθήσει να ερμηνεύσει τα φαινόμενα με βάση τους νόμους του Νεύτωνα. Για να το κατανοήσουμε αυτό, ας μελετήσουμε σε συντομία τη μηχανική των μη-αδρανειακών συστημάτων, γενικά:

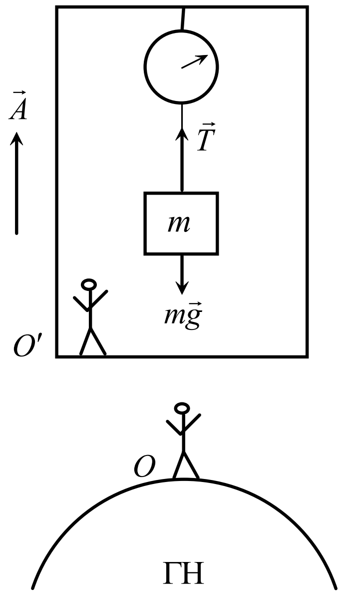
Θεωρούμε δύο παρατηρητές: έναν αδρανειακό, O, σταθερά τοποθετημένο στην επιφάνεια της Γης, και έναν μη-αδρανειακό, O', που κινείται με επιτάχυνση $\vec{A}$ ως προς τη Γη. Και οι δύο παρατηρούν ένα σωματίδιο μάζας m και καταγράφουν αντίστοιχες επιταχύνσεις $\vec{a}$ και $\vec{a}'$. Σύμφωνα με αυτά που είπαμε στην Παρ.2.8 για τη σχετική επιτάχυνση, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} \qquad (1)$$

Μια και ο παρατηρητής O είναι αδρανειακός, μπορεί να χρησιμοποιήσει το νόμο του Νεύτωνα για να συνδέσει την επιτάχυνση $\vec{a}$ που μετράει με την ολική δύναμη $\vec{F}$ που δρα στο σωματίδιο και οφείλεται σε όλες τις αλληλεπιδράσεις στις οποίες αυτό μετέχει:

$$\vec{F} = m\vec{a} \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{F} = m(\vec{a}' + \vec{A}) \;\Rightarrow\; m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A} \equiv \vec{F}' \quad (2)$$

Το $\vec{a}'$ στο αριστερό μέλος τής (2) είναι η επιτάχυνση του m όπως τη μετράει ο παρατηρητής O'. Παρατηρούμε ότι, αν θέλει ο O' να εφαρμόσει το νόμο του Νεύτωνα στο *μη-αδρανειακό* σύστημα αναφοράς του, θα πρέπει να υποθέσει ότι, εκτός από την πραγματική δύναμη $\vec{F}$, στο σωματίδιο δρα και μια άλλη, *υποθετική* δύναμη («ψευδοδύναμη») ίση με $-m\vec{A}$, η οποία βέβαια δεν οφείλεται σε αληθινές αλληλεπιδράσεις αλλά είναι αποτέλεσμα της επιτάχυνσης του O'. Έτσι, αν επιμείνει ο O' να χρησιμοποιήσει το νόμο του Νεύτωνα αφού μετρήσει το $\vec{a}'$, θα υπολογίσει μια *λανθασμένη* δύναμη $\vec{F}'$, διαφορετική από την πραγματική δύναμη $\vec{F}$ που μετράει ο αδρανειακός παρατηρητής O.



Για παράδειγμα, έστω ότι ο παρατηρητής O' βρίσκεται μέσα σε ένα δωμάτιο που έχει επιτάχυνση $\vec{A}$ ως προς τη Γη (άρα και ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή O που βρίσκεται πάνω στη Γη), και θέλει να ζυγίσει ένα αντικείμενο μάζας m με τη βοήθεια μιας ζυγαριάς που κρέμεται από την οροφή του δωματίου, όπως στο σχήμα. Η πραγματική δύναμη στο σώμα είναι

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$$

όπου $\vec{T}$ η τάση του νήματος που συγκρατεί το σώμα. Το μέτρο T της $\vec{T}$ είναι αυτό ακριβώς στο οποίο αντιστοιχεί η ένδειξη της ζυγαριάς. Η επιτάχυνση του σώματος m ως προς τον αδρανειακό παρατηρητή O είναι $\vec{A}$, και ο νόμος του Νεύτωνα για τον O γράφεται

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{A} \quad (3)$$

Για τον μη-αδρανειακό παρατηρητή O', τώρα, και σύμφωνα με τη σχέση (2), το σώμα υπόκειται σε μια (ψευδο-)δύναμη

$$\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{A} \overset{(3)}{\Rightarrow} \vec{F}' = 0 \,.$$

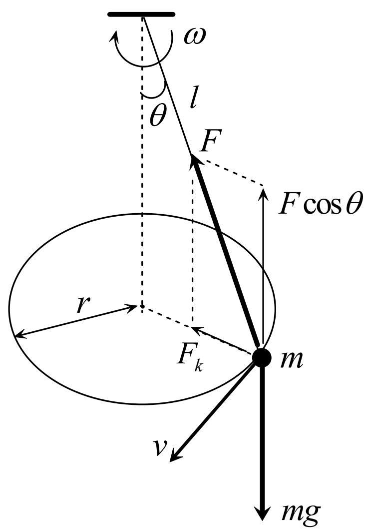
Έτσι, η (2) δίνει $\vec{a}' = 0$, πράγμα προφανές αφού το m δεν επιταχύνεται ως προς τον O'. Από την (3) βλέπουμε ότι η ζυγαριά τού O' δεν δείχνει το πραγματικό βάρος του σώματος, αλλά ένα *φαινομενικό* βάρος ίσο με $T=|\vec{T}\,|$, όπου

$$\vec{T} = m(\vec{A} - \vec{g}) \quad (4)$$

Αν το δωμάτιο είναι δορυφόρος σε ελεύθερη πτώση, τότε $\vec{A} = \vec{g}$ και η (4) δίνει $\vec{T} = 0$. Δηλαδή, για τον παρατηρητή O' που βρίσκεται μέσα στο δορυφόρο, το σώμα είναι *αβαρές* !

16. *Ένα εκκρεμές μήκους l και μάζας m περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που περνάει από το σημείο στήριξής του, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Βρείτε (α) τη γωνία θ που σχηματίζει το νήμα του εκκρεμούς με τον κατακόρυφο άξονα, (β) την περίοδο T της κίνησης σαν συνάρτηση του θ, και (γ) την τάση F του νήματος. (Η διάταξη αυτή ονομάζεται* ***κωνικό εκκρεμές****, γιατί το νήμα διαγράφει την επιφάνεια ενός κώνου.)*

Λύση: Το m εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $r=l\sin\theta$, με γωνιακή ταχύτητα ω, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο που τέμνει τον κατακόρυφο άξονα σε απόσταση $l\cos\theta$ κάτω από το σημείο στήριξης:



Στο m ασκούνται δύο δυνάμεις: το βάρος του, $m\vec{g}$, και η τάση $\vec{F}$ του νήματος. Η συνισταμένη αυτών των δύο δυνάμεων θα πρέπει να δίνει την αναγκαία κεντρομόλο δύναμη F_k για να πραγματοποιηθεί η ομαλή κυκλική κίνηση. Αναλύουμε την $\vec{F}$ σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη συνιστώσα. Αφού δεν υπάρχει κατακόρυφη επιτάχυνση, η κατακόρυφη συνιστώσα, ίση με $F\cos\theta$, θα πρέπει να είναι ίση κατά μέτρο με το βάρος mg. Έτσι, η μόνη δύναμη που απομένει είναι η οριζόντια συνιστώσα $F\sin\theta$, η οποία θα είναι και η απαιτούμενη κεντρομόλος δύναμη F_k. Γράφουμε τώρα το νόμο του Νεύτωνα χωριστά για την οριζόντια και την κατακόρυφη κίνηση του m :

$$F_k = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 \quad (\text{διότι } v = r\omega) \Rightarrow \ F\sin\theta = mr\omega^2 \quad (1)$$

$$F\cos\theta - mg = 0 \ \Rightarrow \ F\cos\theta = mg \quad (2)$$

Διαιρώντας την (1) με τη (2) $\Rightarrow \ \tan\theta = \dfrac{r\omega^2}{g} = \dfrac{l\omega^2\sin\theta}{g} \ \Rightarrow$

$$\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2} \quad (3)$$

Παρατηρούμε ότι το θ αυξάνει με το ω. Για την περίοδο T της κυκλικής κίνησης, γράφουμε

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{g}{l\cos\theta}\right)^{1/2} \ \Rightarrow \ T = 2\pi\left(\frac{l\cos\theta}{g}\right)^{1/2} .$$

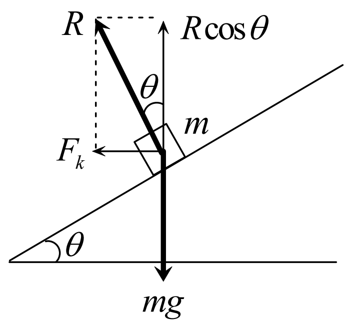
Από τις (2) και (3) βρίσκουμε την τάση του νήματος:

$$F = ml\omega^2 \ .$$

Παρατηρούμε τα εξής:
1) Στο όριο που $\omega \to \infty$, το $\cos\theta \to 0$ και το $\theta \to \pi/2$.
2) Για δοσμένη τιμή τού θ, η περίοδος T είναι ανεξάρτητη της μάζας του εκκρεμούς.
3) Για δοσμένο ω, η τάση F δεν εξαρτάται από την τιμή τού g (δηλαδή, από τη βαρύτητα).

17. *Θα έχετε παρατηρήσει ότι πολλοί δρόμοι είναι κατασκευασμένοι έτσι ώστε να έχουν κάποια κλίση ως προς το οριζόντιο επίπεδο στα σημεία όπου υπάρχουν απότομες στροφές. Αυτό γίνεται για να μπορεί ένα αυτοκίνητο να πάρει τη στροφή χωρίς να επαφίεται στην τριβή (αφού ο δρόμος μπορεί να είναι ολισθηρός). Αν θ είναι η γωνία κλίσης του δρόμου σε σημείο όπου η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς είναι r, βρείτε την ασφαλέστερη ταχύτητα v με την οποία πρέπει να κινείται ένα αυτοκίνητο στο σημείο αυτό, στο όριο που η τριβή είναι μηδέν. (Υποθέστε ότι η v είναι σταθερή.)*

Λύση: Στο σχήμα βλέπουμε μια τομή του δρόμου και του αυτοκινήτου. Η ταχύτητα $\vec{v}$ του αυτοκινήτου, σταθερού μέτρου v, είναι κάθετη στη σελίδα (η φορά της δεν μας ενδιαφέρει):



Στο αυτοκίνητο ασκούνται το βάρος του, $m\vec{g}$, και η κάθετη αντίδραση $\vec{R}$ από το δρόμο (δεν υπάρχει τριβή). Η συνισταμένη τους θα πρέπει να δίνει την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη F_k. Η F_k είναι η οριζόντια συνιστώσα τής $\vec{R}$, ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα εξουδετερώνεται από το βάρος mg (αφού δεν υπάρχει κατακόρυφη επιτάχυνση). Ο νόμος του Νεύτωνα στην οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση, δίνει

$$F_k = m\frac{v^2}{r} \ \Rightarrow \qquad R\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \quad (1)$$

$$R\cos\theta - mg = 0 \ \Rightarrow \ R\cos\theta = mg \qquad (2)$$

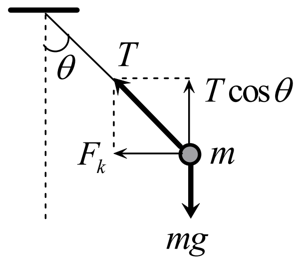
Διαιρώντας τις (1) και (2), έχουμε

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \ \Rightarrow \ v = \sqrt{rg\tan\theta} \ .$$

(Στην πράξη, βέβαια, το αυτοκίνητο μπορεί να κινηθεί και με διαφορετικές ταχύτητες με τη βοήθεια της τριβής.)

18. *Ένα τραίνο κινείται ομαλά σε τροχιά με ακτίνα καμπυλότητας r. Ένα εκκρεμές που κρέμεται από την οροφή του τραίνου έχει κλίση κατά γωνία θ με την κατακόρυφο. Βρείτε την ταχύτητα v του τραίνου.*

Λύση: Η σφαίρα του εκκρεμούς, μάζας m, κινείται με την ταχύτητα του τραίνου. Το διάνυσμα $\vec{v}$ της ταχύτητας είναι κάθετο στη σελίδα (η φορά του δεν μας ενδιαφέρει):



Στο m ασκούνται το βάρος του, $m\vec{g}$, και η τάση $\vec{T}$ του νήματος. Η συνισταμένη τους θα πρέπει να δίνει την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη F_k. Η F_k είναι η οριζόντια συνιστώσα τής $\vec{T}$, ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα εξουδετερώνεται από το βάρος mg (δεν υπάρχει κατακόρυφη επιτάχυνση). Εφαρμόζουμε το νόμο του Νεύτωνα στην οριζόντια και την κατακόρυφη διεύθυνση:

$$F_k = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad T\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \qquad (1)$$

$$T\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos\theta = mg \qquad (2)$$

Διαιρώντας τις (1) και (2), έχουμε

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{rg\tan\theta} \quad .$$

19. *Σύμφωνα με το νόμο της βαρύτητας του Νεύτωνα, δύο μάζες m_1 και m_2 που βρίσκονται σε απόσταση r η μία από την άλλη, έλκονται με μια δύναμη*

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

όπου G μια σταθερά. (Για ένα σώμα με σφαιρική συμμετρία, η απόσταση r μετριέται από το κέντρο του.) Καλούμε M τη μάζα και R την ακτίνα της Γης. (α) Βρείτε μια έκφραση για την επιτάχυνση της βαρύτητας g κοντά στην επιφάνεια της Γης. (β) Ένας δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη με σταθερό μέτρο ταχύτητας και σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης. Βρείτε την ταχύτητα v του δορυφόρου, καθώς και την περίοδο T της περιστροφής.

Λύση: (α) Έστω σώμα μάζας m που βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια της Γης, άρα σε απόσταση $r=R$ από το κέντρο της. Η Γη ασκεί στο σώμα μια ελκτική δύναμη ίση με το βάρος του σώματος:

$$F = G\frac{mM}{R^2} \qquad (1)$$

Τώρα, αν g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια της Γης, και αν το σώμα δεν υπόκειται σε άλλες αλληλεπιδράσεις πέραν της βαρυτικής, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μας λέει ότι

$$F = mg \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2), έχουμε

$$g = G\frac{M}{R^2} \quad .$$

Προσέξτε ότι το g δεν εξαρτάται από το m. Τούτο σημαίνει ότι, κοντά στην επιφάνεια της Γης, όλα τα σώματα κινούνται στο πεδίο βαρύτητας της Γης με την ίδια επιτάχυνση g (υπό την προϋπόθεση, βέβαια, ότι δεν υπόκεινται σε άλλες δυνάμεις πέραν της βαρύτητας).

(β) Η ακτίνα περιστροφής του δορυφόρου είναι $r=R+h$. Επειδή το μέτρο v της ταχύτητάς του είναι σταθερό, στο δορυφόρο ασκείται μόνο κεντρομόλος δύναμη, ίση με τη βαρυτική έλξη της Γης. Έτσι, αν m είναι η μάζα του δορυφόρου,

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} \quad (3)$$

Προσέξτε ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο του m. Επίσης, έχουμε:

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T} \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi r}{v} \overset{(3)}{\Rightarrow} T = \frac{2\pi (R+h)^{3/2}}{\sqrt{GM}} \quad .$$

20. *Ένα σωματίδιο κινείται στο επίπεδο xy κάτω από την επίδραση μιας δύναμης* $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{A}$, *όπου* $\vec{v}$ *η ταχύτητα του σωματιδίου και* $\vec{A}$ *ένα σταθερό διάνυσμα παράλληλο στον άξονα z. (α) Δείξτε ότι η* $\vec{F}$ *είναι διάνυσμα του επιπέδου xy και προσδιορίστε τη διεύθυνσή της ως προς την τροχιά του σωματιδίου. (β) Δείξτε ότι τα* $\vec{v}$ *και* $\vec{F}$ *είναι διανύσματα σταθερού μέτρου. (γ) Δείξτε ότι η κίνηση του σωματιδίου είναι ομαλή κυκλική.*

Λύση: (α) Έστω ότι $\vec{v} = v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y$ και $\vec{A} = A\hat{u}_z$, όπου $A = |\vec{A}|$ (διαλέξαμε το $\vec{A}$ στη θετική φορά του άξονα z). Τότε,

$$\vec{F} = \vec{v} \times \vec{A} = (v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y) \times (A\hat{u}_z) = A(v_y\hat{u}_x - v_x\hat{u}_y)$$

που είναι διάνυσμα στο επίπεδο xy. Επίσης, λόγω της διεύθυνσης του εξωτερικού γινομένου, η $\vec{F}$ είναι κάθετη στην ταχύτητα $\vec{v}$ (άρα και στην τροχιά). Αυτό μπορούμε να το δούμε και ως εξής:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = A(v_y\hat{u}_x - v_x\hat{u}_y) \cdot (v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y) = A(v_y v_x - v_x v_y) = 0 \quad .$$

(β) Αφού η $\vec{F}$ είναι κάθετη στην ταχύτητα, το μέτρο $|\vec{v}| = v$ είναι σταθερό (μόνο η διεύθυνση της ταχύτητας αλλάζει). Επίσης,

$$|\vec{F}| \equiv F = |\vec{v}|\,|\vec{A}|\sin\frac{\pi}{2} = vA = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \quad .$$

(γ) Έστω ρ η ακτίνα καμπυλότητας σε τυχαίο σημείο της τροχιάς, και έστω m η μάζα του σωματιδίου. Επειδή η $\vec{F}$ είναι κεντρομόλος σε κάθε σημείο της τροχιάς,

$$F = m\frac{v^2}{\rho} \;\Rightarrow\; \rho = \frac{mv^2}{F} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

(διότι v και F σταθερά). Έχουμε λοιπόν επίπεδη ομαλή κίνηση (v=*σταθ.*) με σταθερή ακτίνα καμπυλότητας. Τι κίνηση είναι αυτή;

21. *Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy. Οι συντεταγμένες του, σαν συναρτήσεις του χρόνου, δίνονται από τις σχέσεις*

x = A cosωt , y = A sinωt   (A , ω θετικές σταθερές).

(α) Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου, στη μορφή F(x,y)= σταθ.

(β) Βρείτε την ταχύτητα $\vec{v} \equiv (v_x, v_y)$ και την επιτάχυνση $\vec{a} \equiv (a_x, a_y)$ του σωματιδίου σαν συναρτήσεις τού t, και δείξτε ότι τα δύο αυτά διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους σε κάθε σημείο της τροχιάς. Τι συμπεραίνετε για το μέτρο της ταχύτητας; Επαληθεύστε το συμπέρασμά σας υπολογίζοντας απευθείας το μέτρο αυτό.

(γ) Βρείτε την επιτρόχια και την κεντρομόλο επιτάχυνση για κάθε t.

(δ) Βρείτε την ακτίνα καμπυλότητας ρ για κάθε t, και περιγράψτε τη μορφή της τροχιάς και το είδος της κίνησης.

(ε) Δείξτε ότι στο σωματίδιο ασκείται ολική δύναμη σταθερού μέτρου. Τι διεύθυνση έχει η δύναμη αυτή ως προς την τροχιά;

(ζ) Δείξτε ότι η στροφορμή του σωματιδίου ως προς την αρχή O των συντεταγμένων x,y είναι σταθερή. Τι συμπεραίνετε για τη ροπή της ασκούμενης δύναμης ως προς το O;

Λύση: (α) $\cos\omega t = \dfrac{x}{A}$, $\sin\omega t = \dfrac{y}{A}$. Τότε,

$$\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = A^2 \ .$$

Η τροχιά είναι κύκλος ακτίνας A με κέντρο την αρχή O (x=y=0) των συντεταγμένων.

(β) Έχουμε ότι

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin\omega t \ , \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \omega A \cos\omega t$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A \cos\omega t \ , \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 A \sin\omega t$$

Έτσι, $\vec{v}\cdot\vec{a} = v_x a_x + v_y a_y = \omega^3 A^2 (\sin\omega t \cos\omega t - \cos\omega t \sin\omega t) = 0$.

Το $\vec{a}$ είναι κάθετο στο $\vec{v}$, άρα $|\vec{v}|$ = σταθερό. Πράγματι:

$$|\vec{v}|^2 = v_x^{\,2} + v_y^{\,2} = \omega^2 A^2 \;\Rightarrow\; |\vec{v}| \equiv v = \omega A = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \quad (1)$$

(γ) $a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0$, διότι $v = |\vec{v}|$= σταθερό. Για να βρούμε την a_N εργαζόμαστε ως εξής:

$$|\vec{a}|^2 = a_T^{\,2} + a_N^{\,2} = a_x^{\,2} + a_y^{\,2} \;\Rightarrow\; 0 + a_N^{\,2} = \omega^4 A^2 \;\Rightarrow\; a_N = \omega^2 A \quad (2)$$

(δ) $a_N = \dfrac{v^2}{\rho} \;\Rightarrow\; \rho = \dfrac{v^2}{a_N} \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \rho = A = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \quad (3)$

Η κίνηση είναι ομαλή κυκλική, ακτίνας A, με κέντρο το O.

(ε) Αφού η κίνηση είναι ομαλή, η ολική δύναμη είναι εξ ολοκλήρου κεντρομόλος:

$$F = m\,\frac{v^2}{\rho} \overset{(1),(3)}{\Rightarrow} F = m\omega^2 A = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \ .$$

(ζ) Το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου ως προς *O* είναι $\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y$.
Η στροφορμή ως προς *O* είναι

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m(x\hat{u}_x + y\hat{u}_y) \times (v_x\hat{u}_x + v_y\hat{u}_y) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{L} = m(x v_y - y v_x)\hat{u}_z = m\omega A^2 \hat{u}_z \ .$$

Εναλλακτικά, από τη σχέση (3.32) έχουμε $\vec{L} = L\hat{u}_z$, όπου $L = |\vec{L}| = mA^2\omega$.
Παρατηρούμε ότι $\vec{L} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$. Άρα, δεν υπάρχει ροπή ως προς το *O*, αφού

$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \ .$$

22. *Σωματίδιο μάζας m εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R. Καλούμε L το μέτρο της στροφορμής του ως προς το κέντρο O του κύκλου.*
(α) Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι

$$E_k = \frac{L^2}{2mR^2} = \frac{L^2}{2I}$$

όπου $I=mR^2$ η ροπή αδρανείας τού m ως προς τον άξονα της περιστροφής. (Ο άξονας αυτός είναι κάθετος στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς και διέρχεται από το κέντρο της.)
(β) Αν η κίνηση είναι ομαλή, δείξτε ότι το μέτρο της ολικής δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο είναι

$$F = \frac{L^2}{mR^3} \ .$$

Λύση: (α) Γνωρίζουμε ότι

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad \text{όπου} \qquad p = mv \ .$$

Επίσης, για κυκλική κίνηση [βλ. εξίσ.(3.32)],

$$L = mRv = Rp \quad \Rightarrow \quad p = \frac{L}{R} \ .$$

Έτσι,

$$E_k = \frac{1}{2m}\left(\frac{L}{R}\right)^2 = \frac{L^2}{2mR^2} = \frac{L^2}{2I} \ .$$

Εναλλακτικά,

$$\frac{L^2}{E_k} = \frac{(mRv)^2}{\frac{1}{2}mv^2} = 2mR^2 \quad \Rightarrow \quad E_k = \frac{L^2}{2mR^2} \ .$$

(β) Αφού η κίνηση είναι ομαλή, η δύναμη είναι εξ ολοκλήρου κεντρομόλος:

$$F = m\frac{v^2}{R} = \frac{m}{R}\left(\frac{L}{mR}\right)^2 = \frac{L^2}{mR^3} \ .$$

23. *Όταν ένα φορτισμένο σωμάτιο, φορτίου q, κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης* $\vec{B}$ *με ταχύτητα* $\vec{v}$, *δέχεται δύναμη* $\vec{F} = q\,(\vec{v}\times\vec{B})$. *(α) Δείξτε ότι η* $\vec{F}$ *δεν παράγει έργο. (β) Υποθέτοντας ότι στο σωμάτιο δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις εκτός από την* $\vec{F}$, *τι συμπεραίνετε για την κινητική του ενέργεια;*

Λύση: (α) Το έργο τής $\vec{F}$ για μια διαδρομή από το σημείο a ως το σημείο b, είναι

$$W = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \int_a^b (\vec{F}\cdot\vec{v})\,dt \ .$$

Αλλά,

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = q\,(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v} = 0 \quad \text{(γιατί;).}$$

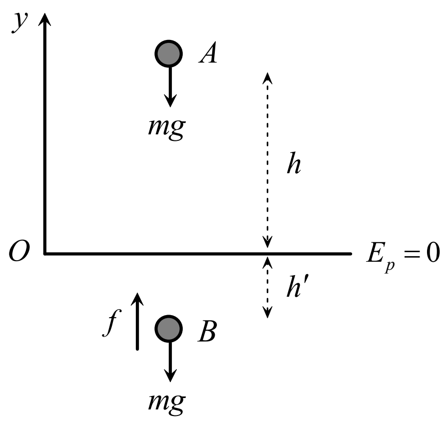
Άρα, W=0 .

(β) Από το ΘΜΚΕ, $W=\Delta E_k=0$ => E_k = *σταθερή*.

Εναλλακτικά, αφού η ολική δύναμη $\vec{F}$ είναι κάθετη στην ταχύτητα $\vec{v}$, το μέτρο v της ταχύτητας μένει σταθερό. Άρα, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \textit{σταθερή}$.

24. *Μια πέτρα βάρους 20N πέφτει από ύψος h=10m και βυθίζεται κατά h′=0.5m μέσα στο έδαφος. Βρείτε τη μέση δύναμη f που ασκεί το έδαφος στην πέτρα καθώς αυτή βυθίζεται.*

Λύση:



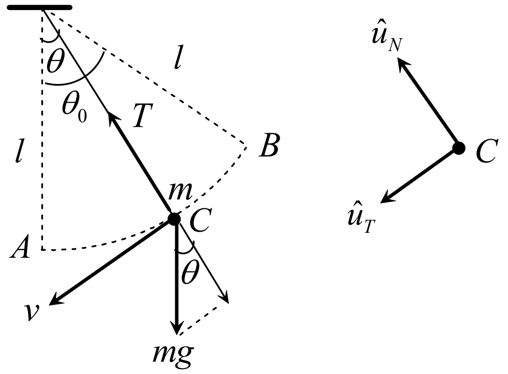
Το έδαφος βρίσκεται στο ύψος y=0. Η ταχύτητα της πέτρας στο αρχικό σημείο A και στο τελικό σημείο B είναι μηδέν. Στην πέτρα δρουν η συντηρητική δύναμη mg και η μη-συντηρητική δύναμη f. Η μεταβολή της ολικής μηχανικής ενέργειας (E_k+E_p) της πέτρας από το A ως το B ισούται με το έργο τής f:

$$\Delta(E_k+E_p) = (E_k+E_p)_B - (E_k+E_p)_A = W_f \ \Rightarrow$$
$$(0 - mgh') - (0 + mgh) = -f\,h' \ \Rightarrow$$
$$f = \frac{mg\,(h+h')}{h'} = 420N \ .$$

(Η δυναμική ενέργεια στο B είναι αρνητική γιατί το B βρίσκεται *κάτω* από το επίπεδο αναφοράς y=0. Το έργο τής f είναι αρνητικό διότι η f είναι αντίθετη στην κίνηση της πέτρας.)

25. *Δείξτε ότι η τάση του νήματος ενός εκκρεμούς είναι $T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$, όπου θ η στιγμιαία γωνία του νήματος με την κατακόρυφο και θ_0 η μέγιστη τιμή τής θ κατά την ταλάντωση (γωνιακό πλάτος ταλάντωσης).*

Λύση:



Καλούμε l το μήκος του νήματος. Οι δυνάμεις στο m είναι το βάρος mg και η τάση T του νήματος. Αναλύουμε την κίνηση σε δύο κάθετες διευθύνσεις: μια επιτρόχια (εφαπτομενική) στη διεύθυνση της ταχύτητας, και μια κεντρομόλο στη διεύθυνση του νήματος. Εφαρμόζουμε το νόμο του Νεύτωνα σε κάθε διεύθυνση ξεχωριστά. Για το σκοπό αυτό, εισάγουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{u}_T$ και $\hat{u}_N$ (σχεδιασμένα ξεχωριστά) στη στιγμιαία θέση C του m. (Θυμηθείτε ότι το $\hat{u}_T$ είναι εφαπτόμενο στην τροχιά, ενώ το $\hat{u}_N$ είναι κάθετο σε αυτήν και με φορά προς το εσωτερικό της. Η φορά τού $\hat{u}_T$ εκλέχθηκε αυθαίρετα.) Καλούμε $\vec{F}$ την ολική δύναμη στο m και $\vec{a}$ την επιτάχυνσή του:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \quad \Rightarrow$$

$$(mg\sin\theta\,\hat{u}_T - mg\cos\theta\,\hat{u}_N) + T\hat{u}_N = m\left(\frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{l}\hat{u}_N\right) \quad \Rightarrow$$

$$mg\sin\theta\,\hat{u}_T + (T - mg\cos\theta)\,\hat{u}_N = m\frac{dv}{dt}\hat{u}_T + m\frac{v^2}{l}\hat{u}_N \qquad (1)$$

Εξισώνουμε τώρα τους συντελεστές των $\hat{u}_N$ και $\hat{u}_T$ στα δύο μέλη τής (1):

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l} \quad \Rightarrow \quad T = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{l}\right) \qquad (2)$$

$$mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g\sin\theta \qquad (3)$$

Η (3) είναι μια διαφορική εξίσωση για την αλγεβρική τιμή v της ταχύτητας. Η επίλυσή της δεν είναι εύκολη υπόθεση, γι' αυτό αναζητούμε εναλλακτικούς δρόμους. Καταφεύγουμε λοιπόν στη διατήρηση της ενέργειας. Έστω E_p η δυναμική ενέργεια του m λόγω της βαρύτητας. Όπως γνωρίζουμε, η μεταβολή του αθροίσματος (E_k+E_p) ισούται με το έργο των δυνάμεων που δεν περιλαμβάνονται στην E_p : $\Delta(E_k+E_p) = W'$.

Εδώ, W' είναι το έργο της τάσης T. Επειδή όμως η T είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα, το έργο της είναι μηδέν: $W'=0$. Έτσι, $\Delta(E_k+E_p)=0$ <=> E_k+E_p = *σταθερό.* Ειδικά,

$$(E_k+E_p)_C = (E_k+E_p)_B \qquad (4)$$

Διαλέγουμε $E_p=0$ στο χαμηλότερο σημείο A (όπου $\theta=0$). Έτσι, στην τυχαία θέση C με γωνία θ,

$$E_p = mg\,(l - l\cos\theta) = mgl\,(1-\cos\theta)$$

[όπου $(l - l\cos\theta)$ είναι η *κατακόρυφη* απόσταση του C από το A]. Στο ακρότατο σημείο B της τροχιάς έχουμε $\theta=\theta_0$ και $v=0$. Η (4) τώρα δίνει

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta) = 0 + mgl(1-\cos\theta_0) \;\Rightarrow$$

$$v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad (5)$$

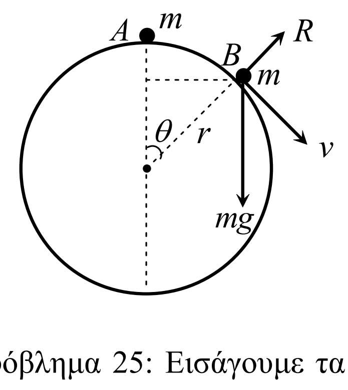
Αντικαθιστώντας την (5) στη (2), βρίσκουμε

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)\,.$$

Προσέξτε ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο του l.

26. *Ένα μικροσκοπικό αντικείμενο μάζας m ισορροπεί στο ανώτατο σημείο A μιας λείας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r (βλ. σχήμα). Δίνουμε στο αντικείμενο μια μικρή ώθηση ώστε να ολισθήσει πάνω στην επιφάνεια. (α) Βρείτε την κάθετη αντίδραση R από τη σφαίρα στο m, σαν συνάρτηση της γωνίας θ. (β) Βρείτε τη γωνία θ για την οποία το m θα διαχωριστεί από τη σφαίρα.*

Λύση: Έστω B μια τυχαία θέση τού m πάνω στη σφαίρα, με αντίστοιχη γωνία θ :



Εργαζόμαστε όπως στο Πρόβλημα 25: Εισάγουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{u}_T$ και $\hat{u}_N$ στο σημείο B (σχεδιάστε τα), εφαρμόζουμε το νόμο του Νεύτωνα, και παίρνουμε χωριστά τις συνιστώσες του στις δύο κάθετες διευθύνσεις (εφαπτόμενη και κάθετη στην επιφάνεια). Ο νόμος του Νεύτωνα για την κεντρομόλο δύναμη γράφεται

$$mg\cos\theta - R = m\frac{v^2}{r} \;\Rightarrow\; R = m\left(g\cos\theta - \frac{v^2}{r}\right) \qquad (1)$$

Η επιτρόχια συνιστώσα του νόμου οδηγεί σε μια διαφορική εξίσωση για την αλγεβρική τιμή v της ταχύτητας. Η τιμή αυτή μπορεί εναλλακτικά να προσδιοριστεί με διατήρηση της ενέργειας. Έτσι, $\Delta(E_k+E_p) = W'$, όπου E_p η δυναμική ενέργεια λόγω της βαρύτητας, και W' το έργο της αντίδρασης R (της δύναμης, δηλαδή, που δεν συμπεριλαμβάνεται στη δυναμική ενέργεια). Όμως, W'=0, αφού η R είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα. Έτσι, $\Delta(E_k+E_p)=0 \iff E_k+E_p = \textit{σταθερό}$. Ειδικά,

$$(E_k+E_p)_A = (E_k+E_p)_B \qquad (2)$$

Διαλέγουμε E_p=0 στο σημείο ισορροπίας A (όπου θ=0). Έτσι, στην τυχαία θέση B με γωνία θ,

$$E_p = -mg\,(r - r\cos\theta) = -mgr\,(1-\cos\theta)\ .$$

(Εξήγηση: Το σημείο B βρίσκεται σε *κατακόρυφη* απόσταση ($r - r\cos\theta$) *κάτω* από το σημείο αναφοράς A. Αυτό εξηγεί και το αρνητικό πρόσημο της E_p στο B.) Στο ανώτατο σημείο A έχουμε θ=0 και v=0. Η (2) τώρα δίνει

$$0+0=\frac{1}{2}mv^2 - mgr(1-\cos\theta) \ \Rightarrow$$

$$v^2 = 2gr(1-\cos\theta) \qquad (3)$$

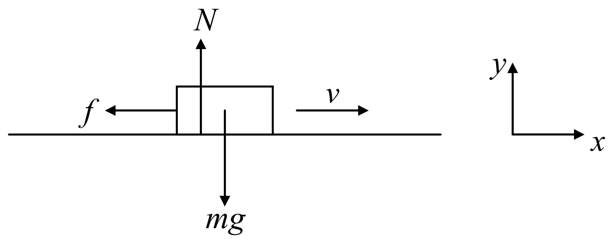
Αντικαθιστώντας την (3) στην (1), βρίσκουμε

$$R = mg\,(3\cos\theta - 2)\ .$$

Για να μείνει το m σε επαφή με τη σφαίρα, θα πρέπει $R \geq 0 \Rightarrow \cos\theta \geq 2/3$. Δηλαδή, το m διαχωρίζεται από τη σφαίρα όταν $\theta = \arccos(2/3)$.

27. *Σε έναν αγώνα χόκεϊ επί πάγου, ο παίκτης χτυπά το δίσκο δίνοντάς του αρχική ταχύτητα v_0 =20m/s. Ο δίσκος γλιστρά στον πάγο κινούμενος ευθύγραμμα, και διανύει απόσταση Δx=120m μέχρις ότου σταματήσει. Βρείτε το συντελεστή κινητικής τριβής μ μεταξύ του δίσκου και του πάγου. (g=9.8m/s^2)*

Λύση: Μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι με χρήση του νόμου του Νεύτωνα:



Οι δυνάμεις στο δίσκο είναι το βάρος mg, η κάθετη δύναμη N από τον πάγο, και η κινητική τριβή f. Εφαρμόζουμε το νόμο του Νεύτωνα στις κατευθύνσεις x και y:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Rightarrow \qquad\qquad -f = ma \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad N - mg = 0 \ \Rightarrow \quad N = mg \quad (2)$$

όπου a (= a_x) η αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης του δίσκου. Οι (1) και (2), μαζί με τη σχέση $f = \mu N$, δίνουν

$$ma = -\mu N = -\mu mg \quad => \quad a = -\mu g \quad (3)$$

Προσέξτε ότι $a<0$ ενώ $v>0$, έτσι ώστε $va<0$. Αυτό επιβεβαιώνει ότι η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη (βλ. Παρ.2.4) και μάλιστα ομαλά, αφού η επιτάχυνση a είναι σταθερή. Μπορούμε έτσι να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2a(x - x_0) = v_0^{\,2} + 2a\Delta x$$

όπου Δx η απόσταση που διανύει το m. Για τη δοσμένη, ολική απόσταση Δx στην οποία το κινητό τελικά σταματάει, η τελική ταχύτητα είναι v=0. Έτσι,

$$0 = v_0^{\,2} + 2a\Delta x \quad => \quad a = -\frac{v_0^{\,2}}{2\Delta x} \quad (4)$$

Συνδυάζοντας τις (3) και (4), βρίσκουμε

$$\mu = \frac{v_0^{\,2}}{2g\Delta x} \quad (5)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ΘΜΚΕ: Οι N και mg δεν παράγουν έργο, αφού είναι κάθετες στην ταχύτητα. Έτσι, το έργο της συνισταμένης δύναμης είναι αυτό που παράγει από μόνη της η τριβή f, και ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του δίσκου:

$$\Delta E_k = W_f \quad => \quad 0 - \frac{1}{2} m v_0^{\,2} = -f\,\Delta x\,.$$

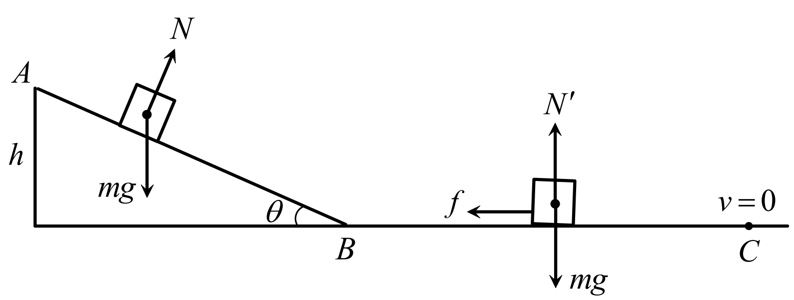
(Η τελική κινητική ενέργεια είναι μηδέν, αφού ο δίσκος σταματάει. Το αρνητικό πρόσημο στα δεξιά οφείλεται στο ότι η φορά τής f είναι αντίθετη στη μετατόπιση του δίσκου.) Έχουμε:

$$\frac{1}{2} m v_0^{\,2} = f\,\Delta x = \mu N\,\Delta x = \mu mg\Delta x \quad => \quad \mu = \frac{v_0^{\,2}}{2g\Delta x}\ ,$$

που είναι η (5). Αντικαθιστώντας τις δοσμένες τιμές, βρίσκουμε μ= 0.17.

28. *Ένας κύβος αφήνεται να ολισθήσει από την κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου μήκους l και γωνίας κλίσης θ, το οποίο πατάει πάνω σε οριζόντιο τραπέζι. Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ κύβου και κεκλιμένου επιπέδου, ενώ ο συντελεστής κινητικής τριβής του κύβου με το τραπέζι είναι μ. Πόσο μακριά από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου θα προχωρήσει ο κύβος μέχρι να σταματήσει;*

Λύση:



Κατά μήκος της διαδρομής AB, μήκους $AB=l$, στον κύβο δρα η συντηρητική δύναμη mg και η κάθετη αντίδραση N, η οποία δεν παράγει έργο (γιατί;). Έτσι,

$$\Delta(E_k+E_p) = W_N = 0 \quad => \quad E_k+E_p = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}\ .$$

Ειδικά,

$$(E_k+E_p)_A = (E_k+E_p)_B \ .$$

Παίρνοντας E_p=0 στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, και λαμβάνοντας υπόψη ότι v_A=0, έχουμε:

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_B{}^2 + 0 \quad => \quad v_B{}^2 = 2gh = 2gl\sin\theta \quad (1)$$

Κατά μήκος της διαδρομής BC (όπου C το σημείο στο οποίο σταματάει ο κύβος), μόνο η τριβή f παράγει έργο (γιατί;) και μάλιστα αρνητικό, αφού η f είναι αντίθετη στη μετατόπιση του κύβου. Από το ΘΜΚΕ,

$$\Delta E_k = E_{k,C} - E_{k,B} = W_f \quad => \quad 0 - \frac{1}{2}mv_B{}^2 = -f\,(BC) \quad =>$$

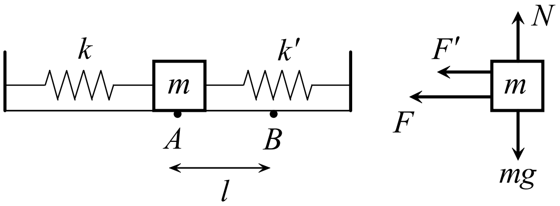
$$mv_B{}^2 = 2\,f\,(BC) = 2\mu N'(BC) = 2\mu mg(BC) \quad => \quad v_B{}^2 = 2\mu g(BC) \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2), βρίσκουμε

$$BC = \frac{h}{\mu} = \frac{l\sin\theta}{\mu} \ .$$

29. *Η μάζα m (βλ. σχήμα) είναι αρχικά στη θέση A όπου και τα δύο ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος (δεν έχουν υποστεί παραμόρφωση). Στη συνέχεια, η μάζα μετατοπίζεται κατά απόσταση l προς τα δεξιά, στη θέση B. Δεν υπάρχει τριβή μεταξύ της m και του οριζόντιου επιπέδου. (α) Αν η m αφεθεί ελεύθερη στη θέση B, βρείτε την ταχύτητά της τη στιγμή που περνάει από το A . (β) Βρείτε τη μέγιστη απόσταση αριστερά τού A στην οποία θα φτάσει η m . Δίδονται: m=4kg, l=0.2m, k=8N/m, k΄=5N/m .*

Λύση:



Οι δυνάμεις στο m είναι το βάρος mg, η κάθετη αντίδραση N από το επίπεδο, και οι F και F' από τα ελατήρια k και k', αντίστοιχα. Η N δεν παράγει έργο (γιατί;), ενώ η δυναμική ενέργεια λόγω της βαρύτητας είναι σταθερά μηδέν. Έτσι, η ολική δυναμική ενέργεια του m οφείλεται αποκλειστικά στα ελατήρια, και ισούται με

$$E_p = \frac{1}{2}k\,(\Delta\, l)^2 + \frac{1}{2}k'\,(\Delta\, l)^2 = \frac{1}{2}(\,k+k'\,)\,(\Delta\, l)^2$$

όπου $\Delta\, l$ η κοινή παραμόρφωση των δύο ελατηρίων. Επιπλέον,

$$\Delta(E_k+E_p) = W_N = 0 \quad => \quad E_k+E_p = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}\ .$$

(α) Στη θέση B, $\Delta\, l = l$ και $v_B = 0$, ενώ στη θέση A, $\Delta\, l = 0$. Έτσι,

$$(E_k + E_p)_B = (E_k + E_p)_A \quad => \quad 0 + \frac{1}{2}(\,k+k'\,)\,l^2 = \frac{1}{2}mv_A{}^2 + 0 \quad =>$$

$$v_A = l\sqrt{\frac{k+k'}{m}} = 0.36\,m/s \ .$$

(β) Έστω ότι το m σταματάει προσωρινά σε κάποιο σημείο C σε απόσταση x αριστερά τού A. Τότε, $v_B = v_C = 0$ και

$$(E_k + E_p)_B = (E_k + E_p)_C \quad \Rightarrow \quad 0 + \frac{1}{2}(k+k')\,l^2 = 0 + \frac{1}{2}(k+k')\,x^2 \quad \Rightarrow$$

$$x = l = 0.2\ m \ .$$

30. *Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης κατακόρυφα προς τα πάνω. Βρείτε την **ταχύτητα διαφυγής** του σώματος, δηλαδή, την ελάχιστη ταχύτητα εκτόξευσης ώστε το σώμα να απελευθερωθεί από τη βαρυτική έλξη της Γης και να διαφύγει στο διάστημα. Δίνονται η μάζα M και η ακτίνα R της Γης. (Η δυναμική ενέργεια του m στο πεδίο βαρύτητας της Γης είναι*

$$E_p(r) = -\,G\frac{Mm}{r} \ ,$$

όπου $r \geq R$ η απόσταση του m από το κέντρο της Γης.)

Λύση: Έστω v_0 η ταχύτητα εκτόξευσης. Η ολική μηχανική ενέργεια του m κατά την εκτόξευση είναι

$$E_0 = E_{k,0} + E_p(R) = \frac{1}{2}m v_0^{\,2} - G\frac{Mm}{R}$$

(διότι $r=R$ στην επιφάνεια της Γης). Ας υποθέσουμε τώρα ότι το m έχει αρκετή ενέργεια ώστε να διαφύγει από τη Γη και να φτάσει στο «άπειρο» ($r=\infty$), έχοντας εκεί και μια ταχύτητα v_∞ . Η ολική ενέργεια του m στο άπειρο είναι

$$E_\infty = E_{k,\infty} + E_p(\infty) = \frac{1}{2}m v_\infty^{\,2} + 0 = \frac{1}{2}m v_\infty^{\,2} \ .$$

Επειδή η μηχανική ενέργεια διατηρείται (αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα, που είναι μη-συντηρητική δύναμη),

$$E_0 = E_\infty \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}m v_0^{\,2} - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}m v_\infty^{\,2} \geq 0 \ \Rightarrow \ v_0^{\,2} \geq \frac{2GM}{R} \ \Rightarrow$$

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} \ .$$

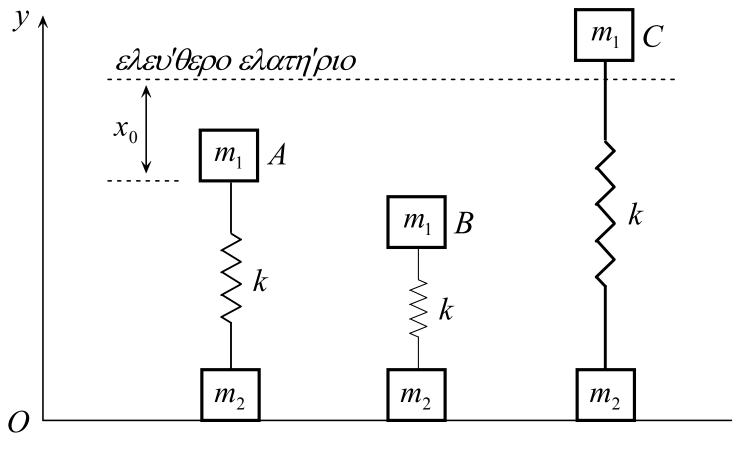
Η ταχύτητα διαφυγής είναι

$$v_{0,\min} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

ανεξάρτητα από τη μάζα m του σώματος. (Προσέξτε όμως ότι η αναγκαία κινητική ενέργεια διαφυγής *εξαρτάται* από τη μάζα του σώματος!)

31. *Δύο μάζες m_1 και m_2 συνδέονται κατακόρυφα με ελατήριο σταθεράς k, όπως στο σχήμα. Η πάνω μάζα m_1 βρίσκεται σε ισορροπία στη θέση A. Πιέζουμε τώρα την m_1 προς τα κάτω μέχρι τη θέση B και στη συνέχεια την αφήνουμε ελεύθερη. Η m_1 τότε κινείται προς τα πάνω μέχρι τη θέση C όπου σταματάει προσωρινά, πριν αρχίσει και πάλι να κινείται προς τα κάτω. (α) Δείξτε ότι οι κατακόρυφες αποστάσεις AB και AC είναι ίσες. (β) Βρείτε την κατακόρυφη μετατόπιση AB έτσι ώστε η μάζα m_2 να ανασηκωθεί ελάχιστα από το έδαφος όταν η m_1 φτάσει στο C.*

Λύση: Στις θέσεις A και B το ελατήριο προφανώς βρίσκεται σε συμπίεση σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Καλούμε x_0 τη συμπίεση του ελατηρίου όταν η m_1 είναι στη θέση ισορροπίας A. Για να ανασηκωθεί η m_2 θα πρέπει το ελατήριο να είναι σε *επέκταση* όταν η m_1 είναι στη θέση C. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το C βρίσκεται πάνω από το ύψος y που αντιστοιχεί στο φυσικό μήκος του ελεύθερου ελατηρίου:



Η συνθήκη ισορροπίας τής m_1 στη θέση A είναι

$$k\, x_0 = m_1\, g \qquad (1)$$

Η ολική μηχανική ενέργεια της m_1 σε μια τυχαία θέση y, είναι

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m_1 v^2 + m_1\, g\, y + \frac{1}{2} k\, x^2$$

όπου x η παραμόρφωση του ελατηρίου (συμπίεση ή επέκταση) σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Στις θέσεις B και C, $v_B = v_C = 0$. Επίσης, $x_B = x_0 + AB$, $x_C = AC - x_0$. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, $E_B = E_C$ =>

$$0 + m_1\, g\, y_B + \frac{1}{2} k\, (x_0 + AB)^2 = 0 + m_1\, g\, y_C + \frac{1}{2} k\, (AC - x_0)^2 \quad =>$$

$$\frac{1}{2} k\, [(x_0 + AB)^2 - (AC - x_0)^2\,] = m_1\, g\, (\, y_C - y_B\,) = m_1\, g\, (BC) \quad =>$$

$$\frac{1}{2} k\, [(AB)^2 - (AC)^2\,] + k\, x_0\, (AB{+}AC) = m_1\, g\, (BC)$$

ή, δοθέντος ότι $AB{+}AC = BC$,

$$\frac{1}{2} k\, [(AB)^2 - (AC)^2\,] = (m_1\, g - k\, x_0)(BC) = 0$$

λόγω της (1). Άρα, τελικά,

$$AB = AC \qquad (2)$$

Για να ανασηκωθεί η m_2 θα πρέπει το ελατήριο να της ασκήσει μια δύναμη προς τα πάνω, έστω και ελάχιστα μεγαλύτερη από το βάρος της :

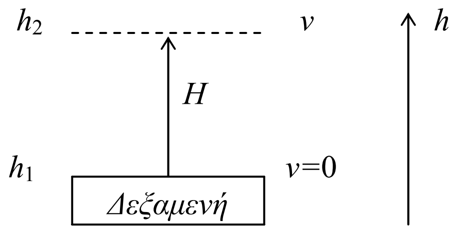
$$k\, x_C \geq m_2\, g \quad => \quad k\, (AC - x_0) \geq m_2\, g\, .$$

Αντικαθιστώντας $AC = AB$ και $k\, x_0 = m_1\, g$, λόγω των (2) και (1), βρίσκουμε

$$AB \geq \frac{(m_1 + m_2) g}{k} \; .$$

32. *Μια αντλία ανυψώνει νερό σε ύψος H πάνω από μια δεξαμενή, με ρυθμό α (μάζα νερού ανά μονάδα χρόνου). Το νερό φτάνει στο τελικό του ύψος έχοντας αποκτήσει ταχύτητα v. Βρείτε την ισχύ (παραγόμενο έργο ανά μονάδα χρόνου) της αντλίας.*

Λύση:



Έστω dm η μάζα του νερού που ανυψώνεται κατά H από την αντλία σε χρόνο dt. Τότε, ο ρυθμός ανύψωσης του νερού είναι

$$\alpha = \frac{dm}{dt} \qquad (1)$$

Το έργο dW που παράγει η αντλία σ' αυτό το χρονικό διάστημα ισούται με τη μεταβολή της ολικής μηχανικής ενέργειας της μάζας dm [βλ. σχέση (4.20)]:

$$dW = \Delta\,(E_k+E_p) = (E_k+E_p)_2 - (E_k+E_p)_1 = [\frac{1}{2}(dm)v^2 + (dm)gh_2] - [0 + (dm)gh_1]$$

όπου τα ύψη h_1 και h_2 μετρούνται από αυθαίρετο επίπεδο αναφοράς. Έτσι,

$$dW = \frac{1}{2}(dm)v^2 + (dm)g(h_2 - h_1) = \frac{1}{2}(dm)v^2 + (dm)gH\,.$$

Η ισχύς της αντλίας είναι

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}v^2 + \frac{dm}{dt}gH \quad \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$P = \frac{1}{2}\alpha v^2 + \alpha gH\ .$$

33. *Ένα σωματίδιο εκτελεί αρμονική ταλάντωση κατά μήκος του άξονα x, σύμφωνα με την εξίσωση x= A cosωt, όπου ω=2π/T. Βρείτε τα χρονικά διαστήματα στα οποία η κίνηση είναι επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη.*

Λύση: Το κριτήριο αξιολόγησης της κίνησης είναι το πρόσημο του γινομένου va, όπου v και a οι αλγεβρικές τιμές της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, αντίστοιχα:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\omega t\,, \quad a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos\omega t \quad \Rightarrow$$

$$va = \omega^3 A^2 \sin\omega t\cos\omega t = \frac{\omega^3 A^2}{2}\sin 2\omega t\ .$$

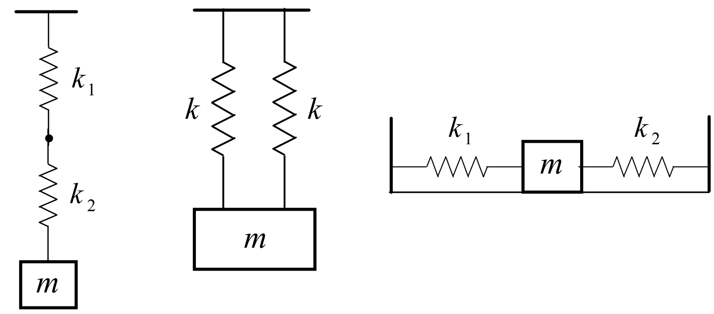
Η κίνηση είναι *επιταχυνόμενη* όταν

$$va > 0 \;\Rightarrow\; \sin 2\omega t > 0 \;\Rightarrow\; 2k\pi < 2\omega t < (2k+1)\pi \;\Rightarrow$$

$$k\pi < \omega t = \frac{2\pi t}{T} < k\pi + \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \frac{kT}{2} < t < \frac{(2k+1)T}{4}$$

όπου k = 0,1,2,... Θέτοντας k = 0 και k = 1, βρίσκουμε, αντίστοιχα, $0 < t < T/4$ και $T/2 < t < 3T/4$. (Βρείτε τα διαστήματα όπου η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.)

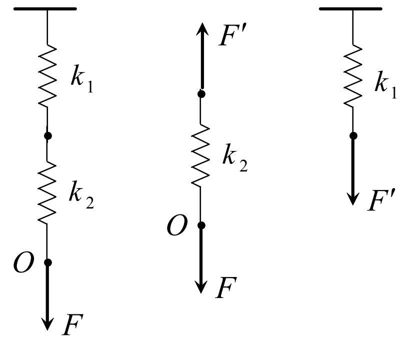
34. *Μια μάζα m μπορεί να συνδεθεί με δύο ελατήρια με τρεις διαφορετικούς τρόπους, όπως στο σχήμα. Βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης σε κάθε περίπτωση. (Οι μάζες των ελατηρίων είναι αμελητέες. Η οριζόντια επιφάνεια στο (γ) είναι λεία, και τα ελατήρια είναι σε επέκταση όταν η m ισορροπεί.)*



Λύση: Θα ακολουθήσουμε μια μέθοδο όμοια με αυτή που χρησιμοποιούμε σε προβλήματα με αντιστάσεις ή πυκνωτές στον Ηλεκτρισμό: Θα προσπαθήσουμε να αντικαταστήσουμε το σύστημα των δύο ελατηρίων με ένα ισοδύναμο ελατήριο το οποίο, όταν υφίσταται παραμόρφωση ίση με αυτή του συστήματος, ασκεί στα άκρα του την ίδια δύναμη. Θυμίζουμε (Παρ.5.4) ότι, όταν ένα ελατήριο σταθεράς k παραμορφώνεται (επεκτείνεται ή συμπιέζεται) κατά x, ασκεί στα δύο άκρα του δυνάμεις μέτρου $F=kx$, αντίθετες προς την παραμόρφωση. Αν τώρα προσαρτήσουμε μια μάζα m στο ένα άκρο του ελατηρίου και στερεώσουμε το άλλο άκρο, το σύστημα θα μπορεί να εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις στην οριζόντια ή την κατακόρυφη διεύθυνση, γύρω από τη θέση ισορροπίας τής m, με περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (1)$$

α) Κατακόρυφα ελατήρια k_1 και k_2 σε σειρά:



Υποθέστε ότι ασκούμε μια δύναμη F στο άκρο O του συστήματος των ελατηρίων. Από το νόμο δράσης-αντίδρασης, το σύστημα θα ασκήσει σ' εμάς μια αντίθετη δύναμη ίσου μέτρου F. Έστω x_1 και x_2 οι επιμέρους επιμηκύνσεις των k_1 και k_2 , αντίστοιχα. Η συνολική επιμήκυνση του συστήματος είναι $x= x_1+ x_2$. Θα δείξουμε ότι η δύναμη F που μας ασκεί το σύστημα είναι ανάλογη της συνολικής παραμόρφωσης x του συστήματος από το φυσικό του μήκος.

Καλούμε F' τη δύναμη που ασκεί το ένα ελατήριο στο άλλο. Από το νόμο του Νεύτωνα, επειδή το k_2 έχει σχεδόν μηδενική μάζα, η ολική δύναμη πάνω του είναι μηδέν, έτσι ώστε $F'=F$. Λαμβάνοντας υπόψη τις επιμέρους επιμηκύνσεις των ελατηρίων, έχουμε:

$$F = k_2\, x_2 = k_1\, x_1 \quad => \quad x_1 = F\,/\,k_1 \;,\quad x_2 = F\,/\,k_2 \;.$$

Έτσι,

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)F \qquad (2)$$

Ορίζουμε την *ισοδύναμη σταθερά* k' με τη σχέση

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \Leftrightarrow \quad k' = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \;.$$

Η (2) τότε γράφεται

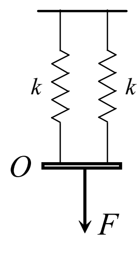
$$x = \frac{1}{k'}F \quad \Rightarrow \quad F = k'x \;.$$

Δηλαδή, όταν το σύστημα επιμηκύνεται κατά x, ασκεί δύναμη ανάλογη του x, σαν να ήταν ένα μοναδικό ελατήριο σταθεράς k'. Όταν τώρα κρεμάσουμε μια μάζα m στο σημείο O, το σύστημα θα εκτελεί ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας τής m με περίοδο που δίνεται από τη σχέση (1):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = 2\pi\left(\frac{m}{k_1} + \frac{m}{k_2}\right)^{1/2} \;.$$

Ειδικά, αν $k_1=k_2=k$, τότε $k'=k/2$ και $T=2\pi\sqrt{2m/k}$.

β) Παράλληλα, κατακόρυφα ελατήρια k:



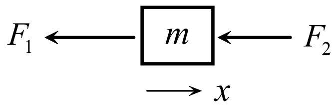
Υποθέστε ότι ασκούμε μια δύναμη F στο άκρο O του συστήματος, προκαλώντας επιμήκυνση x από το φυσικό του μήκος. Προφανώς, και τα δύο ελατήρια θα επεκταθούν κατά x. Από το νόμο δράσης-αντίδρασης, το σύστημα θα μας ασκήσει αντίθετη δύναμη ίσου μέτρου F, ίση με τη συνισταμένη των δυνάμεων από κάθε ελατήριο ξεχωριστά:

$$F = k\,x + k\,x = 2\,k\,x \equiv k'\,x\,, \quad \text{όπου} \quad k' = 2\,k\,.$$

Αν τώρα αναρτήσουμε μια μάζα m στο O, το σύστημα θα εκτελεί ταλαντώσεις με περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \;.$$

γ) Οριζόντια ελατήρια k_1 και k_2 , συνδεμένα με μάζα m τοποθετημένη πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο:



Η m αρχικά ισορροπεί, ενώ τα ελατήρια είναι σε επέκταση. Έστω τώρα ότι μετατοπίζουμε την m κατά x προς τα δεξιά. Η επέκταση του k_1 , τότε, αυξάνει κατά x, ενώ αυτή του k_2 ελαττώνεται κατά x. Έτσι, τα ελατήρια ασκούν στην m <u>επιπρόσθετες</u> δυνάμεις $F_1 = k_1 x$ και $F_2 = k_2 x$, και οι δύο προς τα αριστερά. Επειδή οι κατακόρυφες δυνάμεις στην m αλληλοαναιρούνται, και επειδή δεν υπάρχει τριβή, η συνισταμένη δύναμη στην m είναι

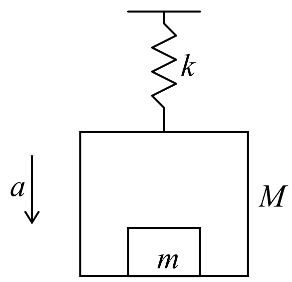
$$F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2)\, x \equiv k'\, x\,, \quad \text{όπου} \quad k' = k_1 + k_2 \;.$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k'}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \quad .$$

35. *Ένας ανελκυστήρας μάζας M κρέμεται από ελατήριο σταθεράς k. Ένα κιβώτιο μάζας m πατάει στο δάπεδο του ανελκυστήρα. Το σύστημα υφίσταται κατακόρυφη απομάκρυνση κατά απόσταση A από τη θέση ισορροπίας του, και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερο. Βρείτε τις τιμές τού A για τις οποίες το κιβώτιο δεν θα διαχωριστεί από τον ανελκυστήρα.*

Λύση:



Ας υποθέσουμε ότι ο ανελκυστήρας και το κιβώτιο κινούνται μαζί, σαν ένα σώμα, με κοινή επιτάχυνση a. Είναι σαν να κρεμάμε μια μάζα (M+m) από ένα ελατήριο k. Ένα τέτοιο σύστημα εκτελεί αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας του, με κυκλική συχνότητα $\omega = [k/(M+m)]^{1/2}$. Αν y είναι η στιγμιαία απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας, η αντίστοιχη *ολική* δύναμη στο σύστημα έχει μέτρο $F=ky$ [βλ. Παρ. 5.4, εξίσ.(5.20)]. Έτσι, η στιγμιαία επιτάχυνση του συστήματος είναι, κατά μέτρο,

$$a = \frac{F}{M+m} = \frac{k\,y}{M+m} \quad .$$

Δοθέντος ότι η μέγιστη τιμή της απομάκρυνσης ισούται με το πλάτος A της ταλάντωσης, $y_{\max}=A$, η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης είναι

$$a_{\max} = \frac{k\,A}{M+m} \qquad (1)$$

Τώρα, το κιβώτιο μπορεί να διαχωριστεί από το δάπεδο του ανελκυστήρα μόνο όταν αυτός επιταχύνεται προς τα κάτω. Για να αποτραπεί ο διαχωρισμός, η προς τα κάτω επιτάχυνση a του ανελκυστήρα δεν πρέπει ποτέ να ξεπεράσει κατά μέτρο την επιτάχυνση ελεύθερης πτώσης g του κιβώτιου:

$$a_{\max} \le g \overset{(1)}{\Rightarrow} A \le \frac{(M+m)g}{k} \quad .$$

36. *Θεωρούμε δύο σωματίδια* m_1 *και* m_2 *που υπόκεινται μόνο στην αμοιβαία τους αλληλεπίδραση (απομονωμένο σύστημα). Καλούμε* $\vec{F}_{12}$ *τη δύναμη στο* m_1 *λόγω του* m_2 *, και* $\vec{a}_{12}$ *την επιτάχυνση του* m_1 *ως προς το* m_2 *. (Τότε, αντίστοιχα,* $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ *και* $\vec{a}_{21} = -\vec{a}_{12}$ *.) Δείξτε ότι*

$$\vec{F}_{12} = \mu \vec{a}_{12} \qquad (1)$$

όπου μ *η **ανηγμένη μάζα** του συστήματος:*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Λύση: Έστω $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ οι επιταχύνσεις των m_1 , m_2 ως προς ένα *αδρανειακό* σύστημα αναφοράς. Από το νόμο του Νεύτωνα, και δοθέντος ότι οι μόνες δυνάμεις στο σύστημα των δύο σωματιδίων είναι αυτές που ασκούνται από το ένα σωματίδιο στο άλλο, έχουμε

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \ , \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = -\frac{\vec{F}_{12}}{m_2} \quad .$$

Έτσι,

$$\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu} \vec{F}_{12} \ \Rightarrow \ (1)$$

37. *Δείξτε ότι η διατήρηση της κινητικής ενέργειας είναι αδύνατη στην πλαστική κρούση.*

Λύση: Υποθέτουμε ότι τα σώματα m_1 και m_2 κινούνται κατά μήκος του άξονα x και, λίγο πριν την κρούση, έχουν ταχύτητες $\vec{v}_1 = v_1 \hat{u}_x$ και $\vec{v}_2 = v_2 \hat{u}_x$, ενώ, αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα (m_1+m_2) έχει ταχύτητα $\vec{V} = V \hat{u}_x$ (τα v_1, v_2 και V είναι *αλγεβρικές τιμές* και μπορούν να είναι θετικά ή αρνητικά). Η διατήρηση της ορμής δίνει

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V}$$

ή, βγάζοντας κοινό παράγοντα και απαλείφοντας το $\hat{u}_x$,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά την κρούση είναι

$$\Delta E_k = E_{k,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - E_{k,\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\, V^2 - (\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2) \ .$$

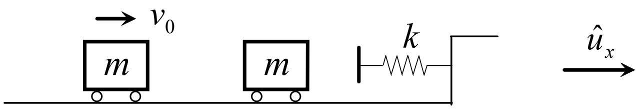
Αντικαθιστώντας το V από την (1), βρίσκουμε τελικά:

$$\Delta E_k = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2 = -\frac{1}{2}\mu\, {v_{12}}^2 \qquad (2)$$

όπου $v_{12} = v_1 - v_2$ η σχετική ταχύτητα των μαζών αμέσως πριν την κρούση, και όπου μ η *ανηγμένη μάζα* του συστήματος (βλ. Πρόβλ.36). Δοθέντος ότι $v_1 \neq v_2$ (αλλιώς δεν θα είχαμε κρούση!), η (2) μας δείχνει ότι $\Delta E_k \neq 0$. Δηλαδή, *η κινητική ενέργεια του συστήματος δεν διατηρείται*. Για παράδειγμα, αν $m_1 = m_2$ και $v_1 = -v_2$, η (1) δίνει V=0, έτσι ώστε το τελικό συσσωμάτωμα δεν έχει κινητική ενέργεια: όλη η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος έχει χαθεί. Σύμφωνα με το ΘΜΚΕ, η απώλεια της ενέργειας αυτής οφείλεται κατά κύριο λόγο στο έργο των εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσονται κατά την κρούση των δύο σωμάτων. Οι δυνάμεις αυτές ευθύνονται για την παραμόρφωση των σωμάτων κατά τη δημιουργία του συσσωματώματος.

38. *Δύο καρότσια με ίσες μάζες m=0.25kg τοποθετούνται σε έναν λείο, οριζόντιο διάδρομο, στο τέλος του οποίου είναι τοποθετημένο ένα ελατήριο σταθεράς k=50N/m (βλ. σχήμα). Στο αριστερό καρότσι δίνουμε ταχύτητα v_0=3m/s προς τα δεξιά, ενώ το δεξί καρότσι είναι αρχικά ακίνητο. Στη συνέχεια, τα δύο καρότσια συγκρούονται ελαστικά και το δεξί καρότσι πέφτει πάνω στο ελατήριο. Βρείτε τη μέγιστη συμπίεση που υφίσταται το ελατήριο.*

Λύση:



Οι δείκτες 1 και 2 αντιστοιχούν στο αριστερό και το δεξί καρότσι. Έστω $\vec{v}_1 = v_1 \hat{u}_x$ και $\vec{v}_2 = v_2 \hat{u}_x$ οι ταχύτητες των καροτσιών αμέσως μετά την ελαστική κρούση (τα v_1 και v_2 είναι αλγεβρικές τιμές). Η διατήρηση της ορμής δίνει

$$m v_0\, \hat{u}_x + 0 = m v_1\, \hat{u}_x + m v_2\, \hat{u}_x \;\Rightarrow\; v_0 = v_1 + v_2 \qquad (1)$$

Η κινητική ενέργεια επίσης διατηρείται:

$$\frac{1}{2} m {v_0}^2 + 0 = \frac{1}{2} m {v_1}^2 + \frac{1}{2} m {v_2}^2 \;\Rightarrow\; {v_0}^2 = {v_1}^2 + {v_2}^2 \qquad (2)$$

Υψώνοντας την (1) στο τετράγωνο και λαμβάνοντας υπόψη τη (2), βρίσκουμε ότι $v_1 v_2$=0. Η περίπτωση v_2=0 είναι αδύνατη, αφού η (1) θα έδινε $v_1 = v_0$ (δηλαδή, μετά την κρούση, το 1 θα συνέχιζε να κινείται προς τα δεξιά με την αρχική του ταχύτητα ενώ το 2 θα παρέμενε ακίνητο!). Έτσι, η μόνη δυνατή λύση των (1) και (2) είναι

$$v_1 = 0 \;,\quad v_2 = v_0 \;.$$

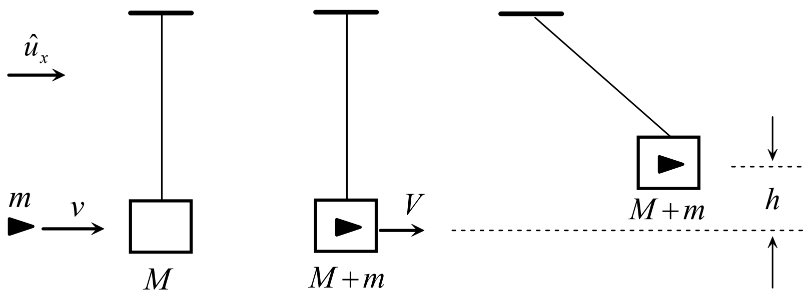
Δηλαδή, το 2 παίρνει την ταχύτητα του 1, το οποίο μετά την κρούση ακινητοποιείται.

Ας θεωρήσουμε τώρα το καρότσι 2 (δεξί) μετά την κρούση με το 1. Όπως είναι εύκολο να δούμε, η συνισταμένη δύναμη στο σώμα ισούται με αυτή που του ασκείται λόγω της συμπίεσης του ελατηρίου, όταν το σώμα και το ελατήριο βρίσκονται σε επαφή. Επειδή η δύναμη αυτή είναι συντηρητική, η ολική μηχανική ενέργεια του καροτσιού 2 μένει σταθερή. Λίγο πριν τη σύγκρουσή του με το ελατήριο, το 2 έχει την ταχύτητα v_0 που είχε αποκτήσει, ενώ το ελατήριο είναι ασυμπίεστο. Μετά τη σύγκρουση, το 2 θα σταματήσει προσωρινά τη στιγμή που το ελατήριο θα έχει υποστεί τη μέγιστη συμπίεσή του, έστω Δl. Η διατήρηση της ενέργειας δίνει

$$\frac{1}{2}m v_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \;\Rightarrow\; \Delta l = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \simeq 0.212\,m\ .$$

39. *Το **βαλλιστικό εκκρεμές** είναι μια διάταξη που χρησιμεύει στη μέτρηση της ταχύτητας ενός ταχέως κινούμενου βλήματος, π.χ., μιας σφαίρας πυροβόλου όπλου. Η διάταξη περιγράφεται στο ακόλουθο παράδειγμα: Ένας σερίφης πυροβολεί οριζόντια και από κοντινή απόσταση μια μικρή ξύλινη επιγραφή μάζας M που κρέμεται με σχοινί έξω από ένα σαλούν. Η μάζα της σφαίρας είναι m. Η σφαίρα σφηνώνεται στο ξύλο, το οποίο ξεκινά να αιωρείται σαν εκκρεμές, φτάνοντας σε κατακόρυφη απόσταση h πάνω από την αρχική του θέση. Βρείτε την αρχική ταχύτητα v της σφαίρας, καθώς και την απώλεια κινητικής ενέργειας κατά την κρούση της σφαίρας με την επιγραφή.*

Λύση:



Θεωρούμε το σύστημα «σφαίρα+επιγραφή». Η ορμή του συστήματος αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση είναι ίδια:

$$m v \hat{u}_x + 0 = (M+m)V\hat{u}_x \;\Rightarrow\; m v = (M+m)V \;\Rightarrow$$

$$v = \left(1 + \frac{M}{m}\right)V \quad (1)$$

(όπου V η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση). Μετά την κρούση, στο σύστημα δρουν δύο εξωτερικές δυνάμεις: το βάρος $(M+m)g$, που είναι συντηρητική δύναμη, και η τάση του νήματος, η οποία δεν παράγει έργο διότι είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα του συσσωματώματος. (Το κέντρο μάζας του συσσωματώματος διαγράφει τόξο κύκλου με ακτίνα το νήμα. Η ταχύτητά του είναι εφαπτόμενη στο τόξο, άρα κάθετη στην ακτινική τάση του νήματος.) Έτσι, μετά την κρούση, η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος μένει σταθερή. Ειδικά, η ενέργεια αμέσως μετά την κρούση (όπου το σύστημα έχει ταχύτητα V) ισούται με την ενέργεια στο ανώτατο ύψος h (όπου το σύστημα σταματά προσωρινά):

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 + 0 = 0 + (M+m)gh \;\Rightarrow\; V = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

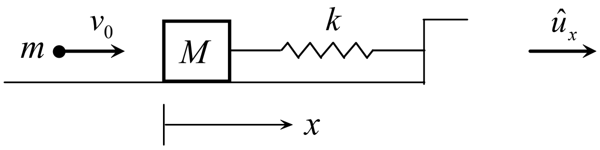
Από τις (1) και (2) παίρνουμε, τελικά,

$$v = \left(1 + \frac{M}{m}\right)\sqrt{2gh} \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2) και (3), βρίσκουμε την απώλεια κινητικής ενέργειας κατά την κρούση:

$$\Delta E_k = (E_k)_{\alpha\mu\acute{\varepsilon}\sigma\omega\varsigma\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - (E_k)_{\alpha\mu\acute{\varepsilon}\sigma\omega\varsigma\,\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}(M+m)V^2 - \frac{1}{2}m v^2 = -M\left(1+\frac{M}{m}\right)gh \, .$$

40. *Στο σχήμα, η σφαίρα (μάζας m) προσπίπτει με οριζόντια ταχύτητα και σφηνώνεται στο κομμάτι ξύλου (μάζας M), το οποίο είναι συνδεδεμένο με ελατήριο σταθεράς k. Ο συντελεστής τριβής (στατικής και κινητικής) μεταξύ του ξύλου και της οριζόντιας επιφάνειας είναι μ, ενώ το ελατήριο έχει αρχικά (πριν την κρούση) το φυσικό του μήκος. Βρείτε τις τιμές της αρχικής ταχύτητας v_0 της σφαίρας για τις οποίες το ξύλο τελικά θα ισορροπήσει.*

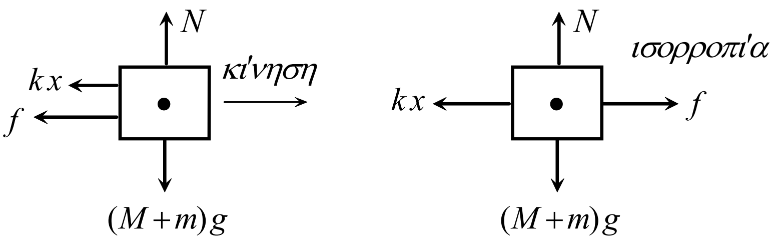


Λύση: Επειδή η κρούση είναι πλαστική, μόνο η ορμή διατηρείται:

$$\vec{P}_{\alpha\mu\varepsilon'\sigma\omega\varsigma\,\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\alpha\mu\varepsilon'\sigma\omega\varsigma\,\mu\varepsilon\tau\alpha'} \;\Rightarrow\; m v_0 \hat{u}_x + 0 = (M+m)V\hat{u}_x \;\Rightarrow$$

$$m v_0 = (M+m)V \quad (1)$$

όπου V η ταχύτητα του συστήματος (συσσωματώματος) «ξύλο+σφαίρα» αμέσως μετά την κρούση.



Στο συσσωμάτωμα (M+m) δρουν τέσσερις δυνάμεις: το βάρος (M+m)g, η κάθετη αντίδραση N από το επίπεδο, η τριβή f, και η δύναμη kx από το ελατήριο (όπου x η συμπίεση του ελατηρίου). Οι δυνάμεις (M+m)g και N αλληλοεξουδετερώνονται, έτσι δεν χρειάζεται να τις λάβουμε υπόψη. Οι μόνες δυνάμεις στο σύστημα, λοιπόν, είναι οι kx και f. Όταν, μετά την κρούση, το (M+m) κινείται προς τα δεξιά, η f είναι *κινητική* τριβή προς τα αριστερά και ισούται με $f = \mu N = \mu(M+m)g$. Αν όμως το (M+m) τελικά ισορροπήσει, η f θα είναι *στατική* τριβή προς τα δεξιά (γιατί;) και θα ισχύει ότι $f \leq \mu N$.

Η kx είναι συντηρητική δύναμη, με δυναμική ενέργεια

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \; .$$

Αμέσως μετά την κρούση, η αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι

$$E_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}(M+m)V^2 + 0 \quad (\text{διότι } x{=}0 \;=>\; E_p{=}0)\,.$$

Όταν το ξύλο σταματήσει, έχοντας διανύσει απόσταση x προς τα δεξιά (οπότε και η συμπίεση του ελατηρίου στη θέση αυτή θα είναι επίσης x), η τελική μηχανική ενέργεια του συστήματος θα είναι

$$E_{\tau\varepsilon\lambda} = 0 + \frac{1}{2}kx^2\,.$$

Μέσα σ' αυτό το διάστημα, η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος θα ισούται με το έργο της *κινητικής* τριβής f (αφού το βάρος και η κάθετη αντίδραση N δεν παράγουν έργο). Λαμβάνοντας υπόψη ότι η φορά τής f είναι αντίθετη στη μετατόπιση, έχουμε:

$$\Delta E = E_{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi} = W_f \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 = -f\,x = -\mu(M+m)gx \;\Rightarrow$$

$$kx^2 + 2\mu(M+m)gx - (M+m)V^2 = 0\,.$$

Θέτοντας $\lambda = \dfrac{M+m}{k}$, γράφουμε

$$x^2 + 2\mu\lambda gx - \lambda V^2 = 0 \quad (2)$$

Κρατώντας μόνο τη θετική ρίζα τής (2) (διότι $x \geq 0$), έχουμε

$$x = -\mu\lambda g + \sqrt{\mu^2\lambda^2 g^2 + \lambda V^2} \quad (3)$$

Η (3) προσδιορίζει τη θέση όπου το ξύλο σταματά (έστω προσωρινά), ως προς την αρχική θέση ισορροπίας του. Τώρα, για να ισορροπήσει το ξύλο στη νέα αυτή θέση (να μην αρχίσει, δηλαδή, να κινείται και πάλι προς τα αριστερά), θα πρέπει η *στατική* τριβή να εξουδετερώνει πλήρως τη δύναμη από το ελατήριο: $f = kx$. Άρα,

$$kx = f \leq f_{\max} = \mu N = \mu(M+m)g \;\Rightarrow\; kx \leq \mu\lambda kg \;\Rightarrow$$

$$x \leq \mu\lambda g \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (4), και λύνοντας ως προς V, βρίσκουμε

$$V \leq \mu g\sqrt{3\lambda} \quad (5)$$

Λύνοντας την (1) ως προς V, και αντικαθιστώντας στην (5), βρίσκουμε τελικά:

$$v_0 \leq \left(1 + \frac{M}{m}\right)\mu g\sqrt{3\lambda} \qquad \text{όπου} \qquad \lambda = \frac{M+m}{k}\,.$$

41. *Ένα σώμα, που είναι αρχικά ακίνητο, εκρήγνυται και διασπάται σε δύο κομμάτια με μάζες m_1 και m_2. (α) Δείξτε ότι οι κινητικές ενέργειες των θραυσμάτων είναι αντιστρόφως ανάλογες των μαζών τους. (β) Αν Q είναι η ενέργεια που απελευθερώνεται με την έκρηξη, βρείτε τις κινητικές ενέργειες των δύο θραυσμάτων.*

Λύση: (α) Επειδή η έκρηξη λαμβάνει χώρα στιγμιαία, και επειδή κατά τη διάρκειά της οι εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα είναι σχεδόν αμελητέες σε σχέση με τις εσωτερικές, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ορμή του συστήματος αμέσως πριν και αμέσως μετά την έκρηξη είναι ίδια (βλ. και Παρ.6.6):

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\alpha'} \;\Rightarrow\; 0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \;\Rightarrow\; \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

όπου $\vec{p}_1$ και $\vec{p}_2$ οι ορμές των δύο θραυσμάτων. Αν p_1 και p_2 είναι τα μέτρα των ορμών αυτών, τότε $p_1 = p_2 \equiv p$. Τώρα, γενικά, η κινητική ενέργεια ενός σώματος μάζας m και ορμής μέτρου p ισούται με

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \qquad \text{(δείξτε το!)} .$$

Έτσι,

$$E_{k,1} = \frac{p_1^{\,2}}{2m_1} = \frac{p^{\,2}}{2m_1} \quad , \quad E_{k,2} = \frac{p_2^{\,2}}{2m_2} = \frac{p^{\,2}}{2m_2}$$

και, διαιρώντας κατά μέλη,

$$\frac{E_{k,1}}{E_{k,2}} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (1)$$

(β) Έστω τώρα ότι

$$E_{k,1} + E_{k,2} = Q \ .$$

Εφαρμόζοντας ιδιότητες αναλογιών στην (1), έχουμε:

$$\frac{E_{k,1}}{E_{k,1}+E_{k,2}} = \frac{m_2}{m_1+m_2} \quad , \quad \frac{E_{k,1}+E_{k,2}}{E_{k,2}} = \frac{m_1+m_2}{m_1} \ .$$

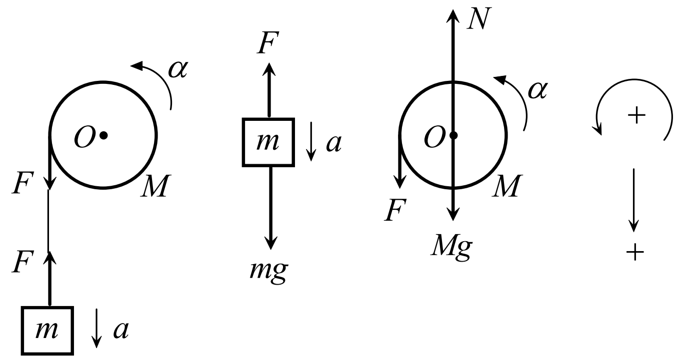
Άρα,

$$E_{k,1} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\, Q \quad , \quad E_{k,2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\, Q \ .$$

Προσέξτε ότι, αν $m_1 << m_2$, τότε $E_{k,2} \simeq 0$ και $E_{k,1} \simeq Q$. Δηλαδή, σχεδόν όλη η απελευθερούμενη ενέργεια Q γίνεται κινητική ενέργεια του μικρότερου θραύσματος. Κάτι τέτοιο παρατηρείται, για παράδειγμα, κατά τις ραδιενεργές εκπομπές των πυρήνων των ατόμων.

42. *Ένας τροχός μάζας M και ακτίνας R μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, O. Ένα νήμα, που είναι τυλιγμένο γύρω από τον τροχό, έχει προσδεθεί σε αντικείμενο μάζας m. Καθώς το νήμα ξετυλίγεται, η μάζα m κινείται προς τα κάτω ενώ ο τροχός περιστρέφεται. Να βρεθούν (α) η γραμμική επιτάχυνση a του m, (β) η γωνιακή επιτάχυνση* α *του τροχού, (γ) η τάση F του νήματος, και (δ) η αντίδραση N στο σημείο στήριξης O. (Η ροπή αδρανείας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής είναι* $I=\frac{1}{2}MR^2$*.)*

Λύση: Το m εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση, ενώ το M μόνο περιστροφική. Για τη μεταφορική κίνηση παίρνουμε τη θετική φορά προς τα κάτω. Για την περιστροφική, παίρνουμε ως θετική φορά περιστροφής την αριστερόστροφη. Ισοδύναμα, καλούμε z τον άξονα περιστροφής, με διεύθυνση κάθετη στη σελίδα, και παίρνουμε τη θετική φορά του προς τα *έξω* (προς εμάς), σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού:



Η εξίσωση μεταφορικής κίνησης του m είναι

$$mg - F = ma \quad (1)$$

Ο τροχός M δεν εκτελεί μεταφορική κίνηση, άρα

$$Mg + F - N = 0 \;\Rightarrow\; N = Mg + F \quad (2)$$

Η εξίσωση περιστροφικής κίνησης του M είναι $\Sigma T_z = I\alpha$, όπου α η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και ΣT_z η z-συνιστώσα της ολικής ροπής ως προς O (ίση με το άθροισμα των z-συνιστωσών των ροπών όλων των επιμέρους δυνάμεων). Οι Mg και N περνούν από το O, έτσι δεν προκαλούν ροπή. Η ολική ροπή στο M, λοιπόν, οφείλεται αποκλειστικά στην τάση F του νήματος και είναι στη θετική φορά, αφού η F τείνει να στρέψει τον τροχό αριστερόστροφα. Έχουμε [βλ. Παρ.(7.5)]:

$$\sum T_z = \sum (RF_T) = FR$$

έτσι ώστε

$$FR = I\alpha \;\Rightarrow\; F = \frac{I}{R}\alpha \quad (3)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η ταχύτητα με την οποία κατέρχεται το m είναι ίση, κατά μέτρο, με την ταχύτητα περιστροφής $R\omega$ όλων των σημείων της περιφέρειας του τροχού (όπου ω η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού). Όμοια, η επιτάχυνση a του m ισούται με την *επιτρόχια* επιτάχυνση $R\alpha$ των σημείων της περιφέρειας του τροχού. Δηλαδή,

$$a = R\alpha \quad (4)$$

Οι (3) και (4) δίνουν

$$F = \frac{I}{R^2}a = \frac{1}{R^2}(\frac{1}{2}MR^2)a \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}Ma \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (1), βρίσκουμε

$$a = \frac{2mg}{2m + M} \qquad (6)$$

Η (4) τότε δίνει

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2mg}{(2m + M)R} \quad .$$

Από τις (5) και (6), παίρνουμε

$$F = \frac{mMg}{2m + M} \qquad (7)$$

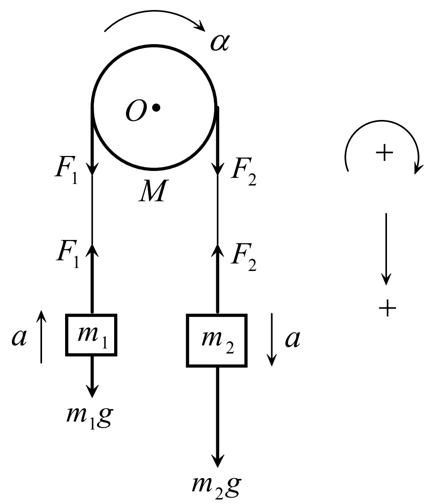
Οι (2) και (7), τέλος, δίνουν

$$N = Mg\left(1 + \frac{m}{2m + M}\right) .$$

Τι θα συμβεί αν η μάζα του τροχού είναι αμελητέα ($M = 0$);

43. *Στο σχήμα, το νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από τον τροχό. Δίνονται η μάζα M και η ακτίνα R του τροχού, και οι μάζες m_1, m_2 των δύο αντικειμένων που έχουν προσδεθεί στις άκρες του νήματος, όπου $m_1 < m_2$. Βρείτε τις γραμμικές επιταχύνσεις των δύο μαζών, τη γωνιακή επιτάχυνση α του τροχού, και τις τάσεις F_1, F_2 του νήματος. (Η ροπή αδρανείας του τροχού είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.)*

Λύση: Για τη μεταφορική κίνηση των m_1 και m_2 παίρνουμε τη θετική φορά προς τα κάτω. Για την περιστροφική κίνηση του M παίρνουμε ως θετική φορά περιστροφής τη δεξιόστροφη. Δηλαδή, θεωρούμε ότι ο άξονας περιστροφής z, κάθετος στη σελίδα, έχει θετική φορά προς τα *μέσα*. Υποθέτουμε αυθαίρετα ότι ο τροχός επιταχύνεται δεξιόστροφα και, αντίστοιχα, οι m_1, m_2 επιταχύνονται όπως στο σχήμα. Αν η υπόθεσή μας είναι σωστή, στο τέλος θα βρούμε θετικές τιμές για τα μέτρα των επιταχύνσεων, αλλιώς οι τιμές που θα προκύψουν θα είναι αρνητικές.



(Σε αντίθεση με το Πρόβλημα 11, όπου η τάση του νήματος ήταν κοινή για όλο το νήμα και δεν επηρεαζόταν από την παρουσία της τροχαλίας, εδώ το νήμα είναι *τυλιγμένο* γύρω από τον τροχό χωρίς να ολισθαίνει πάνω του, πράγμα που επιτρέπει στα δύο τμήματα του νήματος να αναπτύσσουν ανεξάρτητες τάσεις F_1 και F_2.)

Οι εξισώσεις κίνησης για τα m_1 και m_2 είναι

$$m_1 g - F_1 = -m_1 a \;\Rightarrow\; F_1 - m_1 g = m_1 a \quad (1)$$

$$m_2 g - F_2 = m_2 a \quad (2)$$

Προσέξτε ότι οι γραμμικές επιταχύνσεις των m_1, m_2 είναι ίσες μεταξύ τους κατά μέτρο, και ισούνται με την *επιτρόχια* επιτάχυνση $R\alpha$ των σημείων της περιφέρειας του τροχού:

$$a = R\alpha \quad (3)$$

(τα a και α παριστούν *μέτρα*, άρα είναι εξ ορισμού θετικά). Η εξίσωση περιστροφικής κίνησης του M είναι $\Sigma T_z = I\alpha$. Από τις δυνάμεις που δρουν πάνω στον τροχό, μόνο οι τάσεις F_1 και F_2 προκαλούν ροπή ως προς το O (ποιες είναι οι υπόλοιπες δυνάμεις;). Η ροπή τής F_2 είναι θετική, ενώ αυτή της F_1 αρνητική (γιατί;). Έχουμε:

$$\sum T_z = \sum (RF_T) = F_2 R - F_1 R = (F_2 - F_1)R \; .$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας και την (3),

$$(F_2 - F_1)R = I\alpha \;\Rightarrow\; F_2 - F_1 = \frac{I}{R}\alpha = \frac{I}{R^2}a = \frac{1}{R^2}(\frac{1}{2}MR^2)a \;\Rightarrow$$

$$F_2 - F_1 = \frac{1}{2}Ma \quad (4)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2), λύνοντας ως προς $(F_2 - F_1)$, και συγκρίνοντας με την (4), βρίσκουμε

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}} \qquad \text{και} \qquad \alpha = \frac{a}{R} = \frac{(m_2 - m_1)g}{\left(m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}\right)R} \; .$$

Παρατηρούμε ότι $a > 0$ και $\alpha > 0$ (αφού $m_1 < m_2$). Άρα, η φορά που υποθέσαμε για τις επιταχύνσεις ήταν σωστή. Από τις (1) και (2) βρίσκουμε τώρα εύκολα τις τάσεις F_1 και F_2 (άσκηση).

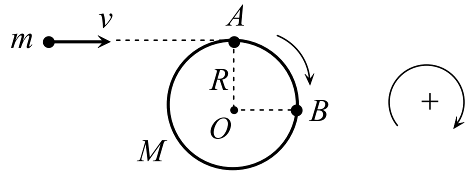
Αν ο τροχός θεωρηθεί *αβαρής* (M=0), τότε, όπως μπορούμε να δείξουμε,

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2} \quad , \qquad F_1 = F_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \; .$$

Η διάταξη που περιγράψαμε καλείται *μηχανή του Atwood* και χρησιμεύει για τη μελέτη της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, καθώς και για τον πειραματικό προσδιορισμό τού g. Επιλέγοντας τις μάζες m_1 και m_2 έτσι ώστε η διαφορά τους $(m_2 - m_1)$ να είναι πολύ μικρή, επιτυγχάνουμε μια τιμή a της επιτάχυνσης αρκετά μικρή ώστε να είναι εύκολα μετρήσιμη.

44. *Ένας ξύλινος δίσκος μάζας M και ακτίνας R μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβή γύρω από οριζόντιο καρφί που περνάει από το κέντρο του, O. Μια σφαίρα μάζας m και οριζόντιας ταχύτητας v χτυπάει το δίσκο στο ανώτατο σημείο του, A, και σφηνώνεται εκεί, θέτοντας το δίσκο σε περιστροφή. Βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση της σφαίρας στο σημείο B, όπου η γωνία AOB είναι π/2. (Η ροπή αδρανείας του δίσκου είναι* $I=\frac{1}{2}MR^2$.*)*

Λύση: Παίρνουμε τη δεξιόστροφη φορά περιστροφής σαν θετική. Δηλαδή, θεωρούμε ότι ο άξονας περιστροφής z (καρφί), κάθετος στη σελίδα, έχει θετική φορά προς τα *μέσα* (αυτή, εξ ορισμού, είναι και η φορά του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{u}_z$):



Καλούμε ω_A και ω_B τις γωνιακές ταχύτητες του δίσκου όταν η σφαίρα βρίσκεται στις θέσεις A (αμέσως μετά την κρούση) και B. Καλούμε v_A και v_B τις ταχύτητες της σφαίρας στις αντίστοιχες θέσεις. Προφανώς,

$$v_A = R\omega_A \ , \quad v_B = R\omega_B \qquad (1)$$

Θεωρούμε το σύστημα «σφαίρα+δίσκος». Η στροφορμή του συστήματος ως προς το O αμέσως πριν την κρούση, ισούται με τη στροφορμή αμέσως μετά την κρούση:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\alpha'} \ \Rightarrow \ mRv\,\hat{u}_z + 0 = mRv_A\,\hat{u}_z + I\omega_A\,\hat{u}_z \ \Rightarrow$$

$$mRv = mRv_A + I\omega_A = mR^2\omega_A + \frac{1}{2}MR^2\omega_A \ \Rightarrow$$

$$\omega_A = \frac{2mv}{(2m+M)R} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2),

$$v_A = \frac{2mv}{2m+M} \qquad (3)$$

(Προσέξτε ότι, μετά την ενσωμάτωση της σφαίρας στο δίσκο, το κέντρο μάζας του συστήματος *δεν* συμπίπτει με το σταθερό σημείο O αλλά περιστρέφεται κι αυτό με το δίσκο.)

Για να βρούμε την ω_B θα εφαρμόσουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας (θυμίζουμε ότι δεν υπάρχει τριβή στο σημείο στήριξης). Για τη δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας, επιλέγουμε E_p=0 στο οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το O. Οι εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα είναι τα βάρη mg και Mg και η αντίδραση N από το καρφί. Η Mg εφαρμόζεται σταθερά στο κέντρο μάζας O του δίσκου και αντιστοιχεί σε δυναμική ενέργεια $E_{p,M}$=0. Η mg αντιστοιχεί σε δυναμική ενέργεια $E_{p,m}=mgy$, όπου y η (στιγμιαία) κατακόρυφη απόσταση του m από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το O. Η N δεν παράγει έργο (W_N=0) αφού το σημείο εφαρμογής της, O, δεν μετακινείται. Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος δίνεται από τη σχέση $\Delta E=W_N=0$, έτσι ώστε E=*σταθερό*. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για τις δύο στιγμές όπου η σφαίρα βρίσκεται στις θέσεις *A* και *B*, λαμβάνοντας υπόψη και τις σχέσεις (1):

$$E_A = \frac{1}{2}mv_A{}^2 + \frac{1}{2}I\omega_A{}^2 + mgR = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega_A{}^2 + mgR \ ,$$

$$E_B = \frac{1}{2}mv_B{}^2 + \frac{1}{2}I\omega_B{}^2 + 0 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega_B{}^2 \ .$$

Εξισώνοντας $E_A = E_B$, βρίσκουμε

$$\omega_B = \left[\omega_A{}^2 + \frac{4mg}{(2m+M)R}\right]^{1/2} \qquad (4)$$

όπου η ω_A δίνεται από την (2). Η δεύτερη από τις σχέσεις (1), τότε, δίνει την v_B .

Θέλουμε τώρα την επιτάχυνση a_B του *m* στη θέση *B*. Το *m* εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας *R*. Αν α_B είναι η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου στη θέση *B*, έχουμε [βλ. σχέσεις (2.36) και (2.37)]:

$$a_B = |\vec{a}_B| = \sqrt{a_T{}^2 + a_N{}^2} \qquad \text{όπου} \qquad a_T = R\alpha_B \ , \ a_N = R\omega_B{}^2 \ .$$

Έτσι,

$$a_B = R\sqrt{\alpha_B{}^2 + \omega_B{}^4} \qquad (5)$$

Για να βρούμε την α_B , θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\sum T_z = I_{o\lambda}\ \alpha_B \qquad (6)$$

όπου ΣT_z η *z*-συνιστώσα της ολικής εξωτερικής ροπής ως προς *O* στη θέση *B* (ίση με το άθροισμα των *z*-συνιστωσών των ροπών των επιμέρους δυνάμεων), και $I_{o\lambda}$ η *ολική* ροπή αδρανείας του συστήματος «σφαίρα+δίσκος». Οι δυνάμεις *Mg* και *N* διέρχονται από το *O*, άρα δεν παράγουν ροπή. Έτσι, η ολική ροπή οφείλεται αποκλειστικά στην *mg* και είναι στη θετική φορά, αφού η *mg* τείνει να στρέψει το δίσκο δεξιόστροφα:

$$\sum T_z = mgR \quad \textit{όταν η m βρίσκεται στη θέση B .}$$

Για να βρούμε την $I_{o\lambda}$, εργαζόμαστε ως εξής: Χωρίζουμε το δίσκο *M* σε στοιχειώδεις μάζες m_i σε αποστάσεις r_i από τον άξονα περιστροφής. Δοθέντος ότι η σφαίρα *m* απέχει κατά *R* από τον άξονα, έχουμε:

$$I_{o\lambda} = \sum_i m_i r_i^2 + mR^2 = I + mR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2 \ .$$

Η (6) τώρα δίνει:

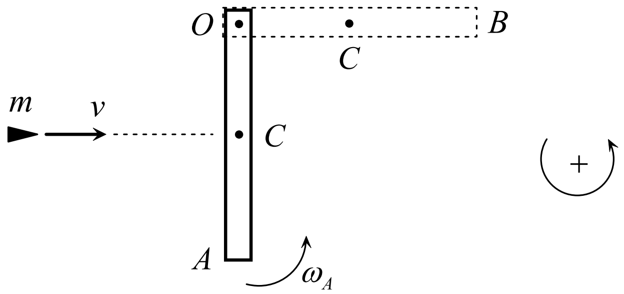
$$mgR = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\alpha_B \ \Rightarrow \ \alpha_B = \frac{2mg}{(2m+M)R} \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας τις (4) και (7) στην (5), βρίσκουμε την a_B .

Άσκηση: Υποθέστε τώρα ότι η σφαίρα δεν ενσωματώνεται στο δίσκο αλλά ανακλάται στο σημείο *A*, δίνοντας στο δίσκο μια αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_A . Ποια θα είναι η γωνιακή ταχύτητα ω_B και η γωνιακή επιτάχυνση α_B του δίσκου όταν το σημείο πρόσκρουσης πάει στη θέση *B*; (Προσέξτε ότι τώρα $I_{o\lambda} = I$. Υπάρχει εξωτερική ροπή;)

45. *Μια ράβδος μήκους l και μάζας M μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβή γύρω από οριζόντιο καρφί που περνάει από το ένα άκρο της, O. Μια σφαίρα μάζας m προσκρούει με οριζόντια ταχύτητα στο κέντρο C της ράβδου και ενσωματώνεται σε αυτήν. (α) Βρείτε την ταχύτητα v της σφαίρας έτσι ώστε η ράβδος να φτάσει στην οριζόντια θέση (όπου θα σταματήσει στιγμιαία). (β) Βρείτε την επιτάχυνση (γωνιακή και γραμμική) του κέντρου C της ράβδου όταν αυτή βρίσκεται στην οριζόντια θέση. (Η ροπή αδρανείας της ράβδου είναι $I=\frac{1}{3}Ml^2$.)*

Λύση: Ορίζουμε σαν θετική φορά περιστροφής την αριστερόστροφη. Δηλαδή, ο οριζόντιος άξονας περιστροφής z (καρφί), κάθετος στη σελίδα, έχει θετική φορά προς τα *έξω* (αυτή είναι και η φορά τού $\hat{u}_z$):



Καλούμε ω_A τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση, όταν η ράβδος είναι ακόμα κατακόρυφη (θέση A). Στην τελική, οριζόντια θέση B, η ράβδος σταματά στιγμιαία, οπότε ω_B=0. Εργαζόμαστε όπως στο Πρόβλημα 44: Θεωρούμε το σύστημα «σφαίρα+ράβδος». Εφαρμόζουμε διατήρηση της στροφορμής ως προς O κατά την κρούση:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{L}_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} \;\Rightarrow\; mv\left(\frac{l}{2}\right)\hat{u}_z+0=mv_A\left(\frac{l}{2}\right)\hat{u}_z+I\omega_A\,\hat{u}_z$$

(όπου v_A η ταχύτητα της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση). Αντικαθιστώντας την έκφραση για το I, και λαμβάνοντας υπόψη ότι $v_A=\frac{l}{2}\,\omega_A$, βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}m\,l\,v=\left(\frac{m}{4}+\frac{M}{3}\right)l^2\omega_A \;\Rightarrow\; v=\frac{3m+4M}{6m}\,l\omega_A \qquad (1)$$

Για να βρούμε το ω_A θα εφαρμόσουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας. Παίρνουμε τη μηδενική στάθμη της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας σε ύψος $l/2$ κάτω από το O. Οι εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα είναι τα βάρη mg και Mg και η αντίδραση N από το καρφί. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$E_p = E_{p,m} + E_{p,M} = m\,g\,y + M\,g\,y = (m+M)\,g\,y$$

όπου y η (στιγμιαία) κάθετη απόσταση του C από το οριζόντιο επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας [βλ. και Παρ.7.9, εξίσ.(7.66)]. Η N δεν παράγει έργο, έτσι η μηχανική ενέργεια του συστήματος μένει σταθερή. Για τις δύο ακραίες θέσεις A και B, έχουμε (λαμβάνοντας υπόψη ότι y_A=0, y_B=$l/2$ και ω_B=0):

$$E_A=\frac{1}{2}I_{o\lambda}\,\omega_A^{\;2}+(m+M)g\,y_A=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{4}+\frac{M}{3}\right)l^2\omega_A^{\;2}+0 \;,$$

$$E_B=\frac{1}{2}I_{o\lambda}\,\omega_B^{\;2}+(m+M)g\,y_B=0+(m+M)g\,\frac{l}{2} \;,$$

όπου θέσαμε

$$I_{ολ} = \frac{1}{3}Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{4} + \frac{M}{3}\right)l^2 \ .$$

Εξισώνοντας $E_A = E_B$, βρίσκουμε

$$\omega_A = \left[\frac{12(m+M)g}{(3m+4M)l}\right]^{1/2} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1), έχουμε

$$v = \frac{1}{6m}\left[12(m+M)(3m+4M)gl\right]^{1/2} \ .$$

Η γωνιακή επιτάχυνση α_B στη θέση B βρίσκεται από τη σχέση

$$\sum T_z = I_{ολ}\alpha_B = \left(\frac{m}{4} + \frac{M}{3}\right)l^2\alpha_B \qquad (3)$$

Η αντίδραση N δεν παράγει ροπή ως προς το O, σε αντίθεση με τα βάρη mg και Mg που προκαλούν ροπή κατά την αρνητική φορά (αφού τείνουν να στρέψουν τη ράβδο δεξιόστροφα). Οι mg και Mg ασκούνται στο κέντρο C της ράβδου. Στην οριζόντια θέση B,

$$\sum T_z = -mg\frac{l}{2} - Mg\frac{l}{2} = -\frac{1}{2}(m+M)gl \ .$$

Αντικαθιστώντας στην (3), παίρνουμε την *αλγεβρική τιμή* της γωνιακής επιτάχυνσης:

$$\alpha_B = -\frac{6(m+M)g}{(3m+4M)l} \qquad (4)$$

Τώρα, το σημείο C εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $l/2$. Το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσής του στη θέση B είναι

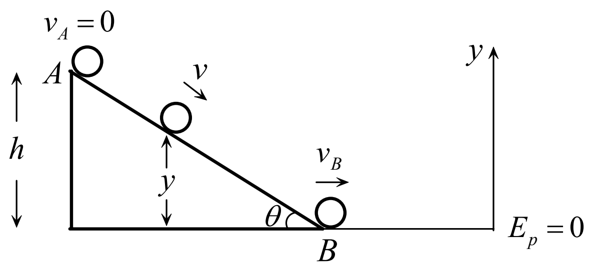
$$a_B = \frac{l}{2}\left(\alpha_B{}^2 + \omega_B{}^4\right)^{1/2} = \frac{l}{2}\,|\alpha_B| \qquad (\text{διότι } \omega_B = 0) \ .$$

Αντικαθιστώντας το α_B από την (4), έχουμε τελικά:

$$a_B = \frac{3(m+M)g}{3m+4M} \ .$$

46. *Μια συμπαγής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R αφήνεται να κυλήσει από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ και μέγιστου ύψους h. Η κύλιση ξεκινάει χωρίς αρχική ταχύτητα. (α) Βρείτε την ταχύτητα της σφαίρας όταν αυτή φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, χρησιμοποιώντας δύο εναλλακτικές μεθόδους: τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας και τις εξισώσεις κίνησης της σφαίρας. (β) Βρείτε την ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μ, έτσι ώστε η σφαίρα να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. (Η ροπή αδρανείας της σφαίρας είναι* $I = \frac{2}{5}MR^2$.*)*

Λύση: Θεωρούμε τυχαία θέση της σφαίρας πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, σε ύψος y από τη βάση του. Καλούμε ω τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της σφαίρας, και v την ταχύτητα του κέντρου μάζας της, στη θέση αυτή:



Επειδή η σφαίρα εκτελεί καθαρή κύλιση (χωρίς ολίσθηση),

$$v = R\omega \quad (1)$$

Η ολική μηχανική ενέργεια της σφαίρας στη θεωρούμενη θέση είναι

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgy \ .$$

Η E μένει σταθερή κατά την κίνηση, για τον εξής λόγο: Στη σφαίρα δρουν τρεις δυνάμεις: το βάρος Mg (στο οποίο αντιστοιχεί η $E_p=Mgy$), η κάθετη αντίδραση N από το κεκλιμένο επίπεδο, και η *στατική* τριβή f, η οποία εμποδίζει την ολίσθηση. Η N δεν παράγει έργο γιατί είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα v. Η f επίσης δεν παράγει έργο, γιατί υποθέτουμε ότι η σφαίρα εκτελεί καθαρή κύλιση (βλ. Παρ.7.11). Έτσι,

$$\Delta E = W_N + W_f = 0 \quad => \quad E = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \ .$$

Ειδικά, για τις ακρότατες θέσεις A και B, εξισώνουμε $E_A=E_B$, ή αναλυτικά,

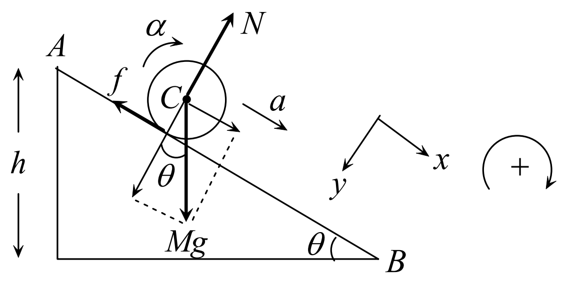
$$0 + 0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv_B{}^2 + \frac{1}{2}I\omega_B{}^2 + 0 \ .$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση για το I, και παρατηρώντας ότι, λόγω της συνθήκης (1), $v_B=R\omega_B$, έχουμε:

$$gh = \frac{1}{2}v_B{}^2 + \frac{1}{5}v_B{}^2 = \frac{7}{10}\ v_B{}^2 \quad => \quad v_B = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \qquad (2)$$

Το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο των M, R, θ. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι, αν αντί για τη σφαίρα είχαμε, π.χ., έναν κύβο που εκτελεί *ολίσθηση χωρίς τριβή* κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, η αντίστοιχη ταχύτητα στη βάση του επιπέδου θα ήταν $v_B' = \sqrt{2gh} > v_B$. Ο λόγος είναι απλός: Στην περίπτωση της σφαίρας, μέρος της κινητικής ενέργειας μεταφοράς ($Mv^2/2$) αναλώνεται σαν κινητική ενέργεια περιστροφής ($I\omega^2/2$), κι έτσι η τελική ταχύτητα είναι μικρότερη.

Εναλλακτικά, μπορούμε να εργαστούμε με τις εξισώσεις κίνησης. Πάνω στη σφαίρα δρουν τρεις δυνάμεις: το βάρος Mg, η κάθετη αντίδραση N από το επίπεδο, και η στατική τριβή f. Η f έχει κατεύθυνση προς την κορυφή A του κεκλιμένου επιπέδου, έτσι ώστε να εμποδίζει την ολίσθηση:



Θεωρούμε μια τυχαία θέση της σφαίρας στο επίπεδο. Καλούμε a τη γραμμική επιτάχυνση του κέντρου μάζας C της σφαίρας, και α τη γωνιακή επιτάχυνση περιστροφής της σφαίρας γύρω από το C. Ο άξονας περιστροφής z, που κατέρχεται το κεκλιμένο επίπεδο μαζί με τη σφαίρα, διέρχεται από το C και είναι κάθετος στη σελίδα, με θετική φορά προς τα *μέσα* (δηλαδή, παίρνουμε σαν θετική φορά περιστροφής τη δεξιόστροφη). Οι εξισώσεις μεταφορικής κίνησης της σφαίρας είναι

$$\sum F_x = Ma_x \ , \quad \sum F_y = Ma_y \ , \qquad \text{όπου} \quad a_x = a \ , \ a_y = 0 \ .$$

Αναλυτικά,

$$Mg\sin\theta - f = Ma \qquad (3)$$

$$Mg\cos\theta - N = 0 \quad => \quad N = Mg\cos\theta \qquad (4)$$

Η εξίσωση περιστροφής ως προς το κέντρο μάζας C είναι $\Sigma T_z = I\alpha$. Η μόνη δύναμη που προκαλεί ροπή ως προς το C είναι η τριβή f (αφού οι Mg και N διέρχονται από το C). Η ροπή αυτή είναι κατά τη θετική φορά, αφού η f τείνει να προκαλέσει δεξιόστροφη περιστροφή. Έτσι έχουμε:

$$fR = \left(\frac{2}{5}MR^2\right)\alpha \quad \Rightarrow \quad f = \frac{2}{5}MR\alpha = \frac{2}{5}Ma \qquad (5)$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι, για καθαρή κύλιση, $a=R\alpha$. Αντικαθιστώντας την (5) στην (3), και λύνοντας ως προς a, βρίσκουμε

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας τότε την (6) στην (5), έχουμε

$$f = \frac{2}{7}Mg\sin\theta \qquad (7)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η f είναι *στατική* τριβή (αφού δεν υπάρχει ολίσθηση), και χρησιμοποιώντας τις (4) και (7), έχουμε:

$$f \le f_{\max} = \mu N \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{7}Mg\sin\theta \le \mu Mg\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\mu \ge \frac{2}{7}\tan\theta \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{\min} = \frac{2}{7}\tan\theta \qquad (8)$$

Παρατηρούμε ότι $\mu_{\min}=0$ όταν $\theta=0$. Τούτο σημαίνει ότι *η σφαίρα μπορεί να εκτελεί καθαρή κύλιση σε <u>οριζόντια</u> επιφάνεια χωρίς τη βοήθεια της στατικής τριβής*. Με άλλα λόγια, *η καθαρή κύλιση είναι δυνατή σε λεία, οριζόντια επιφάνεια* (βλ. και Πρόβλ.47).

Τέλος, θέλουμε την ταχύτητα v_B της σφαίρας στη βάση B του κεκλιμένου επιπέδου. Κατά μήκος του επιπέδου (δηλαδή, κατά μήκος του άξονα x), το κέντρο C της σφαίρας εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με σταθερή επιτάχυνση a που δίνεται από τη σχέση (6). Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \ ,$$

θέτοντας $v = v_B$, $v_0 = v_A = 0$, και $x - x_0 = AB = \dfrac{h}{\sin\theta}$:

$$v_B^{\ 2} = 0 + 2\left(\frac{5}{7}g\sin\theta\right)\frac{h}{\sin\theta} = \frac{10}{7}gh \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \quad ,$$

σε συμφωνία με την (2).

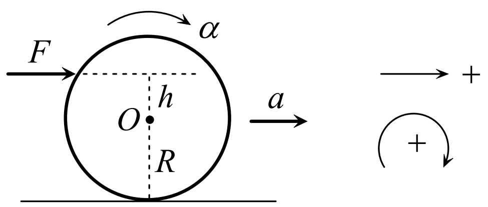
Αν στη θέση της σφαίρας είχαμε έναν *κύλινδρο* ($I = MR^2/2$), οι σχέσεις (2), (6) και (8) θα είχαν, αντίστοιχα, τη μορφή

$$v_B = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \ , \quad a = \frac{2}{3} g \sin\theta \ , \quad \mu \geq \frac{1}{3}\tan\theta$$

(δείξτε το!). Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση a της σφαίρας κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι μεγαλύτερη από αυτήν του κυλίνδρου. Έτσι, αν μια σφαίρα κι ένας κύλινδρος ξεκινήσουν ταυτόχρονα την κύλιση από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου, η σφαίρα θα φτάσει πρώτη στη βάση του επιπέδου, *ανεξάρτητα από τις διαστάσεις των δύο αντικειμένων*!

47. *Ο δίσκος του σχήματος, ακτίνας R, ισορροπεί πάνω σε μια* <u>*λεία*</u> *(μ=0) οριζόντια επιφάνεια. (α) Σε ποια κατακόρυφη απόσταση h πάνω από το κέντρο μάζας O του δίσκου θα πρέπει να εφαρμόσουμε μια σταθερή, οριζόντια δύναμη F, έτσι ώστε ο δίσκος να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει; (β) Δείξτε ότι η ελεύθερη κύλιση (F=0) πάνω σε οριζόντια επιφάνεια είναι δυνατή και χωρίς τη βοήθεια της στατικής τριβής. (Η ροπή αδρανείας του δίσκου είναι $I = ½ MR^2$.)*

Λύση: Οι θετικές φορές μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης σημειώνονται στα δεξιά στο σχήμα. Ο μετακινούμενος άξονας περιστροφής z διέρχεται από το O και είναι κάθετος στη σελίδα, με θετική φορά προς τα *μέσα*. Καλούμε M τη μάζα του δίσκου και a, α τις επιταχύνσεις του, γραμμική και γωνιακή, αντίστοιχα:



Στο δίσκο ασκούνται τρεις δυνάμεις: το βάρος Mg, η κάθετη αντίδραση N από το επίπεδο (ίση κατά μέτρο με το βάρος), και η οριζόντια δύναμη F που ασκούμε εμείς (δεν υπάρχει τριβή). Η F αποτελεί και τη συνισταμένη δύναμη στο δίσκο. Η ολική ροπή ως προς O οφείλεται αποκλειστικά στην F, αφού οι Mg και N διέρχονται από το O. Οι εξισώσεις μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης είναι

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} \ \Rightarrow \ F = Ma \quad (1)$$

$$\sum T_z = I\alpha \ \Rightarrow \ Fh = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha = \frac{1}{2}MRa \quad (2)$$

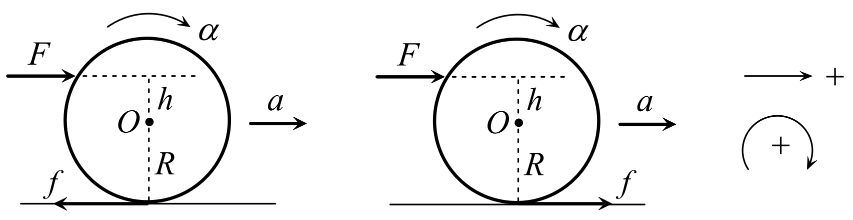
όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνθήκη καθαρής κύλισης, $a = R\alpha$. Διαιρώντας την (2) με την (1), έχουμε:

$$h = \frac{R}{2} \quad (\textit{για καθαρή κύλιση χωρίς τριβή})\ .$$

Στην περίπτωση που F=0, οι (1) και (2) δίνουν a=0 και α =0. Δηλαδή, *ο δίσκος κυλά ελεύθερα πάνω στη λεία, οριζόντια επιφάνεια, χωρίς να ολισθαίνει, με σταθερή γραμμική και γωνιακή ταχύτητα.*

48. *Ο δίσκος του σχήματος, ακτίνας R και μάζας M, εκτελεί καθαρή κύλιση πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Στο δίσκο δρα σταθερή οριζόντια δύναμη F.*
1) Βρείτε τις τιμές της κατακόρυφης απόστασης h πάνω από το κέντρο μάζας O του δίσκου, όπου πρέπει να ασκήσουμε την F έτσι ώστε η στατική τριβή f από το επίπεδο στο δίσκο να έχει φορά (α) προς τα αριστερά, (β) προς τα δεξιά.
2) Για τις τιμές h=0 και h=R , βρείτε τις τιμές του συντελεστή στατικής τριβής μ, έτσι ώστε ο δίσκος να εκτελεί καθαρή κύλιση.
(Η ροπή αδρανείας του δίσκου είναι $I = ½ MR^2$.)

Λύση: Οι θετικές φορές μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης σημειώνονται στα δεξιά στο σχήμα (ο κινητός άξονας περιστροφής *z* είναι κάθετος στη σελίδα, με θετική φορά προς τα *μέσα*). Καλούμε *a* τη γραμμική και α τη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου:



(α) (β)

Η συνθήκη καθαρής κύλισης είναι

$$a = R\alpha \quad (1)$$

Η συνισταμένη δύναμη στο δίσκο είναι $F \pm f$ (οι κατακόρυφες δυνάμεις αλληλοαναιρούνται). Οι *F* και *f* είναι και οι μόνες που παράγουν ροπή ως προς το *O*, αφού οι κατακόρυφες δυνάμεις διέρχονται από το *O*. Οι εξισώσεις μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης είναι

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} \ , \quad \sum T_z = I\alpha \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε τις (2) ξεχωριστά για τις περιπτώσεις (α) και (β), λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη (1) και παρατηρώντας ότι η ροπή τής *F* ως προς *O* είναι θετική, ενώ η ροπή τής *f* είναι θετική στην περίπτωση (α) και αρνητική στην περίπτωση (β).

(α) Η *f* προς τα αριστερά:

$$F - f = Ma \quad (3)$$

$$Fh + fR = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha = \frac{1}{2}MRa \quad (4)$$

Διαιρώντας την (4) με την (3), βρίσκουμε

$$\frac{3R}{2} f = \left(\frac{R}{2} - h\right)F \quad (5)$$

Δοθέντος ότι $f>0$ και $F>0$ (τα *f* και *F* είναι *μέτρα* δυνάμεων), θα πρέπει

$$\frac{R}{2} - h > 0 \ \Rightarrow \ 0 \le h < \frac{R}{2} \ .$$

(β) Η f προς τα δεξιά:

$$F + f = M a \quad (6)$$

$$F h - f R = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha = \frac{1}{2}MRa \quad (7)$$

Διαιρώντας την (7) με την (6), βρίσκουμε

$$\frac{3R}{2} f = \left(h - \frac{R}{2}\right)F \quad (8)$$

Τη φορά αυτή, θα πρέπει

$$h - \frac{R}{2} > 0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{R}{2} < h \le R \;.$$

Ζητούμε τώρα το συντελεστή στατικής τριβής μ για καθαρή κύλιση, όταν h=0 και h=R. Θέτοντας h=0 στην (5) και h=R στην (8), βρίσκουμε, και στις δύο περιπτώσεις,

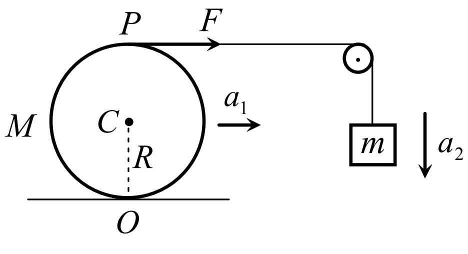
$$f = \frac{F}{3} \;.$$

Έτσι έχουμε:

$$f \le f_{\max} = \mu N = \mu M g \;\;\Rightarrow\;\; \frac{F}{3} \le \mu M g \;\;\Rightarrow\;\; \mu \ge \frac{F}{3Mg} \;.$$

Άσκηση: Δείξτε ότι, όταν F=0 (ελεύθερη κύλιση), τότε f=0, a=0 και α =0. Δηλαδή, ο δίσκος κυλά ελεύθερα με σταθερή γραμμική και γωνιακή ταχύτητα, χωρίς τη βοήθεια της στατικής τριβής (βλ. και Πρόβλ.47).

49. *Ο δίσκος του σχήματος, ακτίνας R και μάζας M, έχει ένα νήμα τυλιγμένο γύρω του. Μια μάζα m είναι δεμένη στο ένα άκρο του νήματος, όπως στο σχήμα. Καθώς το νήμα ξετυλίγεται, η m κινείται προς τα κάτω ενώ ο δίσκος εκτελεί καθαρή κύλιση προς τα δεξιά πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Βρείτε τις επιταχύνσεις a_1 και a_2 των δύο μαζών, την τάση F του νήματος, και τη στατική τριβή f (μέτρο <u>και</u> κατεύθυνση) στο σημείο επαφής O. (Η ροπή αδρανείας του δίσκου είναι I = ½ MR²$^{}$.)*



Λύση: Επειδή δεν γνωρίζουμε εξαρχής τη φορά της τριβής f, θα υποθέσουμε αυθαίρετα ότι είναι προς τα δεξιά. Αν στο τέλος βρούμε αρνητικό μέτρο f, η υπόθεσή μας θα είναι λανθασμένη. Η επιτάχυνση a_1 του δίσκου είναι, εξ ορισμού, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του, C, ως προς το οριζόντιο επίπεδο, ή ισοδύναμα, ως προς το σημείο επαφής O: $a_1 = a_{C,O}$. Η επιτάχυνση a_2 του m ως προς το επίπεδο (με φορά προς τα κάτω) ισούται κατά μέτρο με την επιτάχυνση του ανώτατου σημείου P του δίσκου ως προς το επίπεδο (ή, ως προς το O): $a_2 = a_{P,O}$. Από τη μελέτη της κύλισης (Παρ.7.10) γνωρίζουμε ότι $a_{P,O} = 2a_{C,O}$. Άρα,

$$a_2 = 2a_1 \quad (1)$$

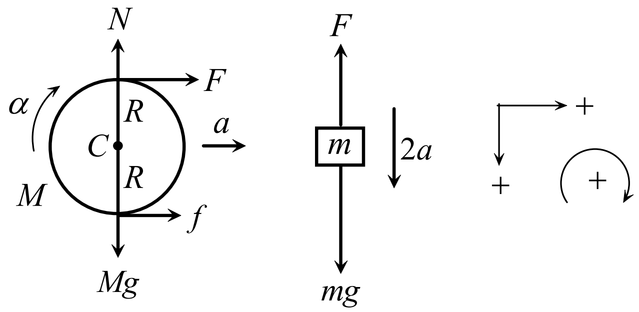
Θέτουμε

$$a_1 = a \;\; , \quad a_2 = 2a \;\; .$$

Αν α είναι η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου ως προς το C, η συνθήκη καθαρής κύλισης απαιτεί

$$a_1 = a = R\alpha \quad (2)$$

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις σε κάθε σώμα ξεχωριστά:



Οι θετικές φορές για μεταφορά και περιστροφή σημειώνονται στα δεξιά στο σχήμα (ο άξονας περιστροφής z είναι κάθετος στη σελίδα, με θετική φορά προς τα *μέσα*). Η συνισταμένη δύναμη στο M είναι $(F+f)$ (αφού $N=Mg$), ενώ αυτή στο m είναι $(mg-F)$. Οι Mg και N δεν παράγουν ροπή ως προς το C, αφού διέρχονται από το C. Έτσι, η ολική ροπή στο M ως προς C είναι

$$\sum T_z = FR - fR = (F-f)R$$

(προσέξτε ότι η F προκαλεί θετική ροπή, ενώ η f αρνητική). Γράφουμε τις εξισώσεις μεταφορικής κίνησης για τα m και M, καθώς και την εξίσωση περιστροφικής κίνησης για το M :

$$mg - F = m(2a) = 2ma \quad (3)$$

$$F + f = Ma \quad (4)$$

$$(F-f)R = I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha \overset{(2)}{\Rightarrow} F - f = \frac{1}{2}Ma \quad (5)$$

Διαιρώντας την (4) με την (5) => $F = 3f$ (6)

Από τις (4) και (6) => $f = \dfrac{Ma}{4}$ (7)

Από τις (6) και (7) => $F = \dfrac{3Ma}{4}$ (8)

Από τις (3) και (8) => $a = a_1 = \dfrac{4mg}{8m+3M}$ (9) √

Από τις (1) και (9) => $a_2 = \dfrac{8mg}{8m+3M}$ (10) √

Από τις (7), (8) και (9) => $f = \dfrac{Mmg}{8m+3M}$, $F = \dfrac{3Mmg}{8m+3M}$ (11) √

(παρατηρούμε ότι $f > 0$, άρα η εκλεγμένη φορά για την f είναι σωστή). Οι (9), (10) και (11) αποτελούν τη λύση του προβλήματος.

50. *Ένας μαθητής κάθεται σε ένα σκαμνί το οποίο μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα, χωρίς τριβή, γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα. Ο μαθητής κρατάει με τεντωμένα τα χέρια του δύο βαράκια που το καθένα έχει μάζα m, ενώ το σκαμνί περιστρέφεται με μια αρχική γωνιακή ταχύτητα* ω_1 *. Ο μαθητής τότε τραβάει προς το μέρος του τα βαράκια, έτσι ώστε η αρχική τους απόσταση* R_1 *από τον άξονα περιστροφής να ελαττωθεί σε* R_2 *. (α) Βρείτε τη νέα γωνιακή ταχύτητα* ω_2 *που αποκτά το σκαμνί. Υποθέστε, προσεγγιστικά, ότι η ροπή αδρανείας του συστήματος «σκαμνί+μαθητής» (χωρίς τα βαράκια) μένει σταθερή και ίση με* I_0 *. (β) Συγκρίνετε την αρχική με την τελική κινητική ενέργεια του συστήματος (με τα βαράκια).*

Λύση: Θεωρούμε το σύστημα «σκαμνί+μαθητής+βαράκια». Η αρχική και η τελική ολική ροπή αδρανείας του συστήματος είναι, αντίστοιχα,

$$I_1 = I_0 + mR_1^2 + mR_1^2 = I_0 + 2mR_1^2 \ ,$$

$$I_2 = I_0 + 2mR_2^2 \ .$$

Η στροφορμή του συστήματος ως προς ένα σημείο του άξονα περιστροφής z (ο οποίος είναι κύριος άξονας) έχει διεύθυνση παράλληλη με τον άξονα. Η αρχική και η τελική τιμή της είναι

$$L_1 = I_1 \omega_1 = (I_0 + 2mR_1^2)\,\omega_1 \ ,$$
$$L_2 = I_2 \omega_2 = (I_0 + 2mR_2^2)\,\omega_2 \ .$$

Οι εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα είναι τα βάρη των σωμάτων που το αποτελούν και η αντίδραση του εδάφους στο σκαμνί. Καμία από αυτές δεν προκαλεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, αφού όλες είναι στην κατακόρυφη διεύθυνση. Έτσι, $\Sigma T_z=0$, και η στροφορμή του συστήματος μένει σταθερή:

$$L_1 = L_2 \ \Rightarrow \ I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \ \Rightarrow$$
$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\,\omega_1 = \frac{I_0 + 2mR_1^2}{I_0 + 2mR_2^2}\,\omega_1 \ .$$

Παρατηρούμε ότι $\omega_2 > \omega_1$, αφού $R_1 > R_2$.

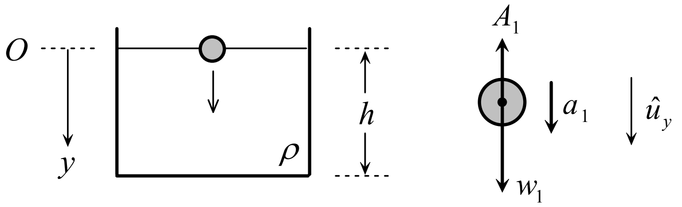
Οι κινητικές ενέργειες του συστήματος, αρχική και τελική, είναι $E_{k,1} = ½\, I_1\omega_1^2$, $E_{k,2} = ½\, I_2\,\omega_2^2$. Έτσι,

$$\frac{E_{k,2}}{E_{k,1}} = \frac{I_2}{I_1}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \frac{I_2}{I_1}\left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 = \frac{I_1}{I_2} > 1 \ .$$

Δηλαδή, $E_{k,2} > E_{k,1}$. Δοθέντος ότι οι εξωτερικές δυνάμεις δεν παράγουν έργο (αφού τα σημεία εφαρμογής τους είτε είναι ακίνητα, είτε μετακινούνται κάθετα προς τις δυνάμεις), η αύξηση της E_k οφείλεται στο έργο των *εσωτερικών* δυνάμεων (συγκεκριμένα, στο έργο που κάνει ο μαθητής όταν τραβά προς το μέρος του τα βαράκια).

51. *Μια ομογενής σφαίρα πυκνότητας ρ_1 αφήνεται να βυθιστεί μέσα σε δοχείο που περιέχει υγρό πυκνότητας ρ (όπου $\rho<\rho_1$). Το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού πάνω από τον πυθμένα του δοχείου είναι h. (α) Βρείτε το χρόνο t_1 που θα χρειαστεί η σφαίρα για να φτάσει στον πυθμένα. (β) Αν, ταυτόχρονα με την πρώτη σφαίρα, αφήσουμε να βυθιστεί και μια άλλη με πυκνότητα $\rho_2>\rho_1$, ποια σφαίρα θα φτάσει πρώτη στον πυθμένα;*

Λύση:



(α) Καλούμε m_1, V_1, w_1 τη μάζα, τον όγκο, και το βάρος, αντίστοιχα, της πρώτης σφαίρας. Έχουμε ότι $m_1=\rho_1 V_1$ και

$$w_1 = m_1 g = \rho_1 g V_1 \ .$$

Η άνωση που δέχεται η σφαίρα από το υγρό είναι

$$A_1 = w_{\varepsilon\kappa} = \rho g V_1 \ .$$

Η ολική δύναμη στη σφαίρα είναι

$$\vec{F}_1 = \vec{w}_1 + \vec{A}_1 = w_1 \hat{u}_y + (-A_1 \hat{u}_y) = (w_1 - A_1)\,\hat{u}_y = (\rho_1 - \rho) g V_1\, \hat{u}_y \ .$$

Από το νόμο του Νεύτωνα,

$$\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1 = m_1 a_1 \hat{u}_y = (\rho_1 V_1 a_1)\,\hat{u}_y \ .$$

Άρα,

$$\rho_1 V_1 a_1 = (\rho_1 - \rho) g V_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right) g \qquad (1)$$

Επειδή a_1= *σταθερό*, η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Έτσι,

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2$$

όπου, στην περίπτωσή μας, y_0=0, v_0=0, y=h και t=t_1 :

$$h = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_1}}$$, όπου η a_1 δίνεται από την (1).

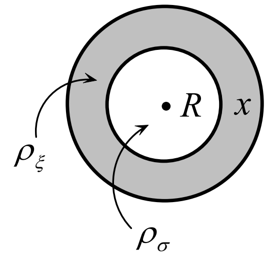
(β) Όμοια, για τη δεύτερη σφαίρα,

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{a_2}} \qquad \text{όπου} \qquad a_2 = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_2}\right) g \ .$$

Δοθέντος ότι $\rho_1< \rho_2$, βλέπουμε εύκολα ότι $a_1< a_2$, έτσι ώστε $t_1>t_2$. Άρα, *η πιο πυκνή σφαίρα ρ_2 θα φτάσει πρώτη στον πυθμένα, ανεξάρτητα από τις διαστάσεις των δύο σφαιρών* !

52. *Θεωρούμε μεταλλική σφαίρα ακτίνας R=5cm και πυκνότητας* $\rho_\sigma=3.1 g/cm^3$. *Θέλουμε να επικαλύψουμε τη σφαίρα με ξύλινο σφαιρικό φλοιό* ($\rho_\xi=0.7 g/cm^3$) *έτσι ώστε η σύνθετη σφαίρα που θα προκύψει να επιπλέει στο νερό* ($\rho=1 g/cm^3$)*, ή τουλάχιστον να μη βυθίζεται σ' αυτό. Βρείτε το ελάχιστο πάχος x του ξύλινου φλοιού.*

Λύση:



Καλούμε m_σ και V_σ τη μάζα και τον όγκο της μεταλλικής σφαίρας, και m_ξ και V_ξ τη μάζα και τον όγκο του ξύλινου φλοιού. Η μάζα και ο όγκος της σύνθετης σφαίρας είναι $m_{o\lambda}= m_\sigma+m_\xi$, $V_{o\lambda}= V_\sigma+V_\xi$. Για να μη βυθίζεται η σφαίρα αυτή, θα πρέπει η *μέση* πυκνότητά της, έστω ρ_σ', να μην υπερβαίνει αυτήν του νερού: $\rho_\sigma' \leq \rho$, όπου

$$\rho_\sigma' = \frac{m_{o\lambda}}{V_{o\lambda}} = \frac{m_\sigma + m_\xi}{V_{o\lambda}} = \frac{\rho_\sigma V_\sigma + \rho_\xi V_\xi}{V_{o\lambda}} = \frac{\rho_\sigma V_\sigma + \rho_\xi (V_{o\lambda} - V_\sigma)}{V_{o\lambda}} \quad \Rightarrow$$

$$\rho_\sigma' = \rho_\xi + (\rho_\sigma - \rho_\xi)\frac{V_\sigma}{V_{o\lambda}} \quad .$$

Έτσι,

$$\rho_\sigma' \leq \rho \quad \Rightarrow \quad (\rho_\sigma - \rho_\xi)\frac{V_\sigma}{V_{o\lambda}} \leq \rho - \rho_\xi \qquad (1)$$

Αλλά,

$$V_\sigma = \frac{4}{3}\pi R^3 \ , \ V_{o\lambda} = \frac{4}{3}\pi (R+x)^3 \ , \ \text{και} \ \ \frac{V_\sigma}{V_{o\lambda}} = \left(\frac{R}{R+x}\right)^3 \ .$$

Από την (1), τότε, έχουμε

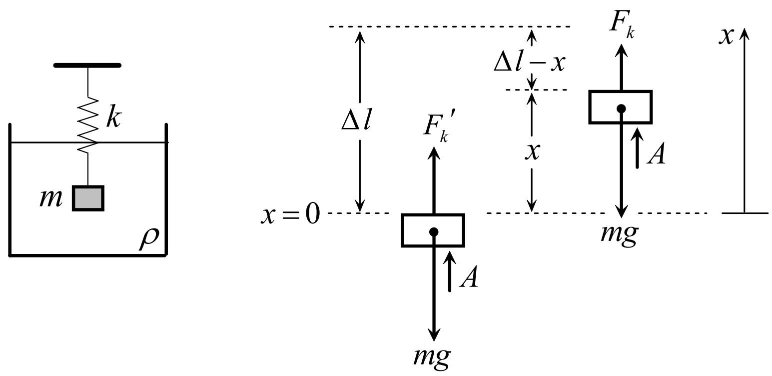
$$\left(\frac{R}{R+x}\right)^3 \leq \frac{\rho - \rho_\xi}{\rho_\sigma - \rho_\xi} \quad \Rightarrow \quad \frac{R+x}{R} \geq \left(\frac{\rho_\sigma - \rho_\xi}{\rho - \rho_\xi}\right)^{1/3} \quad \Rightarrow$$

$$x \geq \left[\left(\frac{\rho_\sigma - \rho_\xi}{\rho - \rho_\xi}\right)^{1/3} - 1\right] R \ .$$

Αντικαθιστώντας τα αριθμητικά δεδομένα, βρίσκουμε $x_{\min} = 5cm$.

53. *Στην Παρ.5.4 μάθαμε ότι, αν κρεμάσουμε μια μάζα m από ένα ελατήριο σταθεράς k, η μάζα θα μπορεί να εκτελεί κατακόρυφες ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας της με περίοδο* $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ *. Τοποθετούμε τώρα το σύστημα μέσα σε υγρό που έχει πυκνότητα ρ μικρότερη από τη μέση πυκνότητα της μάζας (έτσι, η m θα βυθιζόταν αν δεν την συγκρατούσε το ελατήριο). Δείξτε ότι η περίοδος της ταλάντωσης παραμένει ίδια και μέσα στο υγρό!*

Λύση:



Τα σύμβολα έχουν την ίδια σημασία όπως στην Παρ.5.4(β). Το σώμα ισορροπεί στη θέση x=0, στην οποία το ελατήριο επεκτείνεται κατά Δl από το φυσικό του μήκος και ασκεί δύναμη $F_k' = k\Delta l$. Στη συνέχεια, το σώμα μετατοπίζεται κατά x πάνω από τη θέση ισορροπίας και δέχεται τώρα από το ελατήριο μια δύναμη $F_k = k(\Delta l - x)$. Το μόνο νέο στοιχείο είναι η σταθερή άνωση $A=\rho gV$, όπου V ο όγκος του σώματος. Προσέξτε ότι $A<mg$, διότι η πυκνότητα ρ του υγρού είναι μικρότερη από αυτή του σώματος. Στο σημείο ισορροπίας x=0, έχουμε

$$F_k' + A - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad k\Delta l + A - mg = 0 \quad (1)$$

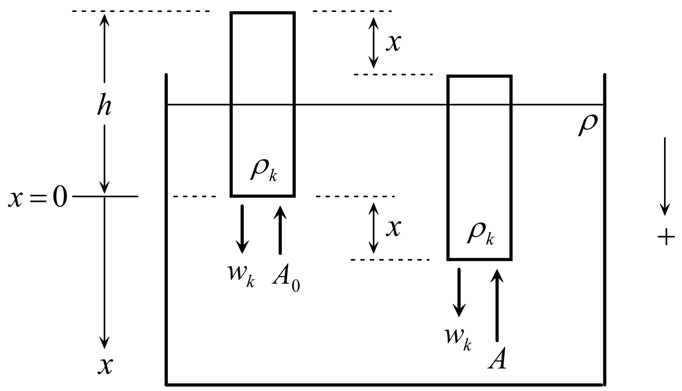
Η *συνισταμένη* δύναμη στο σώμα στη θέση μετατόπισης x είναι

$$F = F_k + A - mg = k(\Delta l - x) + A - mg \overset{(1)}{\Rightarrow} F = -kx \quad (2)$$

Η (2) μας λέει ότι η μάζα m μπορεί να εκτελεί αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας x=0, με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Παρατηρούμε ότι η περίοδος αυτή είναι ανεξάρτητη από την πυκνότητα ρ του μέσου που περιβάλλει το ταλαντούμενο σώμα.

54. *Ένας κύλινδρος ύψους h και μέσης πυκνότητας ρ_k επιπλέει βυθισμένος κατά ένα μέρος του σε υγρό πυκνότητας ρ (όπου $\rho>\rho_k$), με τον άξονά του κατακόρυφο. Ο κύλινδρος υφίσταται μικρή κατακόρυφη μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας του και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερος. Δείξτε ότι ο κύλινδρος θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας του, και βρείτε την κυκλική συχνότητα ω. Σαν εφαρμογή, βρείτε το ω στην περίπτωση που ο κύλινδρος είναι βυθισμένος κατά το ήμισυ στο υγρό όταν ισορροπεί.*

Λύση:



Στο σχήμα βλέπουμε τον κύλινδρο σε δύο θέσεις: στη θέση ισορροπίας (x=0), και σε μια θέση με απομάκρυνση x κάτω από τη θέση ισορροπίας. Έστω V_k ο όγκος του κυλίνδρου. Το βάρος του, τότε, είναι $w_k=\rho_k g V_k$. Καλούμε V_0 και V τους όγκους του εκτοπιζόμενου υγρού στις θεωρούμενες θέσεις x=0 και x>0, αντίστοιχα. Οι αντίστοιχες ανώσεις που δέχεται ο κύλινδρος στις θέσεις αυτές είναι

$$A_0 = \rho g V_0 \ , \quad A = \rho g V \, .$$

Αν S είναι το εμβαδόν βάσης του κυλίνδρου, τότε $V_k=S\,h$. Επίσης,

$$V = V_0 + S\,x \quad <=> \quad V - V_0 = S\,x \, .$$

Στη θέση ισορροπίας (x=0) έχουμε $w_k= A_0$ =>

$$\rho_k V_k = \rho V_0 \quad (1)$$

Η *συνισταμένη* δύναμη στον κύλινδρο στη θέση απομάκρυνσης x είναι

$$F = w_k - A = \rho_k g V_k - \rho g V = (\,\rho_k V_k - \rho V\,)\, g$$

ή, αντικαθιστώντας το $\rho_k V_k$ από την (1),

$$F = (\,\rho V_0 - \rho V\,)\, g = -\rho\,(V - V_0)\, g = -\rho\,(S\,x)\, g \quad =>$$

$$F = -(\,\rho g S\,)\, x \equiv -k\,x \quad (2)$$

Σύμφωνα με τη (2), ο κύλινδρος εκτελεί κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας (x=0) με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{k/m}$, όπου m η μάζα του κυλίνδρου. Θέτοντας $m= \rho_k V_k = \rho_k S h$ και $k = \rho g S$, βρίσκουμε

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g}{\rho_k h}} \qquad (3)$$

Στην ειδική περίπτωση που $V_0=V_k/2$, η (1) δίνει $\rho / \rho_k = V_k / V_0 = 2$, οπότε η (3) γίνεται $\omega = \sqrt{2g/h}$.

Άσκηση: Βρείτε την περίοδο T και τη συχνότητα f της ταλάντωσης. Θα είχαμε απόλυτα αρμονική ταλάντωση αν στη θέση του κυλίνδρου βρισκόταν μια σφαίρα; Ένας κύβος;

55. *Ένας χρυσοχόος προσπαθεί να πουλήσει μια κορώνα σε ένα βασιλιά, λέγοντάς του ότι είναι ολόχρυση και δεν έχει εσωτερικές κοιλότητες. Πριν αποφασίσει, ο βασιλιάς ζητάει τη γνώμη του Αρχιμήδη. Αυτός ζυγίζει αμέσως την κορώνα και βρίσκει πως το βάρος της είναι* w=7.84N *. Στη συνέχεια, τη ζυγίζει βυθισμένη μέσα στο νερό και μετρά ένα φαινομενικό βάρος* w_φ=6.86N *. Γνωρίζοντας ότι η πυκνότητα του νερού είναι* $\rho=10^3 kg/m^3$*, ενώ αυτή του χρυσού είναι* $\rho_x=19.3\times 10^3 kg/m^3$*, σε τι συμπέρασμα καταλήγει ο Αρχιμήδης;*

Λύση: Ουσιαστικά, ο Αρχιμήδης ζητά τη μέση πυκνότητα ρ' της κορώνας, έτσι ώστε να τη συγκρίνει με την πυκνότητα ρ_x του χρυσού. Αν V είναι ο όγκος της κορώνας, το *πραγματικό* της βάρος είναι

$$w = \rho' g V \qquad (1)$$

Έχουμε μία εξίσωση με δύο αγνώστους, ρ' και V. Υποθέτοντας ότι θέλουμε να αποφύγουμε την απευθείας πειραματική μέτρηση του όγκου V, ζητούμε μια δεύτερη εξίσωση για να τον απαλείψουμε από το πρόβλημα. Το *φαινομενικό* βάρος της κορώνας όταν αυτή είναι βυθισμένη στο νερό, ισούται με το πραγματικό της βάρος *μειωμένο* κατά την άνωση A :

$$w_\varphi = w - A = \rho' g V - \rho g V \;\Rightarrow$$
$$w_\varphi = (\rho' - \rho) g V \qquad (2)$$

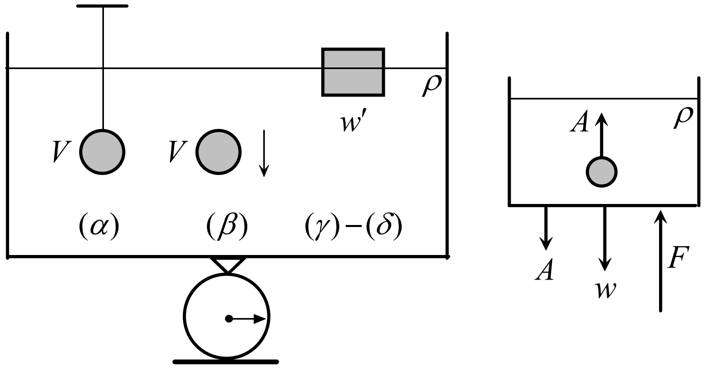
Διαιρώντας την (2) με την (1), και λύνοντας ως προς ρ', βρίσκουμε

$$\rho' = \frac{w}{w - w_\varphi}\,\rho = 8\times 10^3 kg/m^3 < \rho_x \,.$$

Άρα, είτε η κορώνα έχει εσωτερικές κοιλότητες, είτε αποτελείται από κάποιο κράμα. (Οι ιστορικοί της εποχής δεν δίνουν πληροφορίες σχετικά με την τύχη του χρυσοχόου...)

56. *Μια δεξαμενή με νερό είναι τοποθετημένη πάνω σε μια ζυγαριά, η οποία δείχνει συνολικό βάρος w. Ποια θα είναι η νέα ένδειξη της ζυγαριάς, αν προσθέσουμε (α) μια πέτρα όγκου V, βυθισμένη ολόκληρη στο νερό, που κρατιέται ακίνητη κρεμασμένη με ένα σχοινί από σταθερό υποστήριγμα; (β) μια πέτρα όγκου V που βυθίζεται ελεύθερα στο νερό; (γ) ένα κομμάτι ξύλου, βάρους w΄, που επιπλέει στο νερό; (δ) ένα κομμάτι ξύλου, βάρους w΄, που εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση κυκλικής συχνότητας ω, γύρω από τη θέση όπου ισορροπεί (επιπλέει); (Δίνεται η πυκνότητα ρ του νερού.)*

Λύση:



Σε κάθε περίπτωση, το νερό ασκεί στο βυθισμένο σώμα μια δύναμη άνωσης A με φορά προς τα πάνω. Από το νόμο δράσης-αντίδρασης, το βυθισμένο σώμα ασκεί με τη σειρά του στο νερό μια δύναμη ίσου μέτρου A, με φορά προς τα *κάτω*. Στο σύστημα δεξαμενής+νερού δρουν τρεις εξωτερικές δυνάμεις: το βάρος w, η αντίδραση A στην άνωση από το βυθισμένο σώμα, και η δύναμη F από τη ζυγαριά στο δοχείο. Η F είναι και η δύναμη που αντιστοιχεί στην ένδειξη της ζυγαριάς. Επειδή το σύστημα «δεξαμενή+νερό» ισορροπεί (προσέξτε ότι το βυθισμένο σώμα ***δεν*** είναι μέρος του συστήματος!), θα πρέπει σε κάθε περίπτωση να ισχύει ότι

$$F = w + A \qquad (1)$$

Για τις περιπτώσεις (α) και (β) παρατηρούμε τα εξής: Η πέτρα, είτε είναι κρεμασμένη και ακίνητη, είτε βυθίζεται ελεύθερα, δέχεται από το υγρό την ίδια άνωση $A=\rho gV$. Άρα, και στις δύο περιπτώσεις το υγρό δέχεται από την πέτρα την ίδια αντίδραση A προς τα κάτω. Έτσι, για τις περιπτώσεις (α) και (β), η σχέση (1) δίνει

$$F = w + \rho gV \,.$$

Στην περίπτωση (γ), αφού το ξύλο επιπλέει, το βάρος του w' είναι ίσο, κατά μέτρο, με την άνωση: $A=w'$. Έτσι, η (1) δίνει

$$F = w + w' \,.$$

Για την περίπτωση (δ) παρατηρούμε τα εξής: Όταν το ξύλο ισορροπεί επιπλέοντας, η άνωση είναι $A_0=w'$. Όταν το ξύλο ταλαντώνεται κατακόρυφα, η άνωση μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο (δείξτε το!), σύμφωνα με μια εξίσωση της μορφής

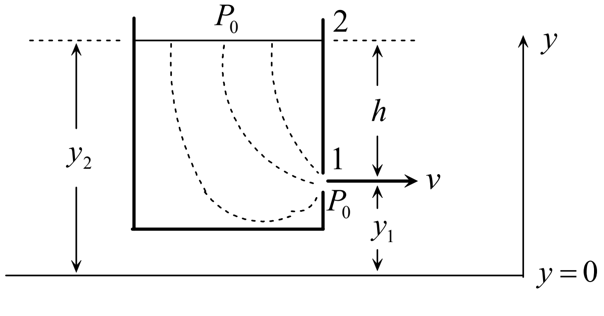
$$A = A_0 + B\cos\omega t = w' + B\cos\omega t$$

όπου B μια σταθερή ποσότητα ($0<B<w'$). Η (1), τότε, δίνει

$$F = w + w' + B\cos\omega t \,.$$

57. *Ένα δοχείο, εμβαδού διατομής A, περιέχει υγρό πυκνότητας ρ. Σε πλευρικό τοίχωμα του δοχείου και σε κατακόρυφη απόσταση h κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, ανοίγουμε μια οπή εμβαδού a, όπου $a \ll A$. Βρείτε την αρχική ταχύτητα εκροής του υγρού από την οπή, καθώς και την παροχή της αρχικής εκροής. (Το υγρό θεωρείται ιδανικό.)*

Λύση:



Τη στιγμή που ανοίγουμε την οπή, δημιουργείται μια φλέβα ροής (στο σχήμα φαίνονται διακεκομμένες μερικές ρευματικές γραμμές) η οποία εκτείνεται από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού (διατομή $A_2=A$) έως την οπή (διατομή $A_1=a$). Η πίεση και στις δύο διατομές είναι ίση με την ατμοσφαιρική: $P_1=P_2=P_0$. Καλούμε $v_1=v$ και v_2 τις ταχύτητες ροής στις αντίστοιχες διατομές, και y_1, y_2 τα ύψη στα οποία βρίσκονται οι διατομές πάνω από ένα αυθαίρετο επίπεδο αναφοράς. Από το νόμο συνεχείας,

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \;\Rightarrow\; v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{a}{A} v \;\Rightarrow\; v_2 \simeq 0 \quad (1)$$

διότι υποθέσαμε ότι $a \ll A$, έτσι ώστε $a/A \simeq 0$. Από το νόμο του Bernoulli,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \;\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y_1 = P_0 + \rho g y_2 \;\Rightarrow\; v^2 = 2g(y_2 - y_1) \;\Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2gh} \;.$$

Προσέξτε ότι η ταχύτητα εκροής από την οπή είναι ανεξάρτητη από την πυκνότητα ρ του υγρού. Η παροχή της εκροής είναι

$$\Pi = a v = a\sqrt{2gh} \;.$$

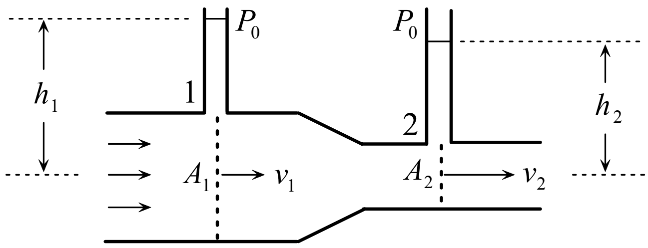
Αν με μια στρόφιγγα αυξήσουμε (ελαττώσουμε) τη διατομή a της οπής, θα αυξηθεί (ελαττωθεί) η παροχή Π χωρίς να αλλάξει η ταχύτητα v της εκροής.

Άσκηση: Λύστε πάλι το πρόβλημα, τη φορά αυτή χωρίς να θεωρήσετε ότι η διατομή a της οπής είναι αμελητέα σε σύγκριση με τη διατομή A του δοχείου. Δείξτε ότι η ακριβής τιμή της αρχικής ταχύτητας εκροής v είναι

$$v = \left[\frac{2gh}{1-\left(\dfrac{a}{A}\right)^2}\right]^{1/2} \quad \left(\simeq \sqrt{2gh} \;\; \text{όταν} \;\; \frac{a}{A} \ll 1\right).$$

58. *Στο σχήμα, ένας οριζόντιος σωλήνας διατομής A_1 στενεύει σε ομοαξονικό οριζόντιο σωλήνα διατομής A_2 ($A_2<A_1$). Στη θέση 1 του ευρύτερου τμήματος στερεώνεται ένας κατακόρυφος σωλήνας, ενώ ένας άλλος κατακόρυφος σωλήνας στερεώνεται στη θέση 2 του στενότερου τμήματος. Μέσα στο ομοαξονικό σύστημα των οριζόντιων σωλήνων ρέει νερό, το οποίο ανέρχεται σε ύψη h_1 και h_2 μέσα στους αντίστοιχους κατακόρυφους σωλήνες. (α) Σε ποιον κατακόρυφο σωλήνα ανέρχεται το νερό σε μεγαλύτερο ύψος; (β) Βρείτε την παροχή της ροής, με δεδομένα τα A_1, A_2, h_1, h_2.*

Λύση:



Θεωρούμε προσεγγιστικά ότι οι στήλες του νερού στους δύο κατακόρυφους σωλήνες ξεκινούν από τον άξονα του ομοαξονικού οριζόντιου συστήματος σωλήνων. Επειδή το νερό στους κατακόρυφους σωλήνες είναι στατικό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη θεμελιώδη εξίσωση της Υδροστατικής για να βρούμε τις πιέσεις στις διατομές 1 και 2:

$$P_1 = P_0 + \rho g h_1 \ , \quad P_2 = P_0 + \rho g h_2 \qquad (1)$$

(όπου ρ η πυκνότητα του νερού και P_0 η ατμοσφαιρική πίεση). Τώρα, όπως γνωρίζουμε (Παρ.8.13), στην οριζόντια ροή η υδροστατική πίεση είναι μεγαλύτερη εκεί όπου η διατομή της φλέβας είναι μεγαλύτερη. Δοθέντος ότι $A_1>A_2$, έχουμε έτσι ότι $P_1>P_2$, οπότε, από τις σχέσεις (1) έπεται ότι $h_1>h_2$. Το νερό, δηλαδή, ανέρχεται σε μεγαλύτερο ύψος στον κατακόρυφο σωλήνα που είναι στερεωμένος στο ευρύτερο τμήμα του ομοαξονικού συστήματος.

Ο νόμος συνεχείας δίνει

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \qquad (2)$$

όπου v_1, v_2 οι ταχύτητες ροής στις δύο διατομές. Από το νόμο του Bernoulli για οριζόντια ροή,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (1) και (2) στην (3), και λύνοντας ως προς v_1, βρίσκουμε

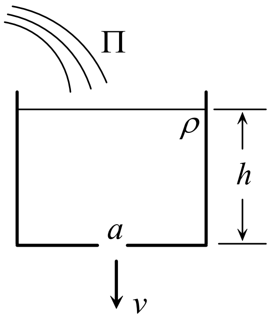
$$v_1 = A_2 \left[\frac{2g(h_1 - h_2)}{A_1^2 - A_2^2} \right]^{1/2} .$$

Η παροχή είναι

$$\Pi = A_1 v_1 = A_1 A_2 \left[\frac{2g(h_1 - h_2)}{A_1^2 - A_2^2} \right]^{1/2} .$$

59. *Στον πυθμένα δοχείου μεγάλου όγκου ανοίγουμε οπή εμβαδού a=1cm^2 (οι διαστάσεις της οποίας θεωρούνται αμελητέες σε σχέση με τη διατομή του δοχείου). Στη συνέχεια, βάζουμε το δοχείο κάτω από μια βρύση από την οποία τρέχει νερό με ρυθμό Π=140cm^3/s. Σε ποιο ύψος h θα ανέλθει η στάθμη του νερού στο δοχείο; (g=980cm/s^2)*

Λύση:



Στο δοχείο εισέρχεται νερό με σταθερή παροχή Π από τη βρύση, ενώ ταυτόχρονα εξέρχεται νερό από την οπή. Στην αρχή η στάθμη του νερού ανεβαίνει διότι η παροχή εκροής, ίση με av (όπου v η ταχύτητα εκροής από την οπή), είναι μικρότερη από την παροχή εισροής Π. Η στάθμη θα σταματήσει να ανεβαίνει όταν οι δύο παροχές γίνουν ίσες:

$$\Pi = av \quad (1)$$

Τώρα, η οπή βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση h κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Όπως δείξαμε στο Πρόβλημα 57 (δεν έχει καμία σημασία ότι εκεί η οπή ήταν σε πλευρικό τοίχωμα του δοχείου και όχι στον πυθμένα!), η ταχύτητα εκροής του υγρού είναι

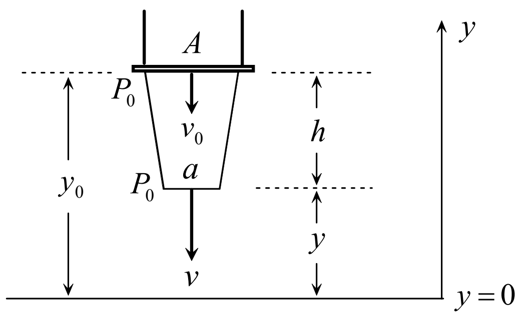
$$v = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2), έχουμε

$$h = \frac{\Pi^2}{2ga^2} = 10\,cm \ .$$

60. *Σταθερή παροχή νερού, ίση με Π, εξέρχεται από μια βρύση της οποίας το στόμιο έχει εμβαδόν διατομής Α. Βρείτε τη διατομή της στήλης του νερού σε κατακόρυφη απόσταση h κάτω από το στόμιο της βρύσης, σαν συνάρτηση των Π, Α και h.*

Λύση:



Καλούμε a τη ζητούμενη διατομή της στήλης του νερού. Έστω v η ταχύτητα ροής σε κατακόρυφη απόσταση h κάτω από τη βρύση, και έστω y το ύψος στο οποίο βρίσκεται η θέση της διατομής a ως προς ένα αυθαίρετο επίπεδο αναφοράς. Για το στόμιο της βρύσης (διατομή A), οι αντίστοιχες ποσότητες είναι v_0 και y_0. Οι πιέσεις στις διατομές A και a είναι ίσες με την ατμοσφαιρική πίεση P_0. Εφαρμόζουμε τους θεμελιώδεις νόμους της Υδροδυναμικής για τις δύο αυτές διατομές, υποθέτοντας ότι πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις ιδανικής ροής. Από το νόμο συνεχείας,

$$\Pi = A v_0 = a v \quad (1)$$

Από το νόμο του Bernoulli,

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0{}^2 + \rho g y_0 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y \quad \Rightarrow$$
$$v^2 = v_0{}^2 + 2g(y_0 - y) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0{}^2 + 2gh} \quad (2)$$

Από την (1) =>

$$v_0 = \frac{\Pi}{A} \quad (3) \qquad \text{και} \qquad a = \frac{\Pi}{v} \quad (4)$$

όπου η παροχή Π υποτίθεται γνωστή. Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (4), βρίσκουμε, τελικά,

$$a = \frac{\Pi}{\sqrt{\left(\frac{\Pi}{A}\right)^2 + 2gh}} \quad .$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

1. Διαφορικό μιας Συνάρτησης

Έστω συνάρτηση $y=f(x)$. Έστω Δx μια αυθαίρετη μεταβολή τού x: $x \to x+\Delta x$ (συμβατικά, θα θεωρήσουμε ότι $\Delta x \geq 0$). Η αντίστοιχη μεταβολή τού y είναι

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \quad .$$

Προσέξτε ότι το Δy είναι συνάρτηση *δύο* ανεξάρτητων μεταβλητών: του x και του Δx.

Η παράγωγος της f στο σημείο x είναι, εξ ορισμού,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι υπάρχει συνάρτηση $\varepsilon(x, \Delta x)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(x, \Delta x) \quad \text{όπου} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x, \Delta x) = 0 \qquad (2)$$

Άρα,

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon(x, \Delta x)\,\Delta x \qquad (3)$$

Το γινόμενο $f'(x)\Delta x$ είναι *γραμμικό* (πρώτου βαθμού) ως προς Δx, ενώ το γινόμενο $\varepsilon(x, \Delta x)\Delta x$ θα πρέπει να περιέχει όρους *τουλάχιστον δευτέρου βαθμού* ως προς Δx (δηλαδή, δεν μπορεί να περιέχει σταθερό και πρωτοβάθμιο όρο). Γράφουμε, συμβολικά,

$$\varepsilon(x, \Delta x)\Delta x \equiv O(\Delta x^2) \quad \text{όπου} \quad \Delta x^2 \equiv (\Delta x)^2 \;\; [\neq \Delta(x^2)\,!\,] \,.$$

Έτσι, η (3) γράφεται

$$\boxed{\Delta y = f'(x)\,\Delta x \; + \; O(\Delta x^2)} \qquad (4)$$

Παρατηρούμε ότι το Δy είναι άθροισμα ενός γραμμικού και ενός μη-γραμμικού όρου ως προς Δx. Επιπλέον, η παράγωγος της f στο σημείο x είναι ο συντελεστής τού Δx στο γραμμικό όρο.

Παράδειγμα: Έστω $y = f(x) = x^3$. Τότε,

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\,\Delta x + (3x\Delta x^2 + \Delta x^3)\,,$$

απ' όπου έχουμε ότι $f'(x) = 3x^2$ και $O(\Delta x^2) = 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$.

Ο γραμμικός όρος στην (4), που είναι συνάρτηση των μεταβλητών x και Δx, καλείται *διαφορικό* της συνάρτησης $y = f(x)$ και συμβολίζεται ως εξής:

$$\boxed{dy = df(x) = f'(x)\,\Delta x} \qquad (5)$$

Η (4), τότε, γράφεται

$$\Delta y = dy + O(\Delta x^2) \qquad (6)$$

Όταν το Δx είναι *απειροστό* ($0 \leq \Delta x << 1$), μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $O(\Delta x^2) \simeq 0$. Έτσι,

$$\Delta y \simeq dy = f'(x)\Delta x \quad \text{για απειροστό } \Delta x \qquad (7)$$

Προσέξτε όμως ότι, για *πεπερασμένο* (όχι απειροστό) Δx, η *διαφορά* Δy και το *διαφορικό* dy είναι, γενικά, δύο ξεχωριστές ποσότητες!

Εξαίρεση στην παραπάνω παρατήρηση αποτελεί η περίπτωση των *γραμμικών* συναρτήσεων: Έστω $y = f(x) = ax+b$. Τότε,

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = [a(x+\Delta x)+b] - (ax+b) = a\Delta x$$

και

$$dy = f'(x)\Delta x = (ax+b)'\Delta x = a\Delta x = \Delta y\,.$$

Δηλαδή, *στις γραμμικές συναρτήσεις (και μόνο σε αυτές) δεν υπάρχει διάκριση ανάμεσα στο διαφορικό και τη μεταβολή τους:* $dy = \Delta y$. Τούτο βέβαια σημαίνει ότι, για τις συναρτήσεις αυτές, $O(\Delta x^2) = 0$.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα εφαρμογής του ορισμού (5):

Για $f(x) = x^a \Rightarrow d(x^a) = (x^a)'\Delta x = a x^{a-1}\Delta x$.

Για $f(x) = e^x \Rightarrow d(e^x) = (e^x)'\Delta x = e^x \Delta x$.

Για $f(x) = \ln x \Rightarrow d(\ln x) = (\ln x)'\Delta x = \dfrac{1}{x}\Delta x$.

Προσέξτε ότι, για $f(x) = x$, έχουμε $dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta x = dx} \qquad (8)$$

(σε συμφωνία και με την παρατήρηση που κάναμε νωρίτερα για τις γραμμικές συναρτήσεις). Η (5), έτσι, μπορεί να γραφεί πιο συμμετρικά ως εξής:

$$\boxed{dy = df(x) = f'(x)\,dx} \qquad (9)$$

Διαιρώντας με dx, βρίσκουμε μια σημαντική έκφραση για την παράγωγο:

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}} \qquad (10)$$

Με λόγια, *η παράγωγος μιας συνάρτησης ισούται με το λόγο του διαφορικού της συνάρτησης προς το διαφορικό (ή ισοδύναμα, τη μεταβολή) της ανεξάρτητης μεταβλητής της.*

2. Διαφορικοί Τελεστές

Εισάγουμε τώρα τον εξής χρήσιμο συμβολισμό:

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \tag{11}$$

Προσέξτε ότι ο συμβολισμός αυτός προσπαθεί να «μιμηθεί» τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού των πραγματικών αριθμών:

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \beta$$

με τη διαφορά ότι η έκφραση $\frac{d}{dx}$ σαφέστατα *δεν* είναι αριθμός! Το σύμβολο $\frac{d}{dx}$ ονομάζεται *διαφορικός τελεστής* και, όταν τοποθετείται μπροστά από μια συνάρτηση $f(x)$, δίνει *εντολή* να πάρουμε την παράγωγο της $f(x)$. Έτσι, γράφουμε:

$$\boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)} \tag{12}$$

Η σχέση (12) περιέχει τρεις διαφορετικούς συμβολισμούς της παραγώγου μιας συνάρτησης!

Και οι παράγωγοι ανώτερης τάξης μπορούν να παρασταθούν με τη βοήθεια διαφορικών τελεστών. Για παράδειγμα, η δεύτερη παράγωγος της $y=f(x)$ γράφεται

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

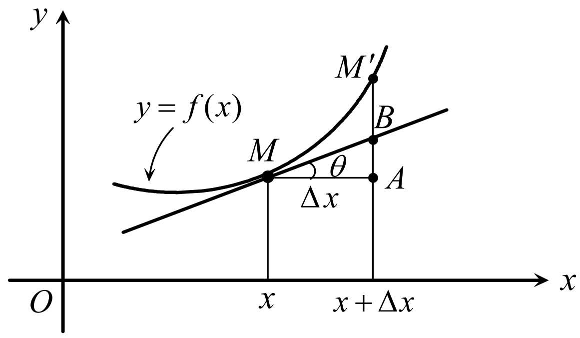
ή

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{13}$$

Άσκηση: Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες του διαφορικού:

1. $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$
2. $d[f(x)g(x)] = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$
3. $d[cf(x)] = c\,df(x) \quad (c=\sigma\tau\alpha\theta.)$
4. $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{[g(x)]^2}$

3. Γεωμετρική Σημασία του Διαφορικού



Στο σχήμα βλέπουμε τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y= f(x)$. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $M\equiv(x,\ y)$ της καμπύλης, και φέρουμε την εφαπτομένη στην καμπύλη στο σημείο αυτό. Η ευθεία αυτή σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x. Όπως βλέπουμε, στη μεταβολή $\Delta x=MA$ του x αντιστοιχεί η μεταβολή $\Delta y=AM'$ του y. Το τμήμα AB, τότε, αντιπροσωπεύει το διαφορικό τής f για τις δοσμένες τιμές των x και Δx. Πράγματι:

$$dy = f'(x)\,\Delta x = (\tan\theta)\,\Delta x = \frac{AB}{MA}\,MA = AB\ .$$

Επίσης, από την (6),

$$O(\Delta x^2) = \Delta y - dy = AM' - AB = BM'\ .$$

Αν η f ήταν *γραμμική*, θα είχαμε $B\equiv M'$, οπότε $O(\Delta x^2)=0$ και $\Delta y=dy$.

4. Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f και g, τέτοιες ώστε $y=f(u)$ και $u=g(x)$. Η σύνθετη συνάρτηση $(f\circ g)$ ορίζεται ως εξής:

$$y = (f\circ g)(x) \equiv f\,[\,g(x)\,]\ .$$

Πιο απλά (και με κίνδυνο να εξοργίσουμε τους μαθηματικούς!), γράφουμε, παραλείποντας τα σύμβολα των συναρτήσεων: $y= y(u)$, $u= u(x)$, και $y= y(x)= y\,[u(x)]$.

Θέλουμε τώρα μια έκφραση για την παράγωγο του y ως προς x. Η παράγωγος αυτή ισούται με το πηλίκο dy/dx. Γράφουμε:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = y'(u)\,u'(x)$$

που είναι ο γνωστός κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης. Προσέξτε πόσο απλουστεύεται η απόδειξη αυτού του κανόνα αν εκφράσουμε τις παραγώγους σαν πηλίκα διαφορικών !

5. Διαφορικές Εξισώσεις

Όπως γνωρίζουμε, μια *αλγεβρική εξίσωση* έχει σαν λύση της ένα *σύνολο αριθμών* (πραγματικών ή και μιγαδικών). Αντίθετα, μια *διαφορική εξίσωση* έχει σαν λύση ένα *σύνολο συναρτήσεων*. Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης είναι μια αλγεβρική σχέση που εμπεριέχει την παράγωγο μιας άγνωστης συνάρτησης και, ενδεχομένως, και την ίδια τη συνάρτηση. Μια τέτοια εξίσωση έχει άπειρες λύσεις. Για να προσδιορίσουμε κάποια από αυτές, μαζί με τη διαφορική εξίσωση θα πρέπει να μας δοθεί και μια *αρχική συνθήκη*. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1) Βρείτε τη συνάρτηση $y=y(x)$ που επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$y' = e^{2x} \tag{14}$$

και ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$y = 1 \quad \text{όταν} \quad x = 0 \tag{15}$$

Η (14) γράφεται:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \;\Rightarrow\; dy = e^{2x}dx \tag{16}$$

Μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους:

(α) Βρίσκουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα της (16), το οποίο αποτελεί και τη *γενική λύση* τής (14):

$$\int dy = \int e^{2x}dx \;\Rightarrow\; y + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_2 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}e^{2x} + (C_2 - C_1)$$

ή, επειδή τα C_1, C_2 είναι αυθαίρετα,

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} + C \tag{17}$$

Προσέξτε ότι η γενική λύση (17) παριστά ένα άπειρο πλήθος συναρτήσεων, αφού η σταθερά C είναι αυθαίρετη. Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη (15) στην (17), έχουμε:

$$1 = \frac{1}{2}e^0 + C \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{2} \;.$$

Από την (17), τότε, βρίσκουμε την *ειδική λύση*

$$y = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1) \;.$$

(β) Παίρνουμε τα ορισμένα ολοκληρώματα των δύο μελών τής (16), τοποθετώντας στα κάτω όρια τις αντίστοιχες τιμές των y και x που δίνονται από την αρχική συνθήκη (15) (στα πάνω όρια θέτουμε απλά τις μεταβλητές y και x):

$$\int_1^y dy = \int_0^x e^{2x}dx \;\Rightarrow\; y - 1 = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^x = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^0 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1) \;.$$

Παρατηρούμε ότι, στο βαθμό που δεν μας ενδιαφέρει η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης, ο δεύτερος τρόπος εργασίας είναι συντομότερος.

2) Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση $y' = 5y$, με την αρχική συνθήκη: y=3 όταν x=0.

$$\frac{dy}{dx} = 5y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = 5dx \;\Rightarrow\; \int_3^y \frac{dy}{y} = 5\int_0^x dx \;\Rightarrow\; [\ln y]_3^y = 5x \;\Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{y}{3}\right) = 5x \;\Rightarrow\; y = 3e^{5x} \;.$$

3) Επιλύστε την εξίσωση $y' = \dfrac{2}{2x+1}$, με την αρχική συνθήκη: y=0 όταν x=0.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x+1} \;\Rightarrow\; dy = \frac{2\,dx}{2x+1} \;\Rightarrow\; \int_0^y dy = 2\int_0^x \frac{dx}{2x+1} \;\Rightarrow$$

$$y = 2\left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^x = \ln(2x+1) \;.$$

4) Επιλύστε την εξίσωση $y' = 2xy$, με την αρχική συνθήκη: y=5 όταν x=1.

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = 2x\,dx \;\Rightarrow\; \int_5^y \frac{dy}{y} = 2\int_1^x x\,dx \;\Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{y}{5}\right) = x^2 - 1 \;\Rightarrow\; y = 5e^{x^2-1} \;.$$

Άσκηση: Επιλύστε και πάλι τις διαφορικές εξισώσεις των Παραδειγμάτων (2), (3) και (4), τη φορά αυτή βρίσκοντας πρώτα τις γενικές λύσεις των εξισώσεων, όπως στο Παράδειγμα 1(α).

ΒΑΣΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right) + C$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Κ. Δ. Αλεξόπουλου, Δ. Ι. Μαρίνου, *Γενική Φυσική:* Τόμος 1ος, *Μηχανική* (Εκδόσεις Ολυμπία, 1992).

2. M. Alonso, E. J. Finn, *Fundamental University Physics:* Volume 1, *Mechanics* (Addison-Wesley, 1967).

3. M. Alonso, E. J. Finn, *Physics* (Addison-Wesley, 1992).

4. D. D. Berkey, *Calculus*, 2nd Edition (Saunders College, 1988).

5. A. F. Bermant, I. G. Aramanovich, *Mathematical Analysis* (Mir Publishers, 1975).

6. F. J. Bueche, D. A. Jerde, *Principles of Physics*, 6th Edition (McGraw-Hill, 1995).

7. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd Edition (Addison-Wesley, 1980).

8. A. Halpern, *Problems in Physics* (Schaum's Series, McGraw-Hill, 1988).

9. J. B. Marion, S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 4th Edition (Saunders College, 1995).

10. R. Resnick, D. Halliday, K. S. Krane, *Physics:* Volume 1, 5th Edition (Wiley, 2002).

11. R. A. Serway, *Physics*, 4th Edition (Saunders College, 1996).

12. R. A. Serway, J. S. Faughn, *College Physics* (Saunders College, 1995).

13. K. R. Symon, *Mechanics*, 3rd Edition (Addison-Wesley, 1971).

14. H. D. Young, R. A. Freedman, *University Physics*, 11th Edition (Addison-Wesley, 2004).

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ