Κ. Ι. Παπαχρήστου

# ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΝΕΥΤΩΝΕΙΑΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ: ΜΙΑ ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΓΙΑ ΤΟΝ ΣΚΕΠΤΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΤΗ

Μετάφραση από τα Αγγλικά, του άρθρου:

*Foundations of Newtonian Dynamics: An Axiomatic Approach for the Thinking Student*

(http://arxiv.org/abs/1205.2326)

Αθήνα, 2012

# Θεμελιώδεις Αρχές της Νευτώνειας Δυναμικής: Μια Αξιωματική Προσέγγιση για τον Σκεπτόμενο Μαθητή

Κ. Ι. Παπαχρήστου [1]

*Τομέας Φυσικών Επιστημών, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, Πειραιάς 18539*

**Περίληψη.** Παρά την φαινομενική της απλότητα, η Νευτώνεια Μηχανική περιέχει λεπτά εννοιολογικά στοιχεία που θα μπορούσαν να προκαλέσουν κάποιο βαθμό σύγχυσης στον βαθιά σκεπτόμενο σπουδαστή των θετικών επιστημών. Αυτά τα στοιχεία αφορούν θεμελιώδη ζητήματα όπως, π.χ., ο αριθμός των ανεξάρτητων νόμων που απαιτούνται για τη δόμηση της θεωρίας, ή, η διάκριση ανάμεσα σε γνήσιους φυσικούς νόμους και παράγωγα θεωρήματα. Το παρόν άρθρο προσπαθεί να ξεκαθαρίσει αυτά τα ζητήματα, επανεξετάζοντας τα θεμέλια της Νευτώνειας Δυναμικής και προτείνοντας μια αυστηρή αξιωματική προσέγγιση σε αυτήν. Ολόκληρη η θεωρία δομείται πάνω σε δύο θεμελιώδη αξιώματα: την διατήρηση της ορμής και την αρχή της επαλληλίας των αλληλεπιδράσεων. Αποδεικνύεται ότι οι Νόμοι του Νεύτωνα, καθώς και όλα τα γνωστά θεωρήματα της Μηχανικής, απορρέουν από αυτές τις δύο βασικές αρχές.

## 1. Εισαγωγή

Η διδασκαλία της Μηχανικής σε εισαγωγικό επίπεδο δεν είναι καθόλου εύκολη υπόθεση, ειδικά σε μια τάξη όπου οι μαθητές αναζητούν τα βαθύτερα στρώματα της γνώσης! Το πρόβλημα είναι ότι, ακόμα και τα πιο διάσημα διδακτικά εγχειρίδια πάνω στο αντικείμενο αυτό, μπορεί να αφήσουν τον μαθητή με κάποιες απορίες, οι οποίες εκφράζονται με ερωτήσεις όπως οι παρακάτω:

1. Ο Πρώτος Νόμος του Νεύτωνα είναι ένας νόμος κίνησης ελευθέρων σωμάτων, ή ένα αξίωμα ύπαρξης αδρανειακών συστημάτων αναφοράς;
2. Είναι οι δύο πρώτοι νόμοι του Νεύτωνα ανεξάρτητοι μεταξύ τους; Απ' ό,τι φαίνεται, ο Πρώτος Νόμος δεν είναι παρά ειδική περίπτωση του Δεύτερου!
3. Είναι ο Δεύτερος Νόμος ένας πραγματικός νόμος, ή απλά ένας ορισμός (της δύναμης);
4. Είναι ο Τρίτος Νόμος πιο θεμελιώδης από την διατήρηση της ορμής, ή μήπως ισχύει το αντίθετο;
5. Και, τελικά, πόσοι *ανεξάρτητοι* νόμοι απαιτούνται στ' αλήθεια για να δομηθεί μια πλήρης θεωρητική βάση για την Μηχανική;

Σ' αυτό το άρθρο περιγράφουμε μια αξιωματική προσέγγιση στην εισαγωγική Μηχανική, η οποία (προσέγγιση) είναι αυστηρή όσο και παιδαγωγική. Σκοπός της είναι να ξεκαθαρίσει ζητήματα όπως αυτά που προαναφέρθηκαν, όσο πιο νωρίς γίνεται στη διαδικασία της μάθησης, βοηθώντας έτσι τον σπουδαστή να αποκτήσει βαθιά κατανόηση των βασικών ιδεών της θεωρίας. Ασφαλώς, δεν είναι πρόθεση του άρθρου να

[1] *papachristou@snd.edu.gr*

παρουσιάσει ένα πλήρες περίγραμμα ενός μαθήματος Μηχανικής! Θα περιοριστούμε στις πλέον θεμελιώδεις έννοιες και αρχές, όπως αυτές διδάσκονται στα πρώτα κεφάλαια της Δυναμικής (δεν θα μας απασχολήσει εδώ η Κινηματική, αφού αυτό το αντικείμενο περιορίζεται στην περιγραφή της κίνησης χωρίς να επεκτείνεται στη μελέτη των φυσικών νόμων που κυβερνούν αυτή την κίνηση).

Η αξιωματική βάση της προσέγγισής μας συντίθεται από δύο θεμελιώδη αξιώματα, τα οποία παρουσιάζονται στην Παράγραφο 2. Το πρώτο αξίωμα ενσωματώνει τόσο την ύπαρξη *αδρανειακών συστημάτων αναφοράς*, όσο και την *διατήρηση της ορμής*, ενώ το δεύτερο αξίωμα εκφράζει την *αρχή της επαλληλίας για τις αλληλεπιδράσεις*. Ο *Νόμος της Αδράνειας* προκύπτει ως πόρισμα του πρώτου αξιώματος.

Στην Παρ.3, ορίζεται η έννοια της *δύναμης* πάνω σε ένα σωματίδιο που υπόκειται σε αλληλεπιδράσεις (με όμοιο τρόπο όπως στον *Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα*) και αποδεικνύεται, με βάση το δεύτερο αξίωμα, ότι μια σύνθετη αλληλεπίδραση ενός σωματιδίου με άλλα σωματίδια περιγράφεται από ένα διανυσματικό άθροισμα δυνάμεων. Στη συνέχεια, με χρήση των δύο αξιωμάτων, αποδεικνύεται ο *Νόμος Δράσης-Αντίδρασης*. Τέλος, μελετάται η γενικότερη περίπτωση συστημάτων σωματιδίων που υπόκεινται σε εξωτερικές αλληλεπιδράσεις.

Για πληρέστερη παρουσίαση του θέματος, στην Παρ.4 συζητούνται μερικές παράγωγοι έννοιες, όπως, π.χ., η *στροφορμή* και το *έργο* μιας δύναμης. Για διευκόλυνση του μαθητή στη μελέτη, παρατίθενται αναλυτικά όλες οι αποδείξεις των θεωρημάτων.

## 2. Τα Θεμελιώδη Αξιώματα

Ξεκινούμε με μερικούς βασικούς ορισμούς.

***Ορισμός 1.*** Ως *σύστημα αναφοράς* θεωρείται ένα σύστημα συντεταγμένων (ή, ένα σύστημα αξόνων) που χρησιμοποιεί ένας παρατηρητής για να προσδιορίζει τη θέση, τον προσανατολισμό, κλπ., διαφόρων αντικειμένων στο χώρο. Η θέση του ίδιου του παρατηρητή θεωρείται *σταθερή* ως προς το δικό του σύστημα αναφοράς.

***Ορισμός 2.*** Ως *απομονωμένο σύστημα σωματιδίων* θεωρείται ένα σύστημα σωματιδίων τα οποία υπόκεινται μόνο στις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις, δηλαδή, δεν υπόκεινται σε *εξωτερικές* αλληλεπιδράσεις. Αλλά και κάθε σύστημα σωματιδίων που υπόκεινται σε εξωτερικές αλληλεπιδράσεις οι οποίες, όμως, με κάποιον τρόπο αλληλοαναιρούνται έτσι ώστε η κίνηση του συστήματος να είναι πανομοιότυπη με αυτή ενός απομονωμένου συστήματος, θα θεωρείται (καταχρηστικά) ως «απομονωμένο» σύστημα. Ένα απομονωμένο σύστημα που αποτελείται από ένα μοναδικό σωματίδιο, καλείται *ελεύθερο σωματίδιο*.

Το πρώτο θεμελιώδες αξίωμα διατυπώνεται ως εξής:

***Αξίωμα 1.*** Είναι δυνατό να βρεθεί μια κλάση συστημάτων αναφοράς (*αδρανειακά συστήματα*) τέτοια ώστε, για κάθε *απομονωμένο* σύστημα σωματιδίων, να ισχύει μια διανυσματική εξίσωση της μορφής:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \text{χρονικά σταθερό} \qquad (1)$$

όπου $\vec{v}_i$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου που αριθμείται με δείκτη $i$ ($i=1,2,\cdots$), και $m_i$ είναι μια σταθερή ποσότητα που σχετίζεται με αυτό το σωματίδιο και είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό ή τη φύση των αλληλεπιδράσεων στις οποίες το σωματίδιο συμμετέχει.

Το $m_i$ καλείται *μάζα* και το $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ *ορμή* του σωματιδίου. Η ποσότητα

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i \tag{2}$$

καλείται *ολική ορμή* του συστήματος σωματιδίων, ως προς το θεωρούμενο σύστημα αναφοράς. Το Αξίωμα 1, τότε, εκφράζει την *αρχή διατήρησης της ορμής*: η ολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος σωματιδίων, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι χρονικά σταθερή. (Το ίδιο ισχύει, ειδικά, για ένα ελεύθερο σωματίδιο.)

***Πόρισμα 1.*** Ένα ελεύθερο σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα (χωρίς επιτάχυνση) ως προς οποιοδήποτε *αδρανειακό* σύστημα αναφοράς.

***Πόρισμα 2.*** Δύο ελεύθερα σωματίδια κινούνται πάντα με σταθερή ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο.

***Πόρισμα 3.*** Η θέση ενός ελεύθερου σωματιδίου μπορεί να ληφθεί ως αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Παρατηρούμε ότι τα Πορίσματα 1 και 2 αποτελούν εναλλακτικές διατυπώσεις του *Νόμου της Αδράνειας* (*Πρώτου Νόμου του Νεύτωνα*).

Θεωρούμε τώρα ένα απομονωμένο σύστημα δύο σωματιδίων με μάζες $m_1$ και $m_2$. Ας υποθέσουμε ότι επιτρέπουμε στα σωματίδια να αλληλεπιδράσουν για κάποιο χρονικό διάστημα *Δt*. Από τη διατήρηση της ορμής, έχουμε:

$$\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \;\Rightarrow\; \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \;\Rightarrow\; m_1 \Delta\vec{v}_1 = -m_2 \Delta\vec{v}_2 \;.$$

Παρατηρούμε ότι οι μεταβολές των ταχυτήτων των δύο σωματιδίων στο (αυθαίρετο) διάστημα *Δt* θα πρέπει να έχουν αντίθετες κατευθύνσεις, κάτι που επαληθεύεται πειραματικά. Επιπλέον, θα έχουμε:

$$\frac{|\Delta\vec{v}_1|}{|\Delta\vec{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \tag{3}$$

ανεξάρτητα από το είδος της αλληλεπίδρασης ή το χρονικό διάστημα *Δt* (πράγμα που επίσης επαληθεύεται πειραματικά). Τα παραπάνω αποτελούν επαλήθευση της ισχύος του πρώτου αξιώματος. Επιπλέον, η σχέση (3) μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε αριθμητικά τη μάζα ενός σωματιδίου, σε σχέση με τη μάζα οποιουδήποτε άλλου σωματιδίου, αν αφήσουμε τα δύο σωματίδια να αλληλεπιδράσουν για κάποιο χρονικό διάστημα.

Μέχρι τώρα εξετάσαμε την περίπτωση των απομονωμένων συστημάτων και, ως ειδική περίπτωση, των ελεύθερων σωματιδίων. Θεωρούμε τώρα ένα σωματίδιο που υπόκειται σε αλληλεπιδράσεις με τον υπόλοιπο κόσμο. Τότε, γενικά (εκτός κι αν αυτές οι αλληλεπιδράσεις με κάποιον τρόπο αλληλοαναιρούνται), η ορμή του σωματιδίου δεν θα παραμένει σταθερή ως προς ένα *αδρανειακό* σύστημα αναφοράς, δηλαδή, θα είναι συνάρτηση του χρόνου. Το δεύτερο αξίωμά μας, το οποίο εκφράζει την *αρχή της επαλληλίας για τις αλληλεπιδράσεις*, δηλώνει ότι οι εξωτερικές αλληλεπιδράσεις δρουν πάνω στο σωματίδιο ανεξάρτητα η μία από την άλλη, και τα αποτελέσματά τους υπερτίθενται:

***Αξίωμα 2.*** Αν ένα σωματίδιο μάζας *m* υπόκειται σε αλληλεπιδράσεις με τα σωματίδια $m_1, m_2, \cdots$, τότε, για κάθε χρονική στιγμή *t*, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του ισούται με

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)_i \tag{4}$$

όπου $(d\vec{p}/dt)_i$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σωματιδίου *m*, ο οφειλόμενος αποκλειστικά στην αλληλεπίδραση του σωματιδίου αυτού με το σωματίδιο $m_i$ (δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής $\vec{p}$ αν το σωματίδιο *m* αλληλεπιδρούσε *μόνο* με το $m_i$).

## 3. Η Έννοια της Δύναμης

Ορίζουμε τώρα την έννοια της δύναμης, με τρόπο ανάλογο με τον *Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα*:

***Ορισμός 3.*** Θεωρούμε ένα σωματίδιο μάζας *m*, το οποίο υπόκειται σε αλληλεπιδράσεις. Έστω $\vec{p}(t)$ η ορμή του σωματιδίου σαν συνάρτηση του χρόνου, όπως μετριέται σε σχέση με ένα *αδρανειακό* σύστημα αναφοράς. Η διανυσματική ποσότητα

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{5}$$

καλείται *ολική δύναμη* που δρα στο σωματίδιο τη χρονική στιγμή *t*.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι, για ένα μοναδικό σωματίδιο, $\vec{p} = m\vec{v}$ με σταθερό *m*, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (5) στην ισοδύναμη μορφή:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{6}$$

όπου $\vec{a}$ είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου τη στιγμή *t*.

***Πόρισμα 4.*** Θεωρούμε ένα σωματίδιο μάζας *m*, το οποίο υπόκειται σε αλληλεπιδράσεις με τα σωματίδια $m_1, m_2, \cdots$. Έστω $\vec{F}$ η ολική δύναμη στο *m* τη στιγμή *t*, και έστω $\vec{F}_i$ η δύναμη στο *m* η οφειλόμενη αποκλειστικά στην αλληλεπίδρασή του με το $m_i$. Τότε, από την αρχή της επαλληλίας για τις αλληλεπιδράσεις (Αξίωμα 2), όπως αυτή εκφράζεται από τη σχέση (4), έχουμε:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \tag{7}$$

***Θεώρημα 1.*** Θεωρούμε δύο σωματίδια *1* και *2*. Έστω $\vec{F}_{12}$ η δύναμη στο σωματίδιο *1* λόγω της αλληλεπίδρασής του με το σωματίδιο *2* τη χρονική στιγμή *t*, και έστω $\vec{F}_{21}$ η δύναμη στο σωματίδιο *2* λόγω της αλληλεπίδρασής του με το σωματίδιο *1* τη στιγμή αυτή. Τότε,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{8}$$

***Απόδειξη.*** Λόγω της αρχής της επαλληλίας, οι δυνάμεις $\vec{F}_{12}$ και $\vec{F}_{21}$ είναι ανεξάρτητες από την παρουσία ή όχι άλλων σωματιδίων που τυχόν αλληλεπιδρούν με τα σωματίδια *1* και *2*. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύστημα των δύο σωματιδίων είναι απομονωμένο. Τότε, από τη διατήρηση της ορμής, και με χρήση της σχέσης (5), έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \ .$$

Η σχέση (8) εκφράζει τον *Νόμο Δράσης και Αντίδρασης* (*Τρίτος Νόμος του Νεύτωνα*).

***Θεώρημα 2.*** Ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ορμής $\vec{P}(t)$ ενός συστήματος σωματιδίων, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ισούται με την ολική *εξωτερική* δύναμη που δρα στο σύστημα τη χρονική στιγμή *t*.

***Απόδειξη.*** Θεωρούμε ένα σύστημα σωματιδίων με μάζες $m_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$. Έστω $\vec{F}_i$ η ολική *εξωτερική* δύναμη στο $m_i$ (λόγω των αλληλεπιδράσεών του με σωματίδια που *δεν ανήκουν* στο σύστημα), και έστω $\vec{F}_{ij}$ η *εσωτερική* δύναμη στο $m_i$ λόγω της αλληλεπίδρασής του με το $m_j$ (κατά συνθήκη, $\vec{F}_{ij} = 0$ για *i=j*). Τότε, από τη σχέση (5), και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (7), έχουμε:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij} \ .$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) για την ολική ορμή, έχουμε:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_{ij} \vec{F}_{ij} \ .$$

Όμως,

$$\sum_{ij} \vec{F}_{ij} = \sum_{ji} \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left( \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} \right) = 0 \,,$$

όπου λάβαμε υπόψη τον νόμο δράσης-αντίδρασης (8). Έτσι, τελικά,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{ext} \tag{9}$$

όπου $\vec{F}_{ext}$ η *ολική εξωτερική δύναμη* στο σύστημα.

## 4. Παράγωγες Έννοιες και Θεωρήματα

Έχοντας παρουσιάσει τις πιο θεμελιώδεις έννοιες της Μηχανικής, στρεφόμαστε τώρα σε μερικές χρήσιμες παράγωγες έννοιες και συναφή θεωρήματα, όπως η στροφορμή και η σχέση της με τη ροπή, το έργο και η σχέση του με την κινητική ενέργεια, και τα συντηρητικά πεδία δυνάμεων και ο ρόλος τους στη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

***Ορισμός 4.*** Έστω *O* η αρχή (των συντεταγμένων) ενός *αδρανειακού* συστήματος αναφοράς, και έστω $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης, ως προς το *O*, ενός σωματιδίου μάζας *m*. Η διανυσματική ποσότητα

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \left( \vec{r} \times \vec{v} \right) \tag{10}$$

(όπου $\vec{p} = m\vec{v}$ η ορμή του σωματιδίου στο θεωρούμενο σύστημα αναφοράς) καλείται *στροφορμή* του σωματιδίου ως προς το σημείο *O*.

***Θεώρημα 3.*** Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός σωματιδίου ως προς το *O*, ισούται με

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{T} \tag{11}$$

όπου $\vec{F}$ η *ολική* δύναμη στο σωματίδιο τη χρονική στιγμή *t*, και $\vec{T}$ η *ροπή* αυτής της δύναμης ως προς το *O* τη στιγμή αυτή.

***Απόδειξη.*** Η σχέση (11) αποδεικνύεται εύκολα με παραγώγιση της σχέσης (10) ως προς το χρόνο, και με χρήση της σχέσης (5).

***Πόρισμα 5.*** Αν η ροπή της ολικής δύναμης σε ένα σωματίδιο, ως προς κάποιο σημείο *O*, είναι μηδέν, τότε η στροφορμή του σωματιδίου ως προς το *O* μένει σταθερή (*αρχή διατήρησης της στροφορμής*).

Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, η παραπάνω αρχή διατήρησης ισχύει και στη γενικότερη περίπτωση ενός συστήματος σωματιδίων (βλ., π.χ., [1-5]).

***Ορισμός 5.*** Θεωρούμε ένα σωματίδιο μάζας $m$ το οποίο βρίσκεται μέσα σε ένα *πεδίο δυνάμεων* $\vec{F}(\vec{r})$, όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου ως προς την αρχή $O$ ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Έστω $C$ μια καμπύλη που παριστά την τροχιά του σωματιδίου από ένα σημείο $A$ ως ένα σημείο $B$ μέσα στο πεδίο. Τότε, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$W_{AB}=\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \tag{12}$$

καλείται *έργο* του πεδίου δυνάμεων πάνω στο $m$, κατά μήκος της διαδρομής $C$. (*Σημείωση:* Ο ορισμός αυτός ισχύει ανεξάρτητα από το αν στο σωματίδιο δρουν πρόσθετες δυνάμεις που δεν σχετίζονται με το πεδίο, δηλαδή, ανεξάρτητα από το αν η $\vec{F}(\vec{r})$ είναι ή όχι η ολική δύναμη πάνω στο $m$.)

***Θεώρημα 4.*** Έστω $\vec{F}(\vec{r})$ η *ολική* δύναμη σε ένα σωματίδιο μάζας $m$, μέσα σε ένα πεδίο. Τότε, το έργο του πεδίου πάνω στο σωματίδιο, κατά μήκος μιας τροχιάς $C$ από το $A$ στο $B$, ισούται με

$$W_{AB}=\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = E_{k,B}-E_{k,A} = \Delta E_k \tag{13}$$

όπου

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m} \tag{14}$$

η *κινητική ενέργεια* του σωματιδίου.

***Απόδειξη.*** Με χρήση της σχέσης (6), έχουμε:

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=m\vec{v}\cdot d\vec{v}=\frac{1}{2}m\,d(\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{1}{2}m\,d(v^2)=mvdv\,,$$

απ' όπου έπεται αμέσως η σχέση (13).

***Ορισμός 6.*** Ένα πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r})$ καλείται *συντηρητικό* αν υπάρχει συνάρτηση $E_p(\vec{r})$ (*δυναμική ενέργεια*) τέτοια ώστε το έργο πάνω σε ένα σωματίδιο, κατά μήκος *οποιασδήποτε* διαδρομής από το $A$ στο $B$, να μπορεί να γραφεί:

$$W_{AB}=\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = E_{p,A}-E_{p,B} = -\Delta E_p \tag{15}$$

***Θεώρημα 5.*** Αν η ολική δύναμη $\vec{F}(\vec{r})$ πάνω σε ένα σωματίδιο $m$ είναι συντηρητική, με αντίστοιχη δυναμική ενέργεια $E_p(\vec{r})$, τότε η ποσότητα

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2+E_p(\vec{r}) \tag{16}$$

(*ολική μηχανική ενέργεια* του σωματιδίου) μένει σταθερή κατά μήκος οποιασδήποτε τροχιάς του σωματιδίου (*διατήρηση της μηχανικής ενέργειας*).

***Απόδειξη.*** Συνδυάζοντας τη σχέση (13) (η οποία ισχύει γενικά για *κάθε* είδος δύναμης) με τη σχέση (15) (η οποία ισχύει για *συντηρητικά* πεδία δυνάμεων), βρίσκουμε:

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \;\Rightarrow\; \Delta\,(E_k + E_p) = 0 \;\Rightarrow\; E_k + E_p = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Τα θεωρήματα 4 και 5 γενικεύονται και για την περίπτωση ενός συστήματος σωματιδίων [1-5].

## 5. Περίληψη – Σχόλια

Η Νευτώνεια Μηχανική είναι το πρώτο αντικείμενο της Φυσικής με το οποίο έρχεται σε επαφή ένας προπτυχιακός σπουδαστής. Συνεχίζει, εν τούτοις, να αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της Μηχανικής ακόμα και σε πιο προχωρημένα επίπεδα μελέτης, παρά τον επικυρίαρχο ρόλο που παίζουν εκεί οι γενικότεροι φορμαλισμοί της Λαγκρανζιανής και της Χαμιλτονιανής Δυναμικής.

Από την εμπειρία μου ως δασκάλου συνάγω ότι, παρά την φαινομενική της απλότητα, η Νευτώνεια Μηχανική περιέχει λεπτά εννοιολογικά στοιχεία που θα μπορούσαν να προκαλέσουν κάποιο βαθμό σύγχυσης στον βαθιά σκεπτόμενο μαθητή. Ο μέσος μαθητής, βέβαια, αισθάνεται βολικά με την ιδέα ότι ολόκληρη η θεωρία χτίζεται πάνω σε τρεις μάλλον απλούς νόμους που οφείλονται στην ιδιοφυΐα του Νεύτωνα. Στη σκέψη του πιο απαιτητικού μαθητή, όμως, εγείρονται βαθύτερα ερωτήματα, όπως, π.χ., ποιος είναι ο αριθμός των *ανεξάρτητων* νόμων που απαιτούνται για μια πλήρη θεμελίωση της θεωρίας, ή, ποιοι είναι γνήσιοι φυσικοί νόμοι, σε αντίθεση με άλλους που μπορούν να *εξαχθούν* ως θεωρήματα.

Το παρόν άρθρο πρότεινε μια αξιωματική προσέγγιση στη Μηχανική, βασισμένη σε δύο θεμελιώδεις, εμπειρικά επαληθεύσιμους νόμους: την *αρχή διατήρησης της ορμής* και την *αρχή της επαλληλίας για τις αλληλεπιδράσεις*. Όπως αποδείχθηκε, όλες οι γνώριμες ιδέες της Μηχανικής (συμπεριλαμβανομένων, φυσικά, των Νόμων του Νεύτωνα) απορρέουν με φυσικό τρόπο από αυτές τις βασικές αρχές. Για μέγιστη οικονομία στον φορμαλισμό μας, εκφράσαμε την πρώτη αρχή ως προς ένα σύστημα σωματιδίων και αντιμετωπίσαμε το μοναδικό σωματίδιο σαν ειδική περίπτωση. Με στόχο την πληρότητα της παρουσίασης, όλα τα θεωρήματα συνοδεύτηκαν από αναλυτικές αποδείξεις.

Με κανέναν τρόπο δεν ισχυριζόμαστε, βέβαια, ότι αυτή η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι μοναδική ή παιδαγωγικά υπέρτερη άλλων καθιερωμένων μεθόδων που ασπάζονται διαφορετικές απόψεις σχετικά με την αξιωματική θεμελίωση της Κλασικής Μηχανικής (βλ., π.χ., μια ιστορική επισκόπηση αυτών των απόψεων στο πρώτο κεφάλαιο του [6]). Επιπλέον, η προσέγγιση αυτή δεν αποφεύγει τα συνήθη θεωρητικά προβλήματα της Νευτώνειας Μηχανικής (βλ., π.χ., [7,8]), πιο σημαντικό εκ των οποίων είναι το εξής: Για να ελέγξουμε αν ένα δοσμένο σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό, θα πρέπει να διαπιστώσουμε αν ένα ελεύθερο σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς αυτό. Όμως, η έννοια ενός «ελεύθερου» σωματιδίου είναι καθαρά θεωρητική, για τους εξής λόγους: (1) Κάθε σωματίδιο υπόκειται σε βαρυτικές –τουλάχιστον- αλληλεπιδράσεις με τον υπόλοιπο κόσμο. (2) Η παρατήρηση ενός σωματιδίου προϋποθέτει κάποιας μορφής αλληλεπίδραση με αυτό. Όσο ασθενής κι αν είναι, λοιπόν, αυτή η αλληλεπίδραση, το σωματίδιο δεν μπορεί να θεωρείται απόλυτα ελεύθερο κατά τη διάρκεια της παρατήρησης.

Σε κάθε περίπτωση, πάντως, είναι φανερό ότι η Κλασική Μηχανική παραμένει ανοιχτή σε αναθεωρήσεις και σε νέες προσεγγίσεις, και πάντα μπορεί κανείς να πει κάτι παραπάνω για πράγματα που οι περισσότεροι σπουδαστές λαμβάνουν ως δεδομένα (αυτό, βέβαια, δεν αποτελεί αποκλειστικά δική τους ευθύνη!). Ευτυχώς, κάποιοι από τους δικούς μου μαθητές δεν ανήκουν σ' αυτή την κατηγορία. Εκτιμώ ειλικρινά τη δυσκολία που συναντώ για να τα βγάλω πέρα μαζί τους στην τάξη!

## Αναφορές

[1] M. Alonso, E. J. Finn, *Fundamental University Physics*, Volume I: *Mechanics* (Addison-Wesley, 1967).

[2] K. R. Symon, *Mechanics*, 3rd Edition (Addison-Wesley, 1971).

[3] J. B. Marion, S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 4th Edition (Saunders College, 1995).

[4] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd Edition (Addison-Wesley, 1980).

[5] Κ. Ι. Παπαχρήστου, *Εισαγωγή στη Μηχανική των Σωματιδίων και των Συστημάτων* (Εκδόσεις Σχολής Ναυτικών Δοκίμων, 2010).
http://openeclass.snd.edu.gr/openeclass-2.3.1/modules/document/file.php/TOM6103/Mechanics%20Volume%20PDF.pdf

[6] N. C. Rana, P. S. Joag, *Classical Mechanics* (Tata McGraw-Hill, 1991).

[7] C.-E. Khiari, *Newton's Laws of Motion Revisited: Some Epistemological and Didactic Problems*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **5** (2011) 10-15.

[8] A. E. Chubykalo, A. Espinoza, B. P. Kosyakov, *The Inertial Property of Approximately Inertial Frames of Reference*, Eur. J. Phys. **32** (2011) 1347-1356.

## Ερωτήσεις για μελέτη

1. Σε ποια ερωτήματα «σκεπτόμενων μαθητών» επιχειρεί να απαντήσει αυτό το άρθρο;

2. Σε πόσα *ανεξάρτητα* φυσικά αξιώματα βασίζεται η θεμελίωση της Νευτώνειας Μηχανικής, όπως αυτή προτείνεται στο άρθρο; Ποια είναι τα αξιώματα αυτά;

3. Πώς ακριβώς προκύπτουν οι γνωστοί Νόμοι του Νεύτωνα από τα αξιώματα της Ερώτησης 2;

4. Τι καλείται *ελεύθερο σωματίδιο*; Δοθέντος ενός τέτοιου σωματιδίου, πώς θα μπορούσαμε να αποφανθούμε αν ένα δοσμένο σύστημα αναφοράς είναι ή όχι αδρανειακό;

5. Δείξτε ότι δύο ελεύθερα σωματίδια δεν επιταχύνονται το ένα ως προς το άλλο.

6. Προτείνετε ένα πείραμα για τον προσδιορισμό της μάζας ενός σωματιδίου. (Υποθέστε ότι σας δίνεται και ένα δεύτερο, βοηθητικό σωματίδιο, το οποίο, εξ υποθέσεως, έχει μοναδιαία μάζα.)

7. Είναι δυνατόν η παρουσία *εσωτερικών* δυνάμεων σε ένα σύστημα σωματιδίων να επηρεάσει την ολική ορμή του συστήματος; Η παρουσία *εξωτερικών* δυνάμεων;

8. Αποδείξτε τη σχέση (11) ανάμεσα στη στροφορμή ενός σωματιδίου ως προς σημείο $O$, και τη ροπή της ολικής δύναμης στο σωματίδιο ως προς το $O$.

9. Μπορείτε να διακρίνετε μια ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στη δύναμη $F$ που εμφανίζεται στον ορισμό (12) του έργου, και στη δύναμη $F$ που εμφανίζεται στη σχέση έργου-ενέργειας (13);

10. Ποιες είναι οι σοβαρότερες θεωρητικές αδυναμίες της αξιωματικής θεμελίωσης της Νευτώνειας Μηχανικής, όπως αυτή προτείνεται στο άρθρο; (Υπόδειξη: Υπάρχουν, στ’ αλήθεια, αδρανειακά συστήματα αναφοράς; Εξηγήστε γιατί.)