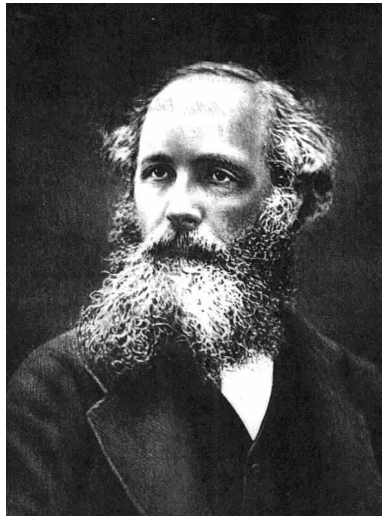


Κ. Ι. ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ

ΣΚΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΤΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΜΑΧWELL
ΣΤΟΝ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟ



2021

Ανεξαρτησία των εξισώσεων του Maxwell: Ένα debate δίχως τέλος!

Κ. Ι. Παπαχρήστου¹

Τομέας Φυσικών Επιστημών
Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

Μία κριτική εξέταση της θέσης του Julius Adams Stratton περί «μη-ανεξαρτησίας» των εξισώσεων του Maxwell.

Οι νόμοι του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού περιγράφονται μαθηματικά από τις εξισώσεις του Maxwell. Πρόκειται για σύστημα τεσσάρων μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, οι οποίες συνδέουν τον ρυθμό μεταβολής του ηλεκτρομαγνητικού (H/M) πεδίου στον χώρο και τον χρόνο, με τις «πηγές» του πεδίου, δηλαδή τα ηλεκτρικά φορτία και τα ηλεκτρικά ρεύματα:

$$\begin{aligned} (a) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & (c) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ (b) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & (d) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

όπου ρ , \vec{J} είναι οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος, αντίστοιχα. Τόσο τα πεδία όσο και οι πηγές τους είναι συναρτήσεις των χωροχρονικών μεταβλητών (x,y,z,t) . Από φυσική άποψη, η (1a) εκφράζει τον νόμο του Coulomb για τον ηλεκτρισμό ενώ η (1b) αποκλείει την ύπαρξη μαγνητικών πόλων ανάλογων με τα σημειακά ηλεκτρικά φορτία. Η (1c) αποτελεί έκφραση του νόμου του Faraday (νόμος της H/M επαγωγής) ενώ η (1d) εκφράζει τον νόμο των Ampère-Maxwell.

Παίρνοντας το *div* της (1d) και χρησιμοποιώντας την (1a), βρίσκουμε την εξίσωση συνέχειας

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

η οποία εκφράζει την αρχή διατήρησης του φορτίου. Παρ' ότι οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος στα δεξιά μέλη των (1a) και (1d) επιλέγονται ελεύθερα και θεωρούνται γνωστές εκ των προτέρων, η (2) θέτει έναν αυστηρό περιορισμό στην μεταξύ τους διαφορική σχέση. Μία διαφορετική παραγωγή του συστήματος Maxwell, στην οποία λαμβάνονται τα *rot* των (1c) και (1d), οδηγεί σε χωριστές κυματικές εξισώσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο (βλ., π.χ., [1], Κεφ. 10).

Ένα ζήτημα που έχει διχάσει τους Φυσικούς, αλλά και τους Ηλεκτρολόγους, είναι το κατά πόσον οι εξισώσεις του Maxwell αντιπροσωπεύουν ένα σύστημα ανεξάρτητων νόμων. Ανεξαρτησία σημαίνει ότι καμία από τις τέσσερις εξισώσεις δεν προκύπτει ως συνέπεια των υπόλοιπων εξισώσεων. Τελεσίδικη απάντηση δεν φαίνεται να υπάρχει, αφού το όποιο συμπέρασμα συνδέεται στενά με τις φυσικές παραδοχές που

¹ papachristou@hna.gr

είμαστε διατεθειμένοι να επιτρέψουμε. Έτσι, το ζήτημα της ανεξαρτησίας των εξισώσεων του Maxwell ανάγεται μάλλον στη φυσική φιλοσοφία παρά στη Φυσική με τη συμβατική έννοια της ακριβούς επιστήμης που δεν επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες των νόμων της.

Τον σπόρο της αμφισβήτησης σε ό,τι αφορά την ανεξαρτησία των εξισώσεων του Maxwell έσπειρε το 1941 ο σπουδαίος Αμερικανός καθηγητής του MIT, Julius Adams Stratton, στο φημισμένο βιβλίο του «*Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία*» [2]. Τη σκυτάλη πήραν στη συνέχεια αρκετοί άλλοι επιστήμονες και συγγραφείς, κυρίως από τον χώρο του Electrical Engineering. Ας δούμε τη σχετική γραμμή σκέψης:

Παίρνοντας το *div* της (1c), το αριστερό μέλος μηδενίζεται εκ ταυτότητας ενώ στο δεξί μέλος, με την υπόθεση της χωροχρονικής συνέχειας του H/M πεδίου, μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά της παραγωγίσης ως προς τον χώρο και τον χρόνο. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0 \quad (3)$$

Από την άλλη μεριά, παίρνοντας το *div* της (1d) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας (2), βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = 0 \quad (4)$$

Σύμφωνα με τις (3) και (4), οι ποσότητες $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ και $(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho/\varepsilon_0)$ είναι χρονικά σταθερές σε κάθε σημείο (x,y,z) της περιοχής Ω του χώρου που μας ενδιαφέρει. Αν τώρα κάνουμε την υπόθεση ότι υπήρξε μία χρονική περίοδος κατά την οποία κανένα H/M πεδίο δεν υφίστατο στην περιοχή Ω , τότε, κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{και} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho/\varepsilon_0 = 0 \quad (5)$$

εκ ταυτότητας. Αργότερα, αν και εν τω μεταξύ εμφανίστηκε H/M πεδίο μέσα στην περιοχή Ω , τα αριστερά μέλη στην (5) εξακολούθησαν να μηδενίζονται σε όλα τα σημεία της περιοχής αφού, όπως προαναφέραμε, αποτελούν χρονικά σταθερές ποσότητες. Έτσι, από τις εξισώσεις για το *rot* του H/M πεδίου και την αρχή διατήρησης του φορτίου – η οποία αρχή αναβαθμίστηκε από παράγωγο θεώρημα σε θεμελιώδη νόμο της θεωρίας – εξάγονται οι σχέσεις (5), οι οποίες δεν είναι τίποτ' άλλο από τις δύο πρώτες εξισώσεις του Maxwell, (1a) και (1b)!

Σύμφωνα με αυτό το σκεπτικό, η ηλεκτρομαγνητική θεωρία δεν βασίζεται στις γνωστές τέσσερις εξισώσεις του Maxwell (θεωρούμενες ως ανεξάρτητες) αλλά μάλλον σε τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις, δηλαδή τον νόμο του Faraday (1c), τον νόμο Ampère–Maxwell (1d) και την αρχή διατήρησης του φορτίου (2). Ο Stratton, μάλιστα, καλεί το ζεύγος (1c) και (1d) «εξισώσεις του Maxwell», αποκλείοντας τις (1a) και (1b) από το θεμελιώδες σύστημά του.

Εκ πρώτης όψεως, οι ιδέες του Stratton μοιάζουν λογικές και σε συμφωνία με τη φυσική διαίσθηση. Σε βαθύτερη εξέταση, όμως, φανερώνουν αδυναμίες, τόσο σε φυσικό όσο και σε μαθηματικό επίπεδο. Γενικά μιλώντας, ο Stratton βασίζει τα συμπεράσματά του σε πρόσθετες αρχικές συνθήκες που είναι αυθαίρετες (άρα τεχνητές) και δεν αποτελούν απαίτηση της ίδιας της θεωρίας του Maxwell. Επί πλέον, αντιστρέφει

την λογική τάξη αιτίου - αποτελέσματος, αναβαθμίζοντας έναν νόμο που είναι παράγωγο των εξισώσεων του Maxwell – την αρχή διατήρησης του φορτίου – σε θεμελιώδη νόμο του ηλεκτρομαγνητισμού και, την ίδια στιγμή, υποβιβάζοντας θεμελιώδεις νόμους (όπως ο νόμος του Coulomb) σε παράγωγα θεωρήματα.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ο Stratton ισχυρίζεται ότι οι δύο πρώτες εξισώσεις του Maxwell, (1a) και (1b), οι οποίες εκφράζουν τον νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, «περιττεύουν», αφού κάθε μία από αυτές προκύπτει από τις υπόλοιπες δύο εξισώσεις, δηλαδή τον νόμο του Faraday (1c) και τον νόμο των Ampère-Maxwell (1d). Για να ισχύσει, όμως, αυτό χρειάζονται, όπως είδαμε, δύο επιπρόσθετα βοηθητικά στοιχεία:

1. Να θεωρηθεί η αρχή διατήρησης του φορτίου (2) ως θεμελιώδης νόμος, ισοδύναμος με τις εξισώσεις του Maxwell. Κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι οι εξισώσεις αυτές δεν αποτελούν από μόνες τους επαρκές σύστημα για την περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων. Στην πραγματικότητα, όμως, οι εξισώσεις του Maxwell είναι επαρκείς, η δε διατήρηση του φορτίου προκύπτει από αυτές ως ειδικό συμπέρασμα (το ίδιο όπως και η διατήρηση της ενέργειας, καθώς και η κυματική ιδιότητα του χρονικά μεταβαλλόμενου H/M πεδίου). Ο Maxwell απλά φρόντισε να δομήσει τις εξισώσεις του με τρόπο ώστε να μην παραβιάζονται θεμελιώδεις νόμοι διατήρησης!

2. Να υποθεθεί αυθαίρετα ότι σε οποιαδήποτε περιοχή του χώρου το H/M πεδίο είχε μηδενική τιμή για χρονικές στιγμές $t < t_0$ και απέκτησε τιμές διάφορες του μηδενός για $t > t_0$. Ακόμα κι αν δεχόμασταν ότι κάτι τέτοιο είναι αληθές – πράγμα αμφίβολο από φυσική άποψη – η μετάβαση του πεδίου από μηδενικές σε μη-μηδενικές τιμές θα πρέπει να έχει λάβει χώρα με τρόπο *συνεχή*, αλλιώς η χρονική παράγωγος του πεδίου δεν είναι δυνατό να οριστεί για $t = t_0$. Σε περίπτωση χρονικής ασυνέχειας, η προσέγγιση Stratton [η οποία προϋποθέτει την συνέχεια του πεδίου για $t = t_0$ προκειμένου να μεταβούμε από τις σχέσεις (3) και (4) στις σχέσεις (5) για $t > t_0$] καταρρέει.

Το πρόβλημα είναι ότι ένα H/M πεδίο είναι δυνατό να εμφανιστεί στον χώρο «ξαφνικά», όπως π.χ. τη στιγμή που κλείνει ένα κύκλωμα, ή τη στιγμή που λαμβάνει χώρα μία «δίδυμη γένεση» σωματιδίου – αντισωματιδίου. Η προσέγγιση Stratton, λοιπόν, δεν εξασφαλίζει την ισχύ των θεμελιωδών νόμων σε μία τέτοια περίπτωση, σιωπηρά αρνούμενη την ύπαρξη ασυνεχών καταστάσεων. Γενικά μιλώντας, πρέπει να σημειώσουμε ότι η ίδια η θεωρία του Maxwell δεν αποκλείει ασυνέχειες στο H/M πεδίο (οι οριακές συνθήκες που συνοδεύουν τις εξισώσεις Maxwell, αλλά και η χρήση της συνάρτησης «δέλτα» στον ηλεκτρομαγνητισμό, το πιστοποιούν!).

Τέλος, υπάρχει και ένα λογικό πρωθύστερο. Ο Stratton ισχυρίζεται ότι, σε χώρο όπου απουσιάζει το H/M πεδίο, η δεύτερη από τις σχέσεις (5) ισχύει ταυτοτικά. Αυτό σημαίνει ότι ο μηδενισμός του ηλεκτρικού πεδίου σε μία περιοχή του χώρου συνεπάγεται αυτόματα και την απουσία ηλεκτρικού φορτίου στον χώρο αυτό. Κάτι τέτοιο, όμως, προκύπτει ως πόρισμα από τον νόμο του Gauss (1a), άρα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί *a priori* ως επιχείρημα για την απόδειξη του ίδιου του νόμου!

Σε πρόσφατη εργασία [3] ο Κ. Παπαχρήστου, με την ιδιαίτερα χρήσιμη συνεργασία του Α. Μαγουλά – ο οποίος, εν τούτοις, διατήρησε χωριστή άποψη – ανέδειξε τα προβληματικά στοιχεία της επιχειρηματολογίας του Stratton, όπως αναλύθηκαν πιο πάνω. Επί πλέον, περιέγραψε μία νέα μαθηματική προσέγγιση στο ζήτημα της ανεξαρτησίας των εξισώσεων του Maxwell, βασισμένη στη μέθοδο των συμβατών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων (μετασχηματισμοί *Bäcklund*) που είχε προταθεί ωρίτερα από τους Παπαχρήστου και Μαγουλά [4,5].

Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, η διατήρηση του φορτίου [στη μορφή της εξίσωσης συνεχείας (2)], καθώς και οι δύο εξισώσεις για το ηλεκτρομαγνητικό κύμα, δεν είναι παρά *συνθήκες συμβατότητας* του συστήματος Maxwell, δηλαδή αναγκαίες

συνθήκες ώστε το σύστημα να είναι αυτο-συνεπές. Οι συνθήκες συμβατότητας (ονομάζονται και *συνθήκες ολοκληρωσιμότητας*) είναι *συνέπειες* των εξισώσεων του Maxwell και δεν υποκαθιστούν οποιαδήποτε από τις εξισώσεις αυτές.

Από καθαρά μαθηματική άποψη, οι συνθήκες συμβατότητας ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων προκύπτουν με *παραγωγή* του συστήματος και, ως εκ τούτου, εμπεριέχουν λιγότερη «πληροφορία» από τις εξισώσεις που αποτελούν το σύστημα. Έτσι, δεν είναι επιτρεπτό να υποκαθιστούμε οποιαδήποτε εξίσωση του συστήματος με μία συνθήκη συμβατότητάς του. Σε όρους ηλεκτρομαγνητισμού, δεν μπορούμε να καταργήσουμε τον νόμο του Coulomb από τη λίστα των θεμελιωδών νόμων μας, βάζοντας στη θέση του την αρχή διατήρησης του φορτίου.

Το *debate* για την ανεξαρτησία των εξισώσεων του Maxwell, πάντως, καλά κρατεί, αφού οι απόψεις της σχολής Stratton φαίνεται πως εξακολουθούν να γοητεύουν πολλούς επιστήμονες και συγγραφείς. Ακόμα και τους συντάκτες της *Wikipedia*!

Αναφορές

1. C. J. Papachristou, *Introduction to Electromagnetic Theory and the Physics of Conducting Solids* (Springer, 2020).²
2. J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, 1941).
3. C. J. Papachristou, *Some remarks on the independence of Maxwell's equations*, META Publishing, No. 62 (2019).³
4. C. J. Papachristou, *The Maxwell equations as a Bäcklund transformation*, Advanced Electromagnetics, Vol. 4, No. 1 (2015) 52-58.⁴
5. C. J. Papachristou, A. N. Magoulas, *Bäcklund transformations: Some old and new perspectives*, Nausivios Chora, Vol. 6 (2016) C-3.⁵

² <http://metapublishing.org/index.php/MP/catalog/book/52> ; <https://arxiv.org/abs/1711.09969>

³ <http://metapublishing.org/index.php/MP/catalog/book/62>

⁴ <http://www.aemjournal.org/index.php/AEM/article/view/311>

⁵ <https://nausivios.snd.edu.gr/docs/2016C.pdf>