Η αρχή της επαλληλίας στην ηλεκτροδυναμική

Κ. Ι. Παπαχρήστου

Τομέας Φυσικών Επιστημών, Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

papachristou@hna.gr

Στα συγγράμματα του ηλεκτρομαγνητισμού, η αρχή της επαλληλίας αναφέρεται συνήθως στο πλαίσιο της ηλεκτροστατικής και εξηγείται με τη χρήση του νόμου του Coulomb και με βάση την γενικότερη αρχή της επαλληλίας για τις δυνάμεις, όπως αυτή διατυπώνεται στην κλασική μηχανική των συστημάτων σωματιδίων. Σε ένα βαθύτερο επίπεδο ανάλυσης, η αρχή της επαλληλίας για χρονικά-μεταβαλλόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία προκύπτει από τις ίδιες τις θεμελιώδεις εξισώσεις της θεωρίας, σε αντίθεση με την νευτώνεια μηχανική όπου η ανάλογη αρχή αποτελεί ξεχωριστό αξίωμα ανεξάρτητο από τους νόμους του Νεύτωνα.

Στα εκπαιδευτικά συγγράμματα του ηλεκτρομαγνητισμού (βλ., π.χ., [1-8]) η αρχή της επαλληλίας αναφέρεται συνήθως στο κεφάλαιο της ηλεκτροστατικής. Η βασική ιδέα είναι απλή: Όπως προκύπτει πειραματικά, η αλληλεπίδραση ανάμεσα σε δύο ηλεκτρικά φορτία δεν επηρεάζεται από την παρουσία άλλων φορτίων. Έτσι, από τον νόμο του Coulomb στον ηλεκτρισμό και από την αρχή της επαλληλίας για τις δυνάμεις, όπως διατυπώνεται στην κλασική μηχανική των συστημάτων σωματιδίων [9], έπεται ότι το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από ένα σύστημα φορτίων ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων που οφείλονται σε κάθε φορτίο χωριστά.

Πράγματι, έστω $\{q_k\}$ (k=1,2,...) ένα σύστημα ακίνητων[1] φορτίων, και έστω $\{\vec{E}_k(\vec{r})\}$ (k=1,2,...) τα αντίστοιχα ηλεκτροστατικά πεδία που παράγονται από κάθε φορτίο χωριστά. Θεωρούμε ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 (που δεν ανήκει στο σύστημα $\{q_k\}$) τοποθετημένο σε κάποιο σημείο $\vec{r}$ του χώρου, και καλούμε $\vec{F}_k$ την δύναμη που ασκείται στο q_0 λόγω του πεδίου $\vec{E}_k$ που παράγεται από το q_k. Λόγω της αρχής της επαλληλίας για τις δυνάμεις, η ολική δύναμη στο q_0 από το ηλεκτρικό πεδίο ολόκληρου του συστήματος $\{q_k\}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα $\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i$. Έτσι, το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στη θέση που βρίσκεται το q_0 είναι

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{\vec{F}}{q_0}=\sum_i \frac{\vec{F}_i}{q_0} \ .$$

Τώρα, από τον νόμο του Coulomb, η δύναμη στο q_0 λόγω του q_i είναι ανάλογη του q_0 και, επομένως, ο λόγος $\vec{F}_i/q_0$ είναι ανεξάρτητος του q_0 και ορίζει μονοσήμαντα το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}_i$ λόγω του q_i, στη θέση που βρίσκεται το q_0. Έτσι, τελικά,

$$\vec{E}(\vec{r})=\sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) \, .$$

[1] Σε σχέση με έναν *αδρανειακό* παρατηρητή [9].

Παρατηρούμε ότι η πιο πάνω απόδειξη βασίζεται σε δύο κρίσιμες υποθέσεις: (*a*) Η δύναμη που ασκεί ένα φορτίο q_k στο q_0 είναι ανεξάρτητη από τις δυνάμεις που α-σκούνται στο q_0 από άλλα φορτία. (*b*) Ισχύει ο νόμος του Coulomb. Όπως αναφέραμε νωρίτερα, η υπόθεση (*a*) σχετίζεται με την αρχή της επαλληλίας για τις δυνάμεις[2] (θα μπορούσαμε να την αποκαλέσουμε «τέταρτο νόμο του Νεύτωνα»). Δηλαδή, η ολική δύναμη σε ένα σωματίδιο λόγω της ταυτόχρονης αλληλεπίδρασής του με διάφορα αντικείμενα ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που θα δεχόταν το σωματίδιο αν αλληλεπιδρούσε με κάθε αντικείμενο χωριστά (δηλαδή, αν κάθε φορά αλληλεπιδρούσε με *ένα* μόνο από τα αντικείμενα). Όσο για τον νόμο του Coulomb, αποτελεί το φυσικό περιεχόμενο του νόμου του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο, και ο νόμος αυτός, με τη σειρά του, αποτελεί την πρώτη από τις εξισώσεις του Maxwell για το χρονικά-μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό (Η/Μ) πεδίο. Θα ήταν, λοιπόν, μία εν-διαφέρουσα άσκηση να ελέγξουμε αν ολόκληρο το σύστημα των εξισώσεων Maxwell υπακούει στην αρχή της επαλληλίας, στην πιο γενική μορφή της.

Οι εξισώσεις του Maxwell για το Η/Μ πεδίο $(\vec{E},\vec{B})$ είναι ένα σύστημα γραμμι-κών μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως:

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} &&\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ &\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 &&\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

όπου οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος $\left(\rho(\vec{r},t),\,\vec{J}(\vec{r},t)\right)$ υπακούουν την *εξίσωση συνεχείας*:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{2}$$

έτσι ώστε να ικανοποιείται η αρχή διατήρησης του φορτίου.

Έστω μία περιοχή Ω του χώρου και έστω $\left(\rho_k(\vec{r},t),\,\vec{J}_k(\vec{r},t)\right)$ (k=1,2,...) ένα σύνο-λο κατανομών φορτίου και ρεύματος στο εσωτερικό τής Ω. Κάθε ζεύγος $(\rho_k,\vec{J}_k)$ ικανοποιεί την εξίσωση συνεχείας:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_k+\frac{\partial\rho_k}{\partial t}=0 \tag{3}$$

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν φορτία και ρεύματα στο εξωτερικό της περιοχής Ω, έτσι ώστε το Η/Μ πεδίο μέσα στην *Ω οφείλεται αποκλειστικά στις πηγές που περιέχο-νται στην Ω*. Κάθε επί μέρους κατανομή $(\rho_k,\vec{J}_k)$ θα προκαλέσει την δημιουργία ενός αντίστοιχου Η/Μ πεδίου $(\vec{E}_k,\vec{B}_k)$, το οποίο θα ικανοποιεί τις εξισώσεις του Maxwell:

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_k=\frac{\rho_k}{\varepsilon_0} &&\vec{\nabla}\times\vec{E}_k=-\frac{\partial\vec{B}_k}{\partial t} \\ &\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_k=0 &&\vec{\nabla}\times\vec{B}_k=\mu_0\vec{J}_k+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}_k}{\partial t} \end{aligned} \tag{4}$$

[2] Διατυπώθηκε από τον Daniel Bernoulli μετά τον θάνατο του Νεύτωνα.

Ορίζουμε τώρα μία ολική κατανομή $(\rho, \vec{J})$ στην περιοχή *Ω*, ως ακολούθως:

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_i \rho_i(\vec{r},t) \ , \quad \vec{J}(\vec{r},t) = \sum_i \vec{J}_i(\vec{r},t) \tag{5}$$

Χρησιμοποιώντας την (3) και λαμβάνοντας υπόψη την γραμμικότητα των τελεστών *div* και *∂/∂t*, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η κατανομή (5) ικανοποιεί την εξίσωση συνεχείας (2). Ορίζουμε επίσης ένα ζεύγος διανυσματικών συναρτήσεων $(\vec{E}, \vec{B})$ στην περιοχή *Ω*, με τις σχέσεις:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r},t) \ , \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \sum_i \vec{B}_i(\vec{r},t) \tag{6}$$

όπου $(\vec{E}_k, \vec{B}_k)$ το Η/Μ πεδίο που παράγεται από την κατανομή $(\rho_k, \vec{J}_k)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το $(\vec{E}, \vec{B})$ είναι το Η/Μ πεδίο στην *Ω*, το οποίο παράγεται από την ολική κατανομή $(\rho, \vec{J})$. Για να ισχύει αυτό, αρκεί το ζεύγος $(\vec{E}, \vec{B})$ να ικανοποιεί το σύστημα Maxwell (1) για την κατανομή $(\rho, \vec{J})$, δοθέντος ότι, όπως έχουμε υποθέσει, δεν υπάρχουν πηγές *έξω* από την *Ω* που θα μπορούσαν να συνεισφέρουν στο Η/Μ πεδίο εντός της *Ω*.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (6) για τα $(\vec{E}, \vec{B})$ στις εξισώσεις του Maxwell (1) και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4) και (5), καθώς και την γραμμικότητα των τελεστών *div*, *rot* και *∂/∂t*, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι το σύστημα (1) πράγματι ικανοποιείται. Συμπεραίνουμε ότι

> αν οι κατανομές $(\rho_k, \vec{J}_k)$ ανεξάρτητα παράγουν τα αντίστοιχα Η/Μ πεδία $(\vec{E}_k, \vec{B}_k)$ (k=1,2,...) σε μία περιοχή *Ω* του χώρου, τότε το Η/Μ πεδίο το οποίο παράγεται στην *Ω* από την ολική κατανομή (5) δίνεται από τα διανυσματικά αθροίσματα (6).

Προσέξτε ότι αυτή η γενικευμένη μορφή της αρχής της επαλληλίας για χρονικά-μεταβαλλόμενα Η/Μ πεδία βασίζεται στην γραμμικότητα των διαφορικών εξισώσεων Maxwell. Έτσι, στον ηλεκτρομαγνητισμό η αρχή της επαλληλίας είναι «χτισμένη» εξαρχής μέσα στις θεμελιώδεις εξισώσεις της θεωρίας, πράγμα που δεν συμβαίνει στην νευτώνεια μηχανική όπου η ανάλογη αρχή για τις δυνάμεις προστίθεται *εκ των υστέρων* στο σύστημα των βασικών νόμων (βλ, π.χ., [9]).

Ευχαριστία

Ευχαριστώ τον συνάδελφο Ν. Σολωμό για πολύ εύστοχες και χρήσιμες παρατηρήσεις οι οποίες συνέβαλαν σε μία σημαντικά βελτιωμένη τελική διαμόρφωση του κειμένου.

Αναφορές

1. D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th Edition (Pearson, 2013).
2. W.N. Cottingham, D.A. Greenwood, *Electricity and Magnetism* (Cambridge, 1991).
3. A. Shadowitz, *The Electromagnetic Field* (McGraw-Hill, 1975).
4. P. Lorrain, D.R. Corson, F. Lorrain, *Electromagnetic Fields and Waves*, 3rd Edition (Freeman, 1988).
5. C.J. Papachristou, *Introduction to Electromagnetic Theory and the Physics of Conducting Solids* (Springer, 2020).
6. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition (Wiley, 1999).
7. W.K.H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd Edition (Addison-Wesley, 1962).
8. W. Greiner, *Classical Electrodynamics* (Springer, 1998).
9. C.J. Papachristou, *Foundations of Newtonian dynamics: An axiomatic approach for the thinking student*, Nausivios Chora, Vol. 4 (2012) 153-160.[3]

[3] https://nausivios.snd.edu.gr/docs/2012C2.pdf ; νεότερη έκδοση: https://arxiv.org/abs/1205.2326