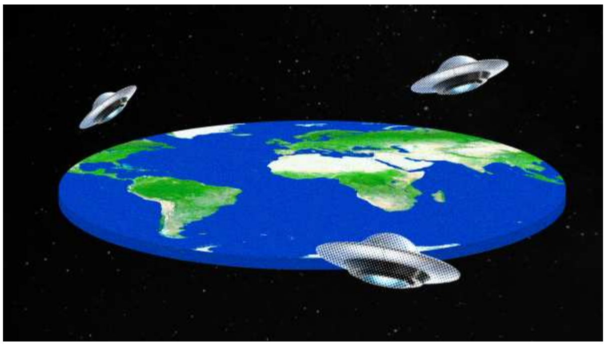
# Γιατί, τελικά, η Γη δεν είναι επίπεδη;

Posted on July 3, 2022 by Costas Papachristou



## *Μία μικρή εισαγωγή στην ευκλείδεια και την μη-ευκλείδεια γεωμετρία*

*Γράφει: Κώστας Παπαχρήστου*

Ένας **μύθος** που διακινείται από αντιεπιστημονικούς και συνωμοσιολογικούς κύκλους υποστηρίζει ότι το σχήμα της Γης είναι **επίπεδο**, αντί – όπως καλά γνωρίζουμε – **σφαιρικό.** Ένα απλό νοητικό πείραμα αρκεί για να καταρρίψουμε τον μύθο μια και καλή. Όμως, προκειμένου να το περιγράψουμε, θα χρειαστούμε λίγες έννοιες από τη γεωμετρία...

Το επίπεδο είναι **ευκλείδειος χώρος** δύο διαστάσεων. Μερικές ιδιότητες αυτού του χώρου είναι οι εξής:

* Η συντομότερη απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία είναι αυτή που βρίσκεται σε ευθεία γραμμή.

* Δύο ευθείες γραμμές που ξεκινούν να είναι **παράλληλες** μεταξύ τους, μένουν παράλληλες σε όλη τους την (άπειρη) έκταση και, συνεπώς, **ποτέ δεν τέμνονται**.

* Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι $180^{o}$.

* Ισχύει το **πυθαγόρειο θεώρημα**: Αν *ΑΒΓ* είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο, όπου η ορθή γωνία είναι στο *Α*, τότε

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2 \qquad (1)$$

Να τώρα τα δύο στάδια του πειράματός μας:

1. Διαλέγετε δύο σημεία *Α* και *Β* πάνω στην επιφάνεια της Γης, σε αρκετά μεγάλη απόσταση το ένα από το άλλο. Στη συνέχεια, εντοπίζετε τον συντομότερο δυνατό δρόμο από το *Α* στο *Β*, και χαράσσετε (νοερά) τη γραμμή *ΑΒ*. Αν η Γη είναι επίπεδη, η γραμμή αυτή θα πρέπει να είναι ευθεία. Τώρα, στα σημεία *Α* και *Β* τοποθετείτε δύο φίλους σας (τους οποίους δεν πολυ-συμπαθείτε!) και τους ζητάτε να ξεκινήσουν να κινούνται **κάθετα** προς τη γραμμή *ΑΒ*, άρα **παράλληλα** μεταξύ τους. Σε ευκλείδειο χώρο οι παράλληλες ευθείες δεν τέμνονται, και έτσι οι φίλοι σας δεν θα συναντηθούν ποτέ πάνω στη Γη. Καθένας τους θα φτάσει ως την άκρη της επίπεδης γήινης επιφάνειας, και από κει θα πέσει στο διάστημα. Θα απαλλαγείτε, έτσι, μια και καλή από αυτούς!

Αν όμως η Γη είναι **σφαίρα**, τότε πάνω στην επιφάνειά της δεν θα ισχύουν τα ευκλείδεια αξιώματα. Έτσι, η γραμμή ελάχιστης απόστασης *ΑΒ* θα ανήκει σε έναν **μέγιστο κύκλο** – π.χ. τον Ισημερινό – και οι πορείες των φίλων σας, αν και **αρχικά** παράλληλες, θα **συναντηθούν** τελικά σε κάποιο σημείο – π.χ. στον Βόρειο Πόλο, αν οι φίλοι κινηθούν κατά μήκος δύο μεσημβρινών (που είναι πάντα **κάθετοι** στον Ισημερινό). Κι εσείς, έτσι, δεν θα απαλλαγείτε ποτέ από τους δύο αντιπαθητικούς! Με βάση την εμπειρία μας από αμέτρητα ταξίδια πάνω στην επιφάνεια της Γης, αυτό το δεύτερο σενάριο είναι, φοβάμαι, το πιο πιθανό…

Επίσης, αν *Γ* είναι το σημείο τομής των τμημάτων *ΑΓ* και *ΒΓ*, καθένα εκ των οποίων είναι κάθετο στο *ΑΒ*, το τρίγωνο *ΑΒΓ* πάνω στη σφαίρα θα έχει δύο(!) ορθές γωνίες και, συνεπώς, το άθροισμα των γωνιών του θα είναι **μεγαλύτερο** από $180^o$ (λέμε ότι η σφαίρα έχει **θετική καμπυλότητα**).

2. Σχηματίστε, στη συνέχεια, ένα τεράστιο ορθογώνιο τρίγωνο *ΑΒΓ* πάνω στην επιφάνεια της Γης (με ορθή γωνία στο *Α*), φροντίζοντας ώστε οι δρόμοι που συνδέουν ανά δύο τα σημεία *Α*, *Β*, *Γ* να είναι οι συντομότεροι δυνατοί. Αν η Γη είναι επίπεδη, θα πρέπει να επαληθεύεται το πυθαγόρειο θεώρημα (1). Πράγμα που **δεν** θα ισχύει, βέβαια, αν η Γη είναι σφαίρα, αφού η επιφάνεια της σφαίρας είναι **μη-ευκλείδειος** χώρος. Σε μία τέτοια περίπτωση, στη θέση της ισότητας (1) θα έχουμε την ανισότητα

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 > (B\Gamma)^2 \qquad (2)$$

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα, παίρνοντας πληροφορίες, π.χ., από την *Google*: Αν βάλουμε στο *Α* τη Θεσσαλονίκη και στα *Β* και *Γ* τη Μαδρίτη και τη Ρίγα, αντίστοιχα, σχηματίζεται (κατά προσέγγιση) ένα ορθογώνιο τρίγωνο με ορθή γωνία στο *Α* (όπως πριν) και πλευρές ίσες με

*ΑΒ* (Θεσσαλονίκη – Μαδρίτη) = 2243 *km ,*

*ΑΓ* (Θεσσαλονίκη – Ρίγα) = 1816 *km* ,

*ΒΓ* (Μαδρίτη – Ρίγα) = 2712 *km* .

Έτσι,

$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 8{,}328{,}905$ ενώ $(B\Gamma)^2 = 7{,}354{,}944$.

Δηλαδή, η ανισότητα (2) φαίνεται να επαληθεύεται. Πράγμα που, όπως είπαμε, δεν μπορεί να ισχύει αν η Γη είναι επίπεδη.

***Συμπέρασμα:*** Δυστυχώς για τους συνωμοσιολόγους, η Γη *δεν* μπορεί να είναι επίπεδη! Όπως δείχνουν οι μετρήσεις – αλλά και όπως μας βεβαιώνουν οι αστροναύτες – πρόκειται για σφαίρα (με κάποιες μικρές αποκλίσεις από το τέλεια σφαιρικό σχήμα).

Υ.Γ. Για "μεγάλα παιδιά": Σε έναν ευκλείδειο χώρο *n* διαστάσεων είναι δυνατό να ορίσουμε ορθογώνιες **καρτεσιανές συντεταγμένες** $x^k$ ($k$=1,2,…,$n$) τέτοιες ώστε η στοιχειώδης απόσταση *ds* ανάμεσα σε δύο γειτονικά σημεία να δίνεται από την έκφραση

$$ds^2 = \Sigma_k \, (dx^k)^2 \qquad (3)$$

όπου το $\Sigma_k$ δηλώνει άθροισμα για $k$=1,2,…,$n$. [Η σχέση (3) εκφράζει το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα σε *n* διαστάσεις.] Αντίθετα, τέτοιες συντεταγμένες **δεν** είναι δυνατό να οριστούν στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Αυτό εξηγεί γιατί δεν μπορούμε να "ξεδιπλώσουμε" ένα τμήμα μιας σφαιρικής επιφάνειας πάνω σε ένα επίπεδο. Η επιφάνεια της σφαίρας είναι ένας **γνήσια καμπύλος** χώρος, πράγμα που δεν ισχύει, π.χ., για τον κύλινδρο, του οποίου την καμπυλωτή επιφάνεια μπορούμε να κόψουμε και να ξεδιπλώσουμε στο επίπεδο. Έτσι, σε αντίθεση με τη σφαιρική επιφάνεια, πάνω σε μία κυλινδρική επιφάνεια *μπορούν* να οριστούν καρτεσιανές συντεταγμένες.

Μα, θα μου πείτε τώρα, γιατί πρέπει να μας απασχολεί μία μη-ευκλείδεια γεωμετρία που παραβιάζει τόσες "προφανείς" ιδιότητες του χώρου στον οποίο ζούμε; Διότι, σύμφωνα με την γενική θεωρία της σχετικότητας και την κοσμολογία, το ίδιο το Σύμπαν μπορεί να έχει αυτή τη γεωμετρία. Δηλαδή, αν ανάψετε έναν φακό και στείλετε το φως προς τον ουρανό – κι αν έχετε την υπομονή που απαιτείται – ύστερα από μερικά δισεκατομμύρια χρόνια το φως που στείλατε μπορεί να ξαναγυρίσει σε εσάς! Σαν να κάνει κάποιος μία κλειστή διαδρομή κατά μήκος του Ισημερινού, **νομίζοντας** πως κινείται πάντα σε ευθεία γραμμή...