Κ. Ι. ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ

Τομέας Φυσικών Επιστημών Σ.Ν.Δ.

ΕΠΙΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΦΥΣΙΚΗΣ

ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟΥΣ ΤΟΥ Π.Ν.

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

2012

Κ. Ι. ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΠΙΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

3.1 Ο Νόμος της Αδράνειας

Με τον όρο *σημειακό σωματίδιο* (ή απλά *σωματίδιο*, ή *σωμάτιο*) θα εννοούμε κάθε σώμα του οποίου οι διαστάσεις θεωρούνται τόσο μικρές ώστε να μπορούμε να αγνοούμε την περιστροφική του κίνηση. Αλλά και ένα σώμα με *πεπερασμένες* (όχι αμελητέες) διαστάσεις θα αντιμετωπίζεται σαν «σωματίδιο» στην περίπτωση που η κίνησή του είναι *αμιγώς μεταφορική* (το σώμα, δηλαδή, δεν υφίσταται περιστροφή).

Ένα σωμάτιο λέγεται *ελεύθερο* αν (α) δεν υπόκειται σε καμία αλληλεπίδραση με τον υπόλοιπο κόσμο (πράγμα μάλλον απίθανο!), ή (β) το σύνολο των αλληλεπιδράσεών του είναι αθροιστικά μηδέν (οι αλληλεπιδράσεις αλληλοαναιρούνται και το σωμάτιο συμπεριφέρεται σαν να μην υπόκειται σε καμία αλληλεπίδραση). Σύμφωνα με το *νόμο της αδράνειας* ή *πρώτο νόμο του Νεύτωνα*,

> *ένα ελεύθερο σωμάτιο κινείται πάντοτε με σταθερή ταχύτητα (δηλαδή, ευθύγραμμα και ομαλά) ως προς οποιοδήποτε άλλο* ***ελεύθερο*** *σωμάτιο.*

Με άλλα λόγια, *η σχετική ταχύτητα μεταξύ ελεύθερων σωματίων είναι χρονικά σταθερή, και η σχετική τους επιτάχυνση είναι μηδέν (τα ελεύθερα σωμάτια δεν επιταχύνονται το ένα ως προς το άλλο).*

Φανταστείτε τώρα έναν παρατηρητή που είναι και ο ίδιος ελεύθερο «σωμάτιο» (αυτό ισχύει κατά προσέγγιση για κάποιον που βρίσκεται ακίνητος πάνω στην επιφάνεια της Γης). Ένας τέτοιος παρατηρητής ονομάζεται *αδρανειακός παρατηρητής*, και το σύστημα συντεταγμένων (π.χ., *xyz*) που χρησιμοποιεί καλείται *αδρανειακό σύστημα αναφοράς*. Σύμφωνα με το νόμο της αδράνειας,

> *διαφορετικοί αδρανειακοί παρατηρητές κινούνται με σταθερή ταχύτητα (δηλαδή, ευθύγραμμα και ομαλά) ο ένας ως προς τον άλλον (η σχετική τους ταχύτητα είναι χρονικά σταθερή, και η σχετική τους επιτάχυνση είναι μηδέν).*

Έτσι, για παράδειγμα, ο επιβάτης ενός λεωφορείου που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τη Γη είναι ένας αδρανειακός παρατηρητής, και ένα σύστημα αξόνων (*x,y,z*) μέσα στο λεωφορείο είναι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Με βάση το νόμο της αδράνειας, ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς μπορεί τώρα να χαρακτηριστεί ως εξής:

> *Αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι ένα σύστημα συντεταγμένων (ή αξόνων) ως προς το οποίο ένα* ***ελεύθερο*** *σωμάτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα (ευθύγραμμα και ομαλά), δηλαδή δεν επιταχύνεται.*

Σημειώνουμε ότι ο αδρανειακός παρατηρητής που χρησιμοποιεί το σύστημα αναφοράς είναι, εξ ορισμού, *ακίνητος* ως προς αυτό.

Ένα σύστημα αναφοράς που *επιταχύνεται* ως προς ένα αδρανειακό σύστημα, προφανώς *δεν* είναι αδρανειακό. Τούτο συμβαίνει, π.χ., με τη Γη λόγω της σύνθετης κίνησής της ως προς τον Ήλιο (αν θεωρήσουμε τον τελευταίο ως περίπου αδρανειακό σύστημα αναφοράς). Επειδή όμως η επιτάχυνση της Γης είναι σχετικά μικρή, μπορούμε για πρακτικούς λόγους να θεωρούμε προσεγγιστικά τη Γη σαν αδρανειακό σύστημα. Έτσι, *κάθε παρατηρητής που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς τη Γη θα θεωρείται αδρανειακός παρατηρητής*.

3.2 Ορμή, Δύναμη, και Νόμοι του Νεύτωνα

Ως αφηρημένη έννοια, η *δύναμη* είναι ένα μέτρο της προσπάθειας που απαιτείται για να μεταβληθεί η κινητική κατάσταση ενός σώματος. Μια πρώτη σκέψη θα ήταν να ορίζαμε τη δύναμη ως ταυτόσημη με την επιτάχυνση. Από την εμπειρία μας, όμως, γνωρίζουμε ότι διαφορετικά σώματα απαιτούν γενικά διαφορετική προσπάθεια για να αποκτήσουν την ίδια επιτάχυνση ή, πιο απλά, την ίδια ταχύτητα μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα. (Προσπαθήστε, π.χ., να επιταχύνετε το ίδιο ένα βιβλίο και ένα αυτοκίνητο σπρώχνοντάς τα!) Αυτό συμβαίνει διότι διαφορετικά σώματα έχουν διαφορετική *αδράνεια*, δηλαδή εμφανίζουν διαφορετική αντίσταση στη μεταβολή της κινητικής τους κατάστασης. Η ιδιότητα αυτή, λοιπόν, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη στον ορισμό της δύναμης. Για το σκοπό αυτό, εισάγουμε ένα νέο φυσικό μέγεθος που το ονομάζουμε *γραμμική ορμή* ή απλά *ορμή* του θεωρούμενου σώματος:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{3.1}$$

όπου $\vec{v}$ η ταχύτητα του σώματος. Ο συντελεστής m ονομάζεται *μάζα* και είναι ένα μέτρο της αδράνειας του σώματος.

Ο λεγόμενος *δεύτερος νόμος του Νεύτωνα* (ή συνήθως απλά «*νόμος του Νεύτωνα*»), που ισχύει μόνο σε *αδρανειακά* συστήματα αναφοράς, ουσιαστικά *ορίζει* τη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα σαν το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \tag{3.2}$$

Αλλά,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

όπου η μάζα m του σώματος θεωρείται δεδομένη και σταθερή. Έτσι,

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \tag{3.3}$$

όπου $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ η επιτάχυνση του σώματος. Τονίζουμε ότι (α) η μορφή (3.3) του νόμου του Νεύτωνα ισχύει μόνο για σώμα με σταθερή μάζα, και (β) οι σχέσεις (3.2) και (3.3) ισχύουν υπό την προϋπόθεση ότι ο παρατηρητής που μετράει την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σώματος είναι *αδρανειακός* παρατηρητής.

Η (3.3) είναι μια διανυσματική εξίσωση που ισοδυναμεί με τρεις αλγεβρικές εξισώσεις, μία για κάθε συνιστώσα των διανυσμάτων. Γράφουμε:

$$\vec{F} = F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y + F_z \hat{u}_z , \quad \vec{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z .$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στην (3.3) και εξισώνοντας αντίστοιχες συνιστώσες στα δύο μέλη, σύμφωνα με την (1.8), έχουμε

$$F_x = ma_x \ , \quad F_y = ma_y \ , \quad F_z = ma_z \tag{3.4}$$

Τώρα, σύμφωνα και με το νόμο της αδράνειας, η μεταβολή της κινητικής κατάστασης ενός σώματος προϋποθέτει αλληλεπίδραση του σώματος με τον υπόλοιπο κόσμο. Η δύναμη $\vec{F}$ είναι ακριβώς ένα μέτρο αυτής της αλληλεπίδρασης. Αν το σώμα δεν υπόκειται σε αλληλεπιδράσεις, τότε $\vec{F}=0$ και από την (3.3) συνάγεται ότι η ταχύτητα του σώματος ως προς *αδρανειακό* σύστημα αναφοράς είναι σταθερή (δεδομένου ότι η επιτάχυνση είναι μηδέν). Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα είναι απόλυτα συμβατός με το νόμο της αδράνειας, υπό την προϋπόθεση ότι οι νόμοι αυτοί εξετάζονται από τη σκοπιά ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Σύμφωνα με την (3.2), αν σε ένα σώμα δεν ασκείται δύναμη ($\vec{F}=0$), η ορμή $\vec{p}$ του σώματος μένει σταθερή, αφού $d\vec{p}/dt = 0$. Η πρόταση αυτή, που είναι ένας άλλος τρόπος διατύπωσης του νόμου της αδράνειας, αποτελεί την πιο απλή εκδοχή μιας γενικότερης αρχής που ονομάζεται *αρχή διατήρησης της ορμής*:

> *Όταν σε ένα σύστημα σωματιδίων δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, η ολική ορμή του συστήματος μένει σταθερή.*

Η αρχή αυτή μας οδηγεί σε έναν ακόμα νόμο του Νεύτωνα, και μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμη με το νόμο αυτό. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ένα σύστημα δύο σωματιδίων που υπόκεινται μόνο στην αμοιβαία τους αλληλεπίδραση (δεν υπάρχουν *εξωτερικές* δυνάμεις). Η ολική ορμή του συστήματος τις χρονικές στιγμές t και $t+\Delta t$ είναι

$$\vec{P}(t) = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \ ,$$

$$\vec{P}(t+\Delta t) = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' = m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' \ .$$

Διατήρηση της ορμής σημαίνει ότι

$$\vec{P}(t) = \vec{P}(t+\Delta t) \ \Rightarrow \ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' \ \Rightarrow$$

$$\vec{p}_1{}' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2{}' - \vec{p}_2) \ \Leftrightarrow \ \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \tag{3.5}$$

Έτσι,

$$\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \ \Rightarrow \ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \ \Rightarrow \ \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \ .$$

Αλλά, από την (3.2),

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} \ , \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21}$$

όπου $\vec{F}_{12}$ η δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο *1* από το σωμάτιο *2*, και $\vec{F}_{21}$ η δύναμη στο σωμάτιο *2* από το σωμάτιο *1*. Άρα, τελικά,

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}} \qquad (3.6)$$

Η σχέση (3.6) εκφράζει τον *τρίτο νόμο του Νεύτωνα* ή *νόμο δράσης-αντίδρασης*. Προσέξτε ότι ο νόμος αυτός είναι άμεση συνέπεια της αρχής διατήρησης της ορμής, η οποία αρχή, με τη σειρά της, αποτελεί γενίκευση του νόμου της αδράνειας για ένα σύστημα σωματιδίων. Λαμβάνοντας υπόψη ότι και ο δεύτερος «νόμος» του Νεύτωνα (που είναι, κατ' ουσία, απλά ένας *ορισμός*, αυτός της έννοιας της δύναμης) αποτελεί μια λογική συνέχεια του πρώτου νόμου, αντιλαμβανόμαστε τη μεγάλη σπουδαιότητα του νόμου της αδράνειας στη θεμελίωση της Νευτώνειας Μηχανικής. Θα λέγαμε, με κάποιο ρίσκο υπερβολής, ότι ολόκληρο το οικοδόμημα της Μηχανικής στηρίζεται πάνω στο νόμο της αδράνειας!

Στο σύστημα S.I., η μονάδα μάζας είναι το $1kg=10^3\,g$, ενώ η μονάδα δύναμης είναι το $1Newton=1N=1kg.m.s^{-2}$.

Έστω τώρα ότι ένα σώμα μάζας *m* υπόκειται σε διάφορες αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον του, οι οποίες αντιστοιχούν στις δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$. Το διανυσματικό άθροισμα

$$\sum_i \vec{F}_i \equiv \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$

αποτελεί τη *συνισταμένη δύναμη* που δρα πάνω στο σώμα. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τότε τη μορφή

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}} \qquad (3.9)$$

Έστω a_x, a_y, a_z οι συνιστώσες της επιτάχυνσης $\vec{a}$. Σύμφωνα με τη σχέση (1.10), οι συνιστώσες της συνισταμένης δύναμης $\Sigma\vec{F}$ είναι ΣF_x , ΣF_y , ΣF_z , όπου ΣF_x το άθροισμα των *x*-συνιστωσών των $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, κλπ. Εξισώνοντας αντίστοιχες συνιστώσες στα μέλη τής (3.9), έχουμε

$$\boxed{\sum F_x = ma_x\,, \quad \sum F_y = ma_y\,, \quad \sum F_z = ma_z} \qquad (3.10)$$

Για παράδειγμα, έστω ότι ένα σώμα μάζας m=2kg υπόκειται στις δυνάμεις $\vec{F}_1 \equiv (3,1,-1)N$ και $\vec{F}_2 \equiv (-1,3,-1)N$. Η συνισταμένη δύναμη είναι

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \equiv (2,4,-2)N$$

έτσι ώστε $\Sigma F_x=2N$, $\Sigma F_y=4N$, $\Sigma F_z= -2N$. Από τις (3.10) βρίσκουμε την επιτάχυνση του σώματος: $\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z) \equiv (1,2,-1)\; m\cdot s^{-2}$.

Λέμε ότι ένα σώμα βρίσκεται σε *ισορροπία* αν η συνισταμένη δύναμη πάνω του είναι μηδέν: $\Sigma\vec{F}=0$. Προσέξτε ότι ισορροπία *δεν* σημαίνει απαραίτητα *ακινησία* ($\vec{v}=0$): Σύμφωνα με την (3.9), ένα σώμα που ισορροπεί απλά δεν επιταχύνεται $(\vec{a}=0)$, δηλαδή, είτε κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, είτε, αν είναι αρχικά ακίνητο, παραμένει ακίνητο. Αντίστροφα, ένα σώμα μπορεί να είναι *στιγμιαία* ακίνητο αλλά να μην βρίσκεται σε ισορροπία. Η ολική δύναμη που δρα σε αυτό, τότε, θα προκαλέσει επιτάχυνση η οποία θα θέσει το σώμα σε κίνηση την αμέσως επόμενη στιγμή. (Για παράδειγμα, αν πετάξουμε μια πέτρα προς τα πάνω, αυτή θα σταματήσει στιγμιαία μόλις φτάσει σε ένα μέγιστο ύψος και αμέσως μετά θα κινηθεί προς τα κάτω υπό την επίδραση της βαρύτητας.)

3.3 Δύναμη Βαρύτητας

Κοντά στην επιφάνεια της Γης, όλα τα σώματα πέφτουν προς τη Γη με την ίδια επιτάχυνση $\vec{g}$ (αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα) που ονομάζεται *επιτάχυνση της βαρύτητας* και έχει μέτρο $g \simeq 9.8\ m \cdot s^{-2}$. Η δύναμη της βαρυτικής έλξης που υφίσταται ένα σώμα από τη Γη ονομάζεται *βάρος* του σώματος και θα συμβολίζεται με $\vec{w}$. Αν m είναι η μάζα του σώματος, τότε, σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα,

$$\vec{w}=m\vec{g} \tag{3.11}$$

Για μεγαλύτερες αποστάσεις από την επιφάνεια της Γης, η τιμή τού g (άρα και του βάρους ενός σώματος) μεταβάλλεται σαν συνάρτηση της απόστασης από τη Γη. Καλούμε M και R τη μάζα και την ακτίνα της Γης, και h το ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης για το οποίο θέλουμε να προσδιορίσουμε το g. Σύμφωνα με το *νόμο της βαρύτητας* του Νεύτωνα, η βαρυτική έλξη που υφίσταται ένα σώμα μάζας m στο ύψος αυτό είναι, κατά μέτρο,

$$w=G\frac{Mm}{(R+h)^2} \tag{3.12}$$

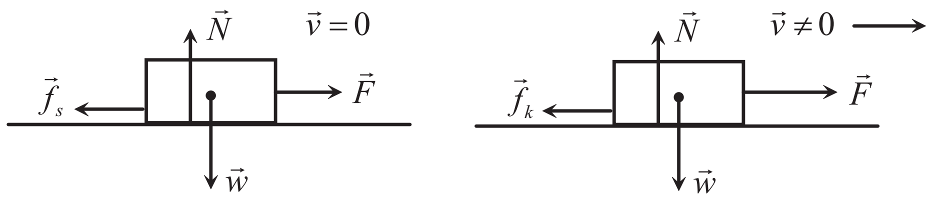
όπου G μια σταθερά. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $w=mg$, βρίσκουμε ότι

$$g=\frac{GM}{(R+h)^2} \tag{3.13}$$

Προσέξτε ότι το πηλίκο w/m, που παριστά την *ένταση* του βαρυτικού πεδίου στη θεωρούμενη θέση, παριστά επίσης και την επιτάχυνση της βαρύτητας g. Σύμφωνα με την (3.13), το g είναι ανεξάρτητο από τη μάζα m του σώματος. Το ότι, γενικά, η ένταση ενός πεδίου είναι ανεξάρτητη από το υπόθεμα (π.χ., μάζα m, ηλεκτρικό φορτίο q, κλπ.) το οποίο υφίσταται δύναμη από το πεδίο, είναι αναμενόμενο. Το ότι, όμως, η επιτάχυνση του υποθέματος, σε κάθε σημείο του χώρου, είναι ανεξάρτητη από τις φυσικές ιδιότητές του και ίδια για όλα τα υποθέματα στο σημείο αυτό, είναι χαρακτηριστική ιδιότητα του βαρυτικού πεδίου και ισχύει όταν το πεδίο αυτό είναι το μόνο που επιδρά πάνω στο υπόθεμα στη θεωρούμενη περιοχή του χώρου.

3.4 Δυνάμεις Τριβής

Η *τριβή* είναι δύναμη που τείνει να εμποδίσει την ολίσθηση μιας επιφάνειας πάνω σε μια άλλη. Είναι αθροιστικό αποτέλεσμα πολλών μικροσκοπικών αλληλεπιδράσεων ηλεκτρομαγνητικής φύσης ανάμεσα στα άτομα ή μόρια των δύο επιφανειών.



Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ένα κιβώτιο βάρους $\vec{w}$ πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια. Αρχικά το κιβώτιο ισορροπεί υπό την επίδραση δύο δυνάμεων: του βάρους του και της κάθετης αντίδρασης $\vec{N}$ από την επιφάνεια. Λόγω της ισορροπίας, η συνισταμένη δύναμη στο κιβώτιο είναι μηδέν: $\vec{N}+\vec{w}=0 \Leftrightarrow \vec{N}=-\vec{w}$.

Σπρώχνουμε τώρα το κιβώτιο προς τα δεξιά με μια δύναμη $\vec{F}$, η οποία μπορεί να μεταβάλλεται (βλ. σχήμα). Το κιβώτιο «θέλει» να ολισθήσει προς τα δεξιά, αλλά υπάρχει μια δύναμη $\vec{f}$ που αντιτίθεται σε αυτό: η τριβή, που έχει φορά προς τα αριστερά. Αν η $\vec{F}$ δεν είναι αρκετά μεγάλη, η $\vec{f}$ καταφέρνει να την εξουδετερώσει και το κιβώτιο παραμένει ακίνητο. Λέμε τότε ότι η $\vec{f}$ είναι *στατική τριβή* και τη συμβολίζουμε με $\vec{f}_s$. Προφανώς, $\vec{F}+\vec{f}_s=0$. Ανάλογα με την εφαρμοζόμενη δύναμη $\vec{F}$, η $\vec{f}_s$ κυμαίνεται από μηδέν (όταν $\vec{F}=0$) μέχρι μια μέγιστη τιμή $\vec{f}_{s,\max}$.

Όταν η $\vec{F}$ ξεπεράσει (κατά μέτρο) την $\vec{f}_{s,\max}$, το κιβώτιο τίθεται σε κίνηση και επιταχύνεται προς τα δεξιά. Η τριβή τότε ελαττώνεται από $\vec{f}_{s,\max}$ σε μια νέα, σταθερή τιμή $\vec{f}_k$ (επίσης προς τα αριστερά) που αντιτίθεται στην κίνηση και ονομάζεται *κινητική τριβή*. Η ολική δύναμη στο κιβώτιο κατά την κίνηση είναι $\vec{F}_{ολ}=\vec{F}+\vec{f}_k$. Αν υποθέσουμε ότι το κιβώτιο κινείται στη θετική κατεύθυνση του άξονα *x*, τότε

$$\vec{F}=\left|\vec{F}\right|\hat{u}_x=F\,\hat{u}_x\,, \quad \vec{f}_k=-\left|\vec{f}_k\right|\hat{u}_x=-f_k\,\hat{u}_x$$

και

$$\vec{F}_{ολ}=F\,\hat{u}_x+(-f_k)\,\hat{u}_x=(F-f_k)\,\hat{u}_x \qquad (3.14)$$

Διαιρώντας την $\vec{F}_{ολ}$ με τη μάζα *m* του κιβώτιου, βρίσκουμε την επιτάχυνσή του $\vec{a}$. Στην οριακή περίπτωση που $F=f_k$, η $\vec{F}_{ολ}$ είναι μηδέν και το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Αν αποσύρουμε τη δύναμη $\vec{F}$, η τριβή $\vec{f}_k$ επιβραδύνει το σώμα ώσπου τελικά αυτό παύει να κινείται.

Όπως βρίσκεται πειραματικά, τόσο το μέτρο $f_{s,\max}$ της *μέγιστης* στατικής τριβής, όσο και το μέτρο f_k της κινητικής τριβής, είναι ανάλογα του μέτρου N της κάθετης αντίδρασης από την επιφάνεια στο σώμα. Έτσι, οι δυνατές τιμές της στατικής τριβής είναι

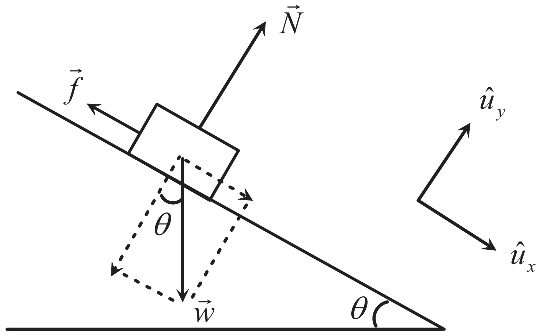
$$\boxed{0 \le f_s \le f_{s,\max} = \mu_s N} \tag{3.15}$$

ενώ η τιμή της κινητικής τριβής είναι

$$\boxed{f_k = \mu_k N} \tag{3.16}$$

όπου μ_s και μ_k οι *συντελεστές τριβής* (στατικής και κινητικής, αντίστοιχα), με $\mu_k < \mu_s$. Προσέξτε ότι τα μ_s και μ_k είναι *αδιάστατες* ποσότητες (καθαροί αριθμοί). Οι συντελεστές αυτοί εξαρτώνται από τη φύση των δύο επιφανειών, και τυπικά κυμαίνονται μεταξύ 0.05 και 1.5 .

Περιγράφουμε τώρα μια μέθοδο πειραματικού προσδιορισμού των συντελεστών τριβής μεταξύ δύο επιφανειών :



Θεωρούμε κεκλιμένο επίπεδο μεταβλητής γωνίας θ, πάνω στο οποίο έχουμε τοποθετήσει κιβώτιο μάζας m . Για μικρές τιμές της γωνίας θ το κιβώτιο μένει ακίνητο, διότι η στατική τριβή f_s εξουδετερώνει τη συνιστώσα $w_x = mg\sin\theta$ του βάρους κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Αυξάνοντας βαθμιαία τη γωνία θ, παρατηρούμε ότι το κιβώτιο παραμένει ακίνητο μέχρις ότου η γωνία ξεπεράσει μια οριακή τιμή $\theta=\theta_c$, οπότε το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει.

Το σώμα υπόκειται σε τρεις δυνάμεις: το βάρος του, $\vec{w} = m\vec{g}$, την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το κεκλιμένο επίπεδο, και την τριβή $\vec{f}$ (στατική $\vec{f}_s$ ή κινητική $\vec{f}_k$, ανάλογα αν $\vec{v} = 0$ ή $\vec{v} \neq 0$, αντίστοιχα). Για λόγους ευκολίας, αναλύουμε το βάρος σε δύο κάθετες συνιστώσες: την $w_x = mg\sin\theta$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, και την $w_y = mg\cos\theta$ κάθετη σε αυτό. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Για $\theta \le \theta_c$, το σώμα ισορροπεί ακίνητο. Η συνθήκη ισορροπίας είναι

$$\sum \vec{F} = \vec{w} + \vec{N} + \vec{f}_s = 0$$

ή, σε συνιστώσες,

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; mg\sin\theta - f_s = 0 \;\Rightarrow\; mg\sin\theta = f_s$$
$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; N - mg\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; mg\cos\theta = N$$

Διαιρώντας κατά μέλη,

$$\tan\theta = \frac{f_s}{N} \;\Rightarrow\; f_s = N\tan\theta \quad .$$

Αλλά,

$$f_s \le f_{s,\max} \;\Rightarrow\; N\tan\theta \le \mu_s N \;\Rightarrow\; \tan\theta \le \mu_s \quad .$$

Στην οριακή περίπτωση $\theta = \theta_c$, έχουμε ότι $f_s = f_{s,\max}$ και

$$\tan\theta_c = \mu_s \tag{3.17}$$

Μετρώντας τη γωνία θ_c, προσδιορίζουμε το συντελεστή μ_s.

β) Για $\theta > \theta_c$, το σώμα κινείται επιταχυνόμενο κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Η τριβή τώρα είναι κινητική. Αν ελαττώσουμε βαθμιαία τη γωνία θ, θα βρούμε κάποια τιμή $\theta_c' < \theta_c$ τέτοια ώστε το σώμα να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Από το νόμο του Νεύτωνα (λαμβάνοντας υπόψη ότι το σώμα δεν επιταχύνεται), έχουμε

$$\sum \vec{F} = \vec{w} + \vec{N} + \vec{f}_k = 0 \quad .$$

Παίρνοντας συνιστώσες, όπως πριν, βρίσκουμε

$$mg\sin\theta_c' = f_k = \mu_k N\,, \qquad mg\cos\theta_c' = N$$

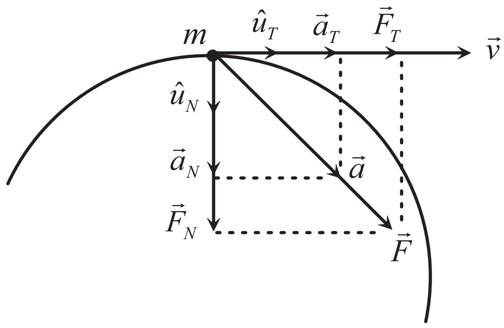
και διαιρώντας κατά μέλη,

$$\tan\theta_c' = \mu_k \tag{3.18}$$

Το γεγονός ότι $\theta_c' < \theta_c$, σε συνδυασμό με τις (3.17) και (3.18), μας δείχνει ότι $\mu_k < \mu_s$. Αυτό σημαίνει ότι $f_k < f_{s,\max}$.

3.6 Επιτρόχια και Κεντρομόλος Δύναμη

Θυμίζουμε (Παρ.2.6) ότι η επιτάχυνση $\vec{a}$ στην καμπυλόγραμμη κίνηση μπορεί, γενικά, να αναλυθεί σε επιτρόχια συνιστώσα $\vec{a}_T$, εφαπτόμενη στην τροχιά, και κεντρομόλο συνιστώσα $\vec{a}_N$, κάθετη στην τροχιά:



$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = a_T\,\hat{u}_T + a_N\,\hat{u}_N \qquad (3.22)$$

όπου

$$a_T = \frac{dv}{dt}\ , \qquad a_N = \frac{v^2}{\rho} \qquad (3.23)$$

($v = \pm|\vec{v}|$ και ρ=*ακτίνα καμπυλότητας*). Συνδυάζοντας την (3.22) με το νόμο του Νεύτωνα, βρίσκουμε την έκφραση για την ολική (συνισταμένη) δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται σε σωματίδιο μάζας *m* το οποίο εκτελεί καμπυλόγραμμη κίνηση:

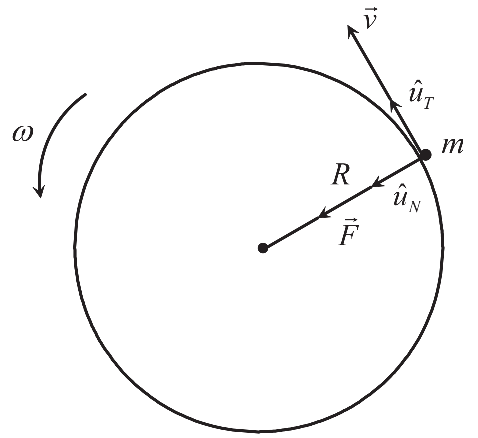
$$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{F}_N = F_T\,\hat{u}_T + F_N\,\hat{u}_N \qquad (3.24)$$

όπου

$$\boxed{F_T = ma_T = m\frac{dv}{dt}\ , \quad F_N = ma_N = m\frac{v^2}{\rho}} \qquad (3.25)$$

Η *επιτρόχια* συνιστώσα $\vec{F}_T$ είναι υπεύθυνη για τη μεταβολή του *μέτρου* της ταχύτητας, ενώ η *κεντρομόλος* συνιστώσα $\vec{F}_N$ ευθύνεται για τη μεταβολή της *διεύθυνσης* της ταχύτητας.

Στην περίπτωση που η ολική δύναμη $\vec{F}$ είναι *κάθετη* στην τροχιά (δηλαδή, κάθετη στην ταχύτητα του σωματιδίου), έχουμε ότι $F_T = 0$ και, σύμφωνα με την πρώτη από τις εξισ.(3.25), το *μέτρο* της ταχύτητας μένει σταθερό (παρόλο που η διεύθυνσή της μεταβάλλεται). Με άλλα λόγια, η κίνηση είναι *ομαλή καμπυλόγραμμη*. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η *ομαλή κυκλική κίνηση*, στην οποία η ολική δύναμη $\vec{F}$ είναι εξ ολοκλήρου κεντρομόλος και διέρχεται πάντα από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς:



$\rho = R = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o'$
$\omega = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o'$
$v = R\omega = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o'$

Από τις σχέσεις (3.24) και (3.25) έχουμε, στην περίπτωση αυτή,

$$\boxed{\vec{F} = m\frac{v^2}{R}\,\hat{u}_N = mR\,\omega^2\,\hat{u}_N} \tag{3.26}$$

Άσκηση: Δείξτε ότι μια επίπεδη, ομαλή καμπυλόγραμμη κίνηση που λαμβάνει χώρα κάτω από την επίδραση ολικής δύναμης σταθερού μέτρου, είναι ομαλή κυκλική κίνηση. (Υπόδειξη: Ποια χαρακτηριστική ιδιότητα έχει η ακτίνα καμπυλότητας σε μια τέτοια κίνηση;)

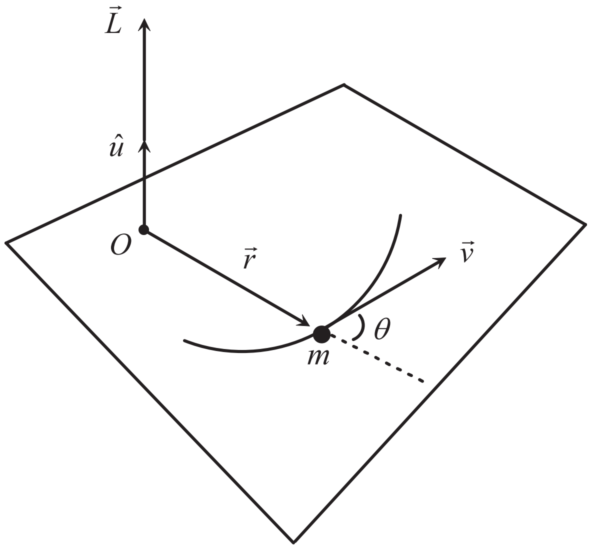
3.7 Στροφορμή και Ροπή Δύναμης ως προς Σημείο

Θεωρούμε σωματίδιο μάζας *m* που εκτελεί γενικά καμπυλόγραμμη κίνηση στο χώρο. Η στιγμιαία θέση του προσδιορίζεται με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς τη σταθερή αρχή *O* ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς (θυμίζουμε ότι μόνο σε ένα τέτοιο σύστημα ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα). Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του σωματιδίου σε κάποιο σημείο της τροχιάς. Η ορμή του στο σημείο αυτό είναι $\vec{p} = m\vec{v}$.

Η *στροφορμή* του σωματιδίου *ως προς το σημείο O* ορίζεται σαν το εξωτερικό γινόμενο

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})} \tag{3.27}$$

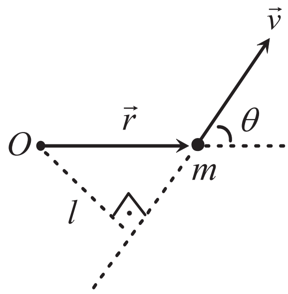
Προσέξτε ότι, σε αντίθεση με την ορμή, η στροφορμή $\vec{L}$ δεν ορίζεται με απόλυτο τρόπο, αφού εξαρτάται πάντα από την εκλογή του σημείου αναφοράς *O*.



Το διάνυσμα $\vec{L}$ είναι κάθετο στο στιγμιαίο επίπεδο που ορίζεται από τα $\vec{r}$ και $\vec{v}$, και η φορά του καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Ο κανόνας αυτός μπορεί εδώ να αναδιατυπωθεί ως εξής: Αν λυγίσουμε τα τέσσερα δάχτυλα του δεξιού χεριού κατά τη φορά που περιστρέφεται στιγμιαία το *m* ως προς το *O*, ο τεντωμένος αντίχειρας θα δείχνει στην κατεύθυνση του $\vec{L}$. (Προσέξτε ότι η διατύπωση αυτή είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του εξωτερικού γινομένου που δόθηκε στην Παρ.1.5.) Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τα $\vec{r}$ και $\vec{v}$ (όπου $0 \le \theta \le \pi$), και αν καλέσουμε *r* και *v* τα μέτρα των $\vec{r}$ και $\vec{v}$, αντίστοιχα, τότε το μέτρο της στροφορμής δίνεται από τη σχέση

$$\left|\vec{L}\right| = mrv\sin\theta \qquad (3.28)$$

Μια εναλλακτική έκφραση για το μέτρο της στροφορμής βρίσκεται ως εξής:

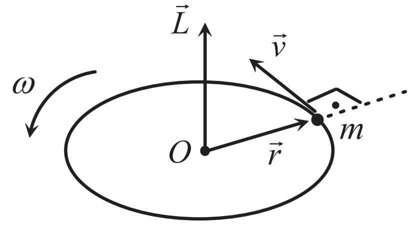


Παρατηρούμε ότι $r\sin\theta = l$, όπου *l* η κάθετη απόσταση του *O* από τον άξονα του $\vec{v}$. Έτσι, η (3.28) γράφεται

$$\left|\vec{L}\right| = mvl \qquad (3.30)$$

(Προσέξτε ότι το διάνυσμα $\vec{L}$ είναι κάθετο στη σελίδα με φορά προς τα *έξω*, δηλαδή προς εμάς. Ποια θα ήταν η φορά τού $\vec{L}$ αν αντιστρέφαμε τη φορά τού $\vec{v}$;)

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση που το σωματίδιο εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας R γύρω από το O:

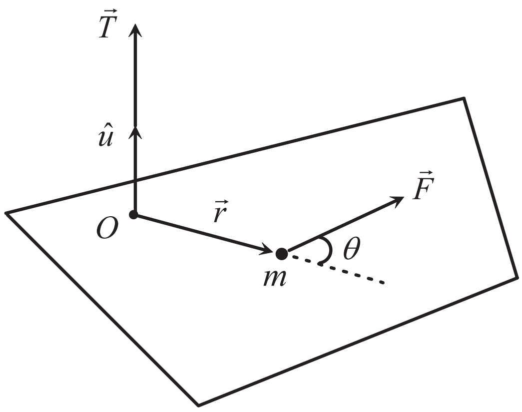


Παρατηρούμε ότι $\theta = \pi/2$ και $r = l = R$. Η στροφορμή $\vec{L}$ του m ως προς το O είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο του κύκλου, με φορά που εξαρτάται από τη φορά της κίνησης. Από την (3.28) ή την (3.30), και από τη σχέση $v=R\omega$, έχουμε ότι

$$\left|\vec{L}\right| = mRv = mR^2\omega \tag{3.32}$$

Επιστρέφοντας στη γενική περίπτωση καμπυλόγραμμης κίνησης, καλούμε $\vec{F}$ τη συνισταμένη δύναμη στο m στη θεωρούμενη θέση $\vec{r}$ της τροχιάς του. Η *ροπή* της δύναμης $\vec{F}$ *ως προς το σημείο O* ορίζεται σαν το εξωτερικό γινόμενο

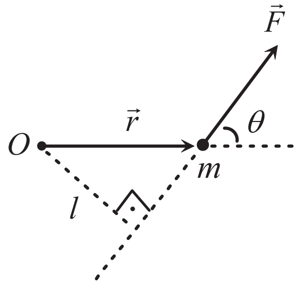
$$\boxed{\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}} \tag{3.33}$$



Το διάνυσμα $\vec{T}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των $\vec{r}$ και $\vec{F}$, και η φορά του καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού: Αν λυγίσουμε τα τέσσερα δάχτυλα του δεξιού χεριού κατά τη φορά που *τείνει* να περιστρέψει η $\vec{F}$ το m ως προς το O, ο τεντωμένος αντίχειρας θα δείχνει στην κατεύθυνση του $\vec{T}$. Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τα $\vec{r}$ και $\vec{F}$ (όπου $0 \le \theta \le \pi$), και αν καλέσουμε r και F τα μέτρα των $\vec{r}$ και $\vec{F}$, αντίστοιχα, τότε το μέτρο της ροπής είναι

$$\left|\vec{T}\right| = rF\sin\theta \tag{3.34}$$

Μια εναλλακτική έκφραση για το μέτρο της ροπής βρίσκεται ως εξής:



Παρατηρούμε ότι $r\sin\theta = l$, όπου l η κάθετη απόσταση του O από τον άξονα της $\vec{F}$. Η (3.34), έτσι, γράφεται

$$|\vec{T}| = F\,l \qquad (3.36)$$

Ανάμεσα στη στροφορμή και τη ροπή υπάρχει μια σχέση ανάλογη με αυτήν ανάμεσα στην ορμή και τη δύναμη, $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Παραγωγίζοντας τη στροφορμή ως προς t, έχουμε:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} \;+\; \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

(προσέξτε ότι, κατά την παραγώγιση, δεν αλλάζουμε τη σειρά με την οποία γράφονται τα $\vec{r}$ και $\vec{p}$, αφού το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι αντιμεταθετικό). Αλλά,

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} = \vec{v}\times\vec{p} = \vec{v}\times(m\vec{v}) = m(\vec{v}\times\vec{v}) = 0 \;.$$

Επίσης, από το νόμο του Νεύτωνα (3.2) και τον ορισμό της ροπής (3.33),

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{T}$$

όπου, από υπόθεση, η $\vec{F}$ είναι η *συνισταμένη* δύναμη στο m. Άρα, τελικά,

$$\boxed{\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \qquad (3.38)$$

Προσέξτε ότι η παραπάνω εξίσωση ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι τα $\vec{L}$ και $\vec{T}$ λαμβάνονται *ως προς το ίδιο σημείο O*, το οποίο αποτελεί αρχή των συντεταγμένων για το αδρανειακό σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιούμε. Προσέξτε επίσης ότι η (3.38) είναι άμεση συνέπεια του νόμου του Νεύτωνα, δεν αποτελεί δηλαδή ένα νέο θεμελιώδες αξίωμα της Μηχανικής.

Στην περίπτωση που $\vec{T} = 0$, η (3.38) δίνει

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{L} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o' \,.$$

Οδηγούμαστε έτσι στην *αρχή διατήρησης της στροφορμής*:

> *Όταν η ροπή της ολικής δύναμης σε ένα σωμάτιο, ως προς κάποιο σημείο, είναι μηδέν, η στροφορμή του σωματίου ως προς το σημείο αυτό μένει σταθερή.*

Είναι δυνατό, βέβαια, να υπάρχουν άλλα σημεία ως προς τα οποία ούτε η ροπή να μηδενίζεται, ούτε η στροφορμή να μένει σταθερή!

Άσκηση: Στο σημείο O βρίσκεται σταθερά τοποθετημένο ένα ηλεκτρικό φορτίο Q, ενώ ένα άλλο φορτίο q κινείται ελεύθερα στο χώρο. Αγνοώντας το βάρος τού q και την αντίσταση του αέρα, δείξτε ότι η στροφορμή τού q ως προς το O μένει σταθερή. Ισχύει το ίδιο για τη στροφορμή ως προς ένα διαφορετικό σημείο O' ;

ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

4.1 Εισαγωγή

Θεωρητικά, με το νόμο του Νεύτωνα μπορούμε να προβλέψουμε την κίνηση ενός σωματιδίου για κάθε χρονική στιγμή *t*, αρκεί να γνωρίζουμε (α) τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου τη στιγμή *t*=0, και (β) το πεδίο δυνάμεων μέσα στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο. Στην πράξη, όμως, η λύση του προβλήματος δεν είναι πάντα εύκολη, αφού ο νόμος του Νεύτωνα δεν είναι μια απλή αλγεβρική σχέση (όπως φαίνεται με πρώτη ματιά από τη μορφή $\vec{F}=m\vec{a}$) αλλά, στην ουσία, ένα σύστημα *διαφορικών εξισώσεων*:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}(\vec{r})\ , \qquad \frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\ .$$

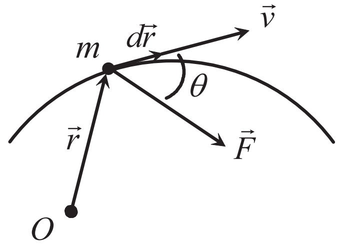
Λύνοντας το σύστημα για δοσμένες αρχικές συνθήκες ($\vec{r}=\vec{r}_0$ και $\vec{v}=\vec{v}_0$ για *t*=0), προσδιορίζουμε τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου για κάθε $t>0$.

Η δυσκολία επίλυσης του προβλήματος (εκτός από ορισμένες απλές περιπτώσεις) μας οδηγεί στην αναζήτηση μαθηματικών τεχνασμάτων. Το πιο βασικό από αυτά, που εφαρμόζεται όμως κάτω από ορισμένες μόνο προϋποθέσεις, είναι η *αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας*, η οποία προκύπτει ως άμεση συνέπεια του νόμου του Νεύτωνα (δεν αποτελεί, δηλαδή, ένα νέο, ανεξάρτητο αξίωμα της Μηχανικής).

Μια πιο γενική αρχή, επίσης συνέπεια του νόμου του Νεύτωνα, είναι το *θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας*. Πέρα από τη θεωρητική του αξία, το θεώρημα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε προβλήματα όπου υπεισέρχεται η τριβή και, ως εκ τούτου, η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

4.2 Έργο μιας Δύναμης

Θεωρούμε σωματίδιο μάζας *m* που κινείται κάτω από την επίδραση δύναμης $\vec{F}$ η οποία, γενικά, μεταβάλλεται κατά μήκος της τροχιάς του. Για να είμαστε ακριβέστεροι, το *m* βρίσκεται σε ένα *πεδίο δυνάμεων* $\vec{F}(\vec{r})$, όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης τού *m* ως προς την αρχή των συντεταγμένων ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Καλούμε $d\vec{r}$ το απειροστό διάνυσμα που παριστά τη στοιχειώδη μετατόπιση του σωματιδίου κατά μήκος της τροχιάς του μέσα σε απειροστό χρονικό διάστημα *dt*. Το $d\vec{r}$ μπορεί οριακά να θεωρηθεί εφαπτόμενο στην τροχιά, έχει δηλαδή την κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{v}$ του σωματιδίου:

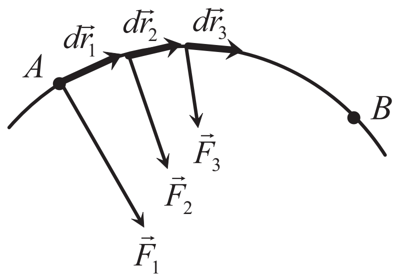


Ορίζουμε το *στοιχειώδες έργο* της δύναμης $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση $d\vec{r}$ σαν το εσωτερικό γινόμενο

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,ds\cos\theta \qquad (4.1)$$

όπου $F = |\vec{F}|$ και $ds = |d\vec{r}|$ (το ds μπορεί να θεωρηθεί σαν το μήκος ενός απειροστού τμήματος της καμπύλης τροχιάς τού m). Λέμε ότι η $\vec{F}$ *παράγει* έργο dW στο χρονικό διάστημα dt. Σύμφωνα με το πρόσημο του $\cos\theta$, το έργο αυτό είναι θετικό αν $0 \le \theta < \pi/2$ και αρνητικό αν $\pi/2 < \theta \le \pi$. Προσέξτε ότι *μια δύναμη κάθετη στην ταχύτητα δεν παράγει έργο*, διότι $\theta = \pi/2$, $\cos\theta = 0$, οπότε dW=0. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, στην περίπτωση μιας *ομαλής* καμπυλόγραμμης κίνησης, όπου η ασκούμενη ολική δύναμη $\vec{F}$ είναι εξ ολοκλήρου κεντρομόλος (δηλαδή, κάθετη στην ταχύτητα), κι έτσι το έργο που παράγεται από την $\vec{F}$ κατά την κίνηση είναι μηδέν.

Θεωρούμε τώρα ένα πεπερασμένο τμήμα AB της τροχιάς τού m. Χωρίζουμε την επικαμπύλια διαδρομή AB σε ένα μεγάλο πλήθος από στοιχειώδεις μετατοπίσεις $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \cdots,$ κατά μήκος των οποίων οι δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο είναι, αντίστοιχα, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$:



Τα στοιχειώδη έργα που παράγονται κατά τις μετατοπίσεις είναι

$$dW_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 \,, \quad dW_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 \,, \cdots \,.$$

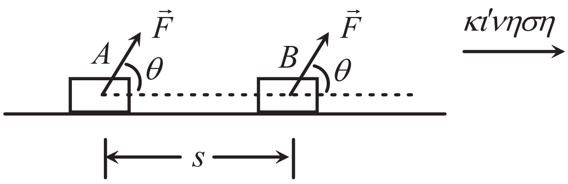
Το *ολικό έργο* της ασκούμενης δύναμης από A ως B είναι

$$W = dW_1 + dW_2 + \cdots = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \cdots = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \quad .$$

Επειδή οι μετατοπίσεις είναι απειροστές και η δύναμη είναι συνάρτηση της θέσης πάνω στην τροχιά, μπορούμε να γράψουμε

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \qquad (4.2)$$

Ολοκληρώματα της μορφής (4.2) ονομάζονται *επικαμπύλια* και η τιμή τους εξαρτάται, γενικά, από την καμπύλη που συνδέει τα σημεία A και B. Έτσι, *το έργο μιας δύναμης από A ως B εξαρτάται από την τροχιά που διέγραψε το κινητό πηγαίνοντας από το A στο B*. (Δηλαδή, σε δύο διαφορετικές τροχιές από A ως B αντιστοιχούν δύο διαφορετικές τιμές του έργου της δύναμης $\vec{F}$.) Σημαντική εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση των *συντηρητικών δυνάμεων*, τις οποίες θα γνωρίσουμε παρακάτω. Προς το παρόν θα αρκεστούμε σε ένα απλό παράδειγμα:



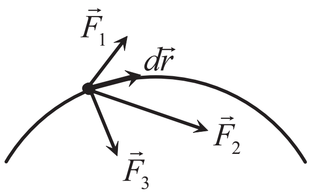
Το σώμα κινείται ευθύγραμμα από A ως B, κάτω από την επίδραση μιας *σταθερής* (κατά μέτρο και κατεύθυνση) δύναμης $\vec{F}$. (Στο σώμα δρουν και άλλες δυνάμεις που δεν έχουν σχεδιαστεί, όπως το βάρος, η κάθετη αντίδραση από το επίπεδο, η τριβή, κλπ.) Μας ενδιαφέρει το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από A ως B. Λαμβάνοντας υπόψη ότι το μέτρο F της $\vec{F}$ και η γωνία θ είναι σταθερές ποσότητες, έχουμε:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F \cos\theta \, ds = F \cos\theta \int_A^B ds \;\Rightarrow$$

$$W = F s \cos\theta \qquad (4.3)$$

όπου s η απόσταση AB που διανύει το κινητό. Ειδικά, $W=Fs$ όταν η $\vec{F}$ είναι στην κατεύθυνση της κίνησης (θ=0), ενώ $W=-Fs$ όταν η $\vec{F}$ είναι αντίθετη στην κίνηση ($\theta=\pi$).

Όταν σε ένα σωματίδιο επενεργούν ταυτόχρονα διάφορες δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, *το έργο της συνισταμένης δύναμης* $\vec{F}$ *ισούται με το άθροισμα των έργων των συνιστωσών δυνάμεων*:



Απόδειξη: Τα επιμέρους έργα των $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots$, κατά τη μετατόπιση $d\vec{r}$, είναι

$$dW_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} \;, \quad dW_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} \;, \cdots \;.$$

Το έργο της συνισταμένης δύναμης $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$, για την ίδια μετατόπιση, είναι

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \cdots = dW_1 + dW_2 + \cdots, \text{ ο.ε.δ.}$$

Έστω, τώρα, dt το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο λαμβάνει χώρα η απειροστή μετατόπιση $d\vec{r}$ ενός σωματιδίου, και έστω $\vec{F}$ η δύναμη που δρα στο σωματίδιο στο διάστημα αυτό (για ένα τέτοιο απειροστό διάστημα, η $\vec{F}$ μπορεί να θεωρείται σταθερή). Το στοιχειώδες έργο τής $\vec{F}$ στο διάστημα dt είναι $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Το παραγόμενο *έργο ανά μονάδα χρόνου* από την $\vec{F}$ είναι ίσο με

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (4.4)$$

και ονομάζεται *ισχύς* του παράγοντα που ασκεί τη δύναμη $\vec{F}$. Έχουμε:

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}} \tag{4.5}$$

όπου $\vec{v}$ η στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου. Το έργο που παράγεται από την $\vec{F}$ στο χρονικό διάστημα από t_1 έως t_2 είναι

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \vec{v}) dt \tag{4.6}$$

Στο σύστημα S.I., η μονάδα έργου είναι το 1 *Joule* (1 *J*) = 1 *N.m* = 1 $kg.m^2.s^{-2}$, ενώ η μονάδα ισχύος είναι το 1 *Watt* (1 *W*) = 1 $J.s^{-1}$ = 1 $kg.m^2.s^{-3}$, με πολλαπλάσια τα 1 $kW = 10^3\ W$ και 1 $MW = 10^6\ W$.

4.3 Κινητική Ενέργεια και Θεώρημα Μεταβολής της

Είδαμε νωρίτερα ότι μια δύναμη κάθετη στην ταχύτητα δεν παράγει έργο. Από την άλλη μεριά, μια δύναμη κάθετη στην ταχύτητα δεν μεταβάλλει το *μέτρο* της ταχύτητας. Αυτό μας οδηγεί στη σκέψη ότι υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στο έργο και τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας, έτσι ώστε ο μηδενισμός του έργου να συνεπάγεται τη σταθερότητα του μέτρου της ταχύτητας, και αντίστροφα.

Ορίζουμε την *κινητική ενέργεια* ενός σωματιδίου μάζας *m* που κινείται με ταχύτητα μέτρου *v* :

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2} \tag{4.7}$$

Αν *p=mv* είναι το μέτρο της ορμής του σωματιδίου, η (4.7) μπορεί να γραφεί στην εναλλακτική μορφή

$$\boxed{E_k = \frac{p^2}{2m}} \tag{4.8}$$

Έστω, τώρα, $\vec{F}$ η *ολική* (*συνισταμένη*) δύναμη στο σωματίδιο. Όπως αποδεικνύεται, το έργο τής $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση του *m* από ένα σημείο *A* σε ένα σημείο *B* δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m {v_B}^2 - \frac{1}{2} m {v_A}^2} \tag{4.9}$$

Σε συνδυασμό με την (4.7), η (4.9) γράφεται

$$\boxed{W = E_{k,B} - E_{k,A} \equiv \Delta E_k} \tag{4.10}$$

Οι σχέσεις (4.9) και (4.10) εκφράζουν το *θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας* (ΘΜΚΕ), το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

> *Το έργο της συνισταμένης δύναμης σε ένα σωματίδιο (ίσο με το ολικό έργο των δυνάμεων που δρουν σε αυτό), κατά τη μετατόπιση του σωματιδίου από ένα σημείο της τροχιάς του σε ένα άλλο, ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου κατά τη μετατόπιση αυτή.*

Έτσι, στην περίπτωση που W=0, έχουμε ότι $\Delta E_k=0 \Rightarrow E_k=$ *σταθερό*, οπότε, από την (4.7), $v=$ *σταθερό*. Δηλαδή, *όταν η συνισταμένη δύναμη δεν παράγει έργο πάνω στο σωματίδιο, το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου μένει σταθερό*. Αυτή είναι, προφανώς, η περίπτωση όπου η ολική δύναμη $\vec{F}$ στο σωματίδιο είναι κάθετη στην ταχύτητά του, όπως συμβαίνει στην ομαλή καμπυλόγραμμη κίνηση.

Προσέξτε ότι το ΘΜΚΕ είναι άμεση συνέπεια του νόμου του Νεύτωνα, δεν αποτελεί δηλαδή μια νέα, ανεξάρτητη αρχή της Μηχανικής. Από τον ορισμό (4.7) της κινητικής ενέργειας, η μονάδα μέτρησής της είναι $1\, kg.m^2.s^{-2} = (1\, kg.m.s^{-2})(1\, m) = 1\, N.m = 1\, J$. Δηλαδή, η E_k μετριέται σε μονάδες έργου, όπως άλλωστε είναι φανερό από το ΘΜΚΕ (4.10).

4.4 Δυναμική Ενέργεια και Συντηρητικές Δυνάμεις

Θεωρούμε σωματίδιο μάζας m που υπόκειται σε δύναμη $\vec{F}$ σε κάποια περιοχή του χώρου. Γενικά, η $\vec{F}$ μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο της περιοχής. Τα σημεία αυτά προσδιορίζονται με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς την αρχή O των συντεταγμένων (x,y,z) ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Υποθέτουμε τώρα ότι η δύναμη $\vec{F}$ εξαρτάται μόνο από τη θέση του σωματιδίου στο χώρο (κάτι που δεν συμβαίνει, π.χ., με την κινητική τριβή, της οποίας η κατεύθυνση σε κάθε σημείο εξαρτάται από την κατεύθυνση της κίνησης). Γράφουμε:

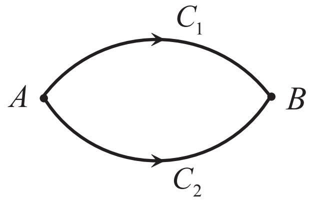
$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) \qquad (4.11)$$

Για να είμαστε ακριβέστεροι, η σχέση (4.11) παριστά όχι μια μοναδική δύναμη αλλά ένα *πεδίο δυνάμεων*. Θα εξακολουθήσουμε, εν τούτοις, να χρησιμοποιούμε τον όρο «*δύναμη*» χάριν συντομίας.

Όταν το σωματίδιο μετατοπίζεται από το σημείο A στο σημείο B του χώρου, το έργο τής $\vec{F}$ είναι

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (4.12)$$

Όπως έχουμε τονίσει, η τιμή του ολοκληρώματος αυτού εξαρτάται όχι μόνο από τα οριακά σημεία A και B, αλλά και από τη *διαδρομή* που κάνει το m από το A ως το B:



Γενικά, $W_1 \neq W_2$, όπου W_1 και W_2 τα έργα κατά μήκος των διαδρομών C_1 και C_2, αντίστοιχα (υπάρχουν άπειρες διαδρομές που συνδέουν τα A και B).

Υπάρχει όμως μια ειδική κατηγορία δυνάμεων (σωστότερα, πεδίων) της μορφής (4.11), το έργο W των οποίων εξαρτάται μόνο από τα οριακά σημεία A, B και όχι από τη διαδρομή που τα συνδέει. Τέτοιες δυνάμεις ονομάζονται *συντηρητικές*.

Ορισμός: Μια δύναμη της μορφής (4.11) ονομάζεται *συντηρητική* αν υπάρχει κάποια συνάρτηση $E_p(\vec{r}) = E_p(x,y,z)$, τέτοια ώστε το έργο τής $\vec{F}$ από A ως B να ισούται με τη διαφορά των τιμών τής E_p στα σημεία A και B:

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B) \equiv E_{p,A} - E_{p,B}} \qquad (4.13)$$

Δοθέντος ότι η μεταβολή τής E_p από A ως B είναι

$$\Delta E_p = E_{p,B} - E_{p,A} = \textit{τελική μείον αρχική τιμή}\ ,$$

η σχέση (4.13) γράφεται σύντομα:

$$W = -\Delta E_p \qquad (4.14)$$

Η συνάρτηση $E_p(\vec{r})$ ονομάζεται *δυναμική ενέργεια* του σωματιδίου m στο πεδίο της δύναμης $\vec{F}$ (συχνά θα λέμε ότι η δυναμική ενέργεια E_p *σχετίζεται με τη συντηρητική δύναμη* $\vec{F}$). Αν στο m δρουν διάφορες συντηρητικές δυνάμεις, κάθε μία από αυτές σχετίζεται με μια αντίστοιχη δυναμική ενέργεια. Όπως είναι εύκολο να δείξουμε, η δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με τη *συνισταμένη* ενός πλήθους συντηρητικών δυνάμεων ισούται με το *άθροισμα* των δυναμικών ενεργειών που σχετίζονται με τις επιμέρους δυνάμεις. Έτσι, αν η $\vec{F}$ στη σχέση (4.13) παριστά την ολική συντηρητική δύναμη στο m, τότε η E_p παριστά την ολική δυναμική ενέργεια του m. Αν στο m δρουν και άλλες, *μη-συντηρητικές* δυνάμεις, αυτές *δεν* συμπεριλαμβάνονται στη δύναμη $\vec{F}$ της σχέσης (4.13) και *δεν* σχετίζονται με κάποια δυναμική ενέργεια. Στην περίπτωση αυτή, το W στην (4.13) παριστά το έργο των *συντηρητικών* δυνάμεων μόνο και όχι το έργο της συνισταμένης δύναμης στο m. Από την (4.13) είναι προφανές ότι η E_p έχει διαστάσεις έργου.

Θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει την E_p διαφορετικά, έτσι ώστε η (4.14) να γραφόταν $W = +\Delta E_p$. Τούτο θα σήμαινε, απλά, να θέταμε ($-E_p$) στη θέση τού E_p, δηλαδή να ορίζαμε την E_p με αντίθετο πρόσημο. Αυτό δεν θα είχε καμία ιδιαίτερη φυσική συνέπεια! Η εκλογή του αρνητικού προσήμου στην (4.14) είναι καθαρά θέμα σύμβασης και γίνεται έτσι ώστε η ολική μηχανική ενέργεια του m (βλ. παρακάτω) να γράφεται σαν άθροισμα και όχι σαν διαφορά. Παρατηρούμε επίσης τα εξής:

1. Έστω $E_p(\vec{r})$ η δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί στη συντηρητική δύναμη $\vec{F}(\vec{r})$. Τότε, και η συνάρτηση

$$E_p{}'(\vec{r}) = E_p(\vec{r}) + C$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά, παριστά δυναμική ενέργεια για την ίδια δύναμη $\vec{F}$. Πράγματι: Αν W είναι το έργο τής $\vec{F}$, τότε

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = (E_{p,A} + C) - (E_{p,B} + C) = E'_{p,A} - E'_{p,B} \ .$$

Βλέπουμε ότι ο ορισμός της δυναμικής ενέργειας επιτρέπει κάποιο βαθμό αυθαιρεσίας, αφού μπορούμε να προσθέσουμε οποιαδήποτε σταθερή ποσότητα στη συνάρτηση $E_p(\vec{r})$ χωρίς να αλλοιώσουμε τη φυσική του προβλήματος (η δύναμη $\vec{F}$ που αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια μένει ίδια). Λόγω αυτής της αυθαιρεσίας, μπορούμε να ορίσουμε κατά βούληση ένα *σημείο* (ή ένα *επίπεδο*) *αναφοράς* όπου η τιμή τής E_p είναι μηδέν.

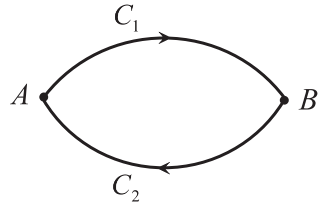
2. Από τον ορισμό (4.13) είναι φανερό ότι το έργο μιας συντηρητικής δύναμης $\vec{F}$, κατά τη μετατόπιση ενός σωματιδίου από ένα σημείο A σε ένα σημείο B, είναι *ανεξάρτητο της τροχιάς που συνδέει τα δύο σημεία*. Έτσι, αν C_1 και C_2 είναι δύο διαδρομές που ενώνουν τα A και B, και αν W_1 και W_2 είναι τα αντίστοιχα έργα τής $\vec{F}$ κατά μήκος των διαδρομών αυτών, τότε

$$W_1 = W_2 = E_{p,A} - E_{p,B} \ .$$

Ναι, αλλά και το ΘΜΚΕ (4.10) μας λέει ότι $W= E_{k,B} - E_{k,A}$, χωρίς να έχουμε κάνει την υπόθεση ότι η $\vec{F}$ είναι συντηρητική! Προσοχή όμως: Η διαφορά ΔE_k *εξαρτάται*, γενικά, από τη διαδρομή που συνδέει τα A και B, ενώ η διαφορά ΔE_p *δεν* εξαρτάται. Ο λόγος είναι ότι η E_p είναι μια δοσμένη συνάρτηση της θέσης του σωματιδίου, κάτι που γενικά δεν ισχύει για την E_k. Τονίζουμε ότι

> το ΘΜΚΕ, $W=\Delta E_k$ (όπου W το έργο της *συνισταμένης* δύναμης στο σωμάτιο), έχει *γενική* ισχύ, *ανεξάρτητα από το είδος των δυνάμεων που δρουν στο σωμάτιο*. Αντίθετα, η σχέση $W= -\Delta E_p$ ισχύει μόνο για το έργο των *συντηρητικών* δυνάμεων, και *δεν* παριστά απαραίτητα το ολικό έργο πάνω στο σωμάτιο.

3. Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης $\vec{F}$ κατά μήκος *κλειστής* τροχιάς είναι *μηδέν*:



Θεωρούμε κλειστή διαδρομή C που αποτελείται από δύο τμήματα: το τμήμα C_1 από A ως B, και το τμήμα C_2 από B πίσω στο A. Γράφουμε, συμβολικά, $C=C_1+C_2$. Το έργο

W κατά μήκος της C ισούται με το άθροισμα των έργων W_1, W_2 κατά μήκος των C_1, C_2 , αντίστοιχα:

$$W = W_1 + W_2 = (E_{p,A} - E_{p,B}) + (E_{P,B} - E_{p,A}) = 0 \ .$$

Το έργο κατά μήκος μιας κλειστής τροχιάς παρίσταται, γενικά, με *κλειστό* επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Έτσι, για μια συντηρητική δύναμη $\vec{F}$, γράφουμε

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \ .$$

4.5 Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας

Θεωρούμε σωματίδιο μάζας m που διαγράφει τροχιά από το σημείο A στο σημείο B, κάτω από την επίδραση μιας δύναμης (σωστότερα, ενός πεδίου δυνάμεων) $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, η οποία είναι η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που δρουν στο m. Σύμφωνα με το ΘΜΚΕ, το έργο W της $\vec{F}$ ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του m :

$$W = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} \qquad (4.15)$$

Τονίζουμε και πάλι ότι η (4.15) ισχύει για το έργο της *συνισταμένης* δύναμης, ανεξάρτητα αν αυτή είναι συντηρητική ή όχι. Τώρα, αν συμβεί η ολική δύναμη $\vec{F}$ να είναι *συντηρητική* (πράγμα που ισχύει όταν *όλες* οι επιμέρους δυνάμεις στο m είναι συντηρητικές), τότε το έργο τής $\vec{F}$ μπορεί επίσης να εκφραστεί ως εξής:

$$W = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B} \qquad (4.16)$$

όπου E_p η ολική δυναμική ενέργεια του m. Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των (4.15) και (4.16), βρίσκουμε

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B} \qquad (4.17)$$

Η σχέση (4.17) ισχύει για τυχαία εκλογή των σημείων A και B της τροχιάς τού m. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η ποσότητα

$$\boxed{E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(\vec{r})} \qquad (4.18)$$

που ονομάζεται *ολική μηχανική ενέργεια* του m στο πεδίο της δύναμης $\vec{F}$, μένει σταθερή κατά την κίνηση του m .

Οδηγούμαστε, έτσι, στην *αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας* (ΑΔΜΕ):

> *Όταν **όλες** οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σωμάτιο είναι συντηρητικές, η ολική μηχανική ενέργεια Ε του σωματίου μένει σταθερή κατά μήκος της τροχιάς του.*

Καταλαβαίνουμε τώρα γιατί οι δυνάμεις για τις οποίες ορίζεται δυναμική ενέργεια καλούνται συντηρητικές. Για τις μη-συντηρητικές δυνάμεις (όπως, π.χ., η τριβή) είναι αδύνατο να ορίσουμε δυναμική, άρα και ολική μηχανική ενέργεια. Έτσι, η ΑΔΜΕ θα πρέπει να επανεξεταστεί στην περίπτωση που τέτοιες δυνάμεις είναι παρούσες.

Πώς αντιμετωπίζουμε, λοιπόν, την περίπτωση όπου σε ένα σωμάτιο *m* ασκούνται ταυτόχρονα συντηρητικές και μη-συντηρητικές δυνάμεις (π.χ., βαρύτητα και τριβή); Έστω $\vec{F}$ η συνισταμένη συντηρητική δύναμη στο *m*, και έστω $\vec{F}'$ η ολική μη-συντηρητική δύναμη σε αυτό. Η συνισταμένη όλων των δυνάμεων στο *m* είναι

$$\vec{F}_{o\lambda} = \vec{F} + \vec{F}'$$

και το έργο της από το *A* ως το *B* είναι

$$W = \int_A^B \vec{F}_{o\lambda} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}' \cdot d\vec{r} \qquad (4.19)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στα δεξιά ισούται με τη διαφορά ($E_{p,A} - E_{p,B}$), όπου E_p η δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί στη συντηρητική δύναμη $\vec{F}$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα παριστά το έργο W' της μη-συντηρητικής δύναμης $\vec{F}'$. Τέλος, από το ΘΜΚΕ, το έργο *W* της συνισταμένης δύναμης $\vec{F}_{o\lambda}$ ισούται με ($E_{k,B} - E_{k,A}$). Αντικαθιστώντας τις ποσότητες αυτές στην (4.19), έχουμε

$$E_{k,B} - E_{k,A} = (E_{p,A} - E_{p,B}) + W' \;\Rightarrow$$

$$\boxed{W' = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A}) \equiv \Delta(E_k + E_p)} \qquad (4.20)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

> *όταν μη-συντηρητικές δυνάμεις είναι παρούσες, το άθροισμα (E_k+E_p)* ***δεν*** *είναι, γενικά, σταθερό: Η μεταβολή του ισούται με το έργο των μη-συντηρητικών δυνάμεων.*

Εξαίρεση στον παραπάνω κανόνα αποτελεί η περίπτωση όπου οι μη-συντηρητικές δυνάμεις δεν παράγουν έργο: $W' = 0$. Αυτό συμβαίνει όταν η συνισταμένη τους, $\vec{F}'$, είναι κάθετη στην ταχύτητα του *m*. Στην περίπτωση αυτή, η (4.20) μας λέει ότι το άθροισμα (E_k+E_p) είναι σταθερό:

$$\Delta(E_k + E_p) = 0 \;\Leftrightarrow\; E_k + E_p = \textit{σταθερό, όταν } W' = 0 .$$

Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε την ΑΔΜΕ με πιο γενικό τρόπο:

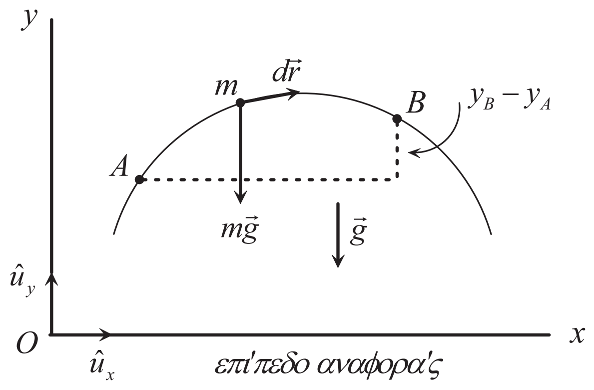
> *Όταν οι μη-συντηρητικές δυνάμεις που δρουν σε ένα σωματίδιο δεν παράγουν έργο, η ολική μηχανική ενέργεια του σωματιδίου μένει σταθερή.*

Για παράδειγμα, χρησιμοποιούμε την ΑΔΜΕ για τη μελέτη της κίνησης εκκρεμούς, παρόλο που η σφαίρα του εκκρεμούς υπόκειται όχι μόνο στη συντηρητική δύναμη της βαρύτητας, αλλά και στην τάση του νήματος. Η τάση δεν παράγει έργο, αφού είναι συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα της σφαίρας (εξηγήστε γιατί).

4.6 Παραδείγματα Συντηρητικών Δυνάμεων

α) <u>*Δύναμη βαρύτητας*</u>

Κοντά στην επιφάνεια της Γης η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$ είναι πρακτικά σταθερή. Έτσι, σύμφωνα με τη συζήτηση της Παρ.2.5, η κίνηση ενός σώματος κάτω από την επίδραση της βαρύτητας και μόνο, λαμβάνει χώρα σε σταθερό επίπεδο, κάθετο στην επιφάνεια της Γης. Καλούμε *xy* το επίπεδο αυτό, όπου ο άξονας x είναι οριζόντιος ενώ ο y είναι κατακόρυφος με θετική φορά προς τα πάνω. Η συντεταγμένη y προσδιορίζει το ύψος στο οποίο βρίσκεται ένα σωματίδιο σε σχέση με ένα αυθαίρετο επίπεδο αναφοράς (y=0). Το σωματίδιο βρίσκεται πάνω ή κάτω από το επίπεδο αναφοράς, ανάλογα με το αν y>0 ή y<0, αντίστοιχα.



Το βάρος του σωματιδίου m (που εδώ θα το συμβολίσουμε με $\vec{F}$) γράφεται

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{u}_y$$

ενώ η στοιχειώδης μετατόπιση του σωματιδίου κατά μήκος της τροχιάς του είναι

$$d\vec{r} = (dx)\hat{u}_x + (dy)\hat{u}_y \ .$$

Έτσι,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \cdot dx + (-mg)\,dy = -mg\,dy$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (1.19) (στην περίπτωσή μας δεν υπάρχουν *z*-συνιστώσες). Το έργο τής $\vec{F}$ κατά τη μετακίνηση του *m* από το *A* στο *B* είναι

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B mg\,dy = -mg\int_A^B dy = -mg\,(y_B - y_A) \ \Rightarrow$$

$$W = mg\,y_A - mg\,y_B \qquad (4.21)$$

Είναι η $\vec{F}$ συντηρητική; Για να είναι, θα πρέπει να υπάρχει μια συνάρτηση $E_p(\vec{r}\,)$, η *δυναμική ενέργεια του m στο πεδίο βαρύτητας της Γης*, τέτοια ώστε

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} \ .$$

Από την (4.21) βλέπουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση πράγματι υπάρχει:

$$\boxed{E_p(y) = mgy} \qquad (4.22)$$

(Πιο γενικά, $E_p = mgy + C$, όπου C μια αυθαίρετη σταθερή ποσότητα. Διαλέγουμε το επίπεδο $y=0$ σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, έτσι ώστε $C=0$.)

Σύμφωνα με την ΑΔΜΕ, η ολική μηχανική ενέργεια του m παραμένει σταθερή κατά την κίνησή του στο πεδίο βαρύτητας (αν αγνοήσουμε μη-συντηρητικές δυνάμεις όπως η αντίσταση του αέρα):

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \sigma\tau\alpha\theta. \qquad (4.23)$$

Ισοδύναμα, για δύο τυχαία σημεία A και B,

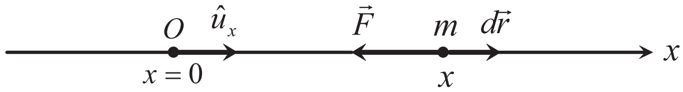
$$E_A = E_B \iff \frac{1}{2}m{v_A}^2 + mgy_A = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + mgy_B \qquad (4.24)$$

Άσκηση: Με χρήση της (4.24) δείξτε ότι, σε μια ελεύθερη πτώση κατά ύψος h, ένα σώμα αποκτά ταχύτητα

$$v = \sqrt{2gh} \ .$$

Θα ισχύει το αποτέλεσμα αυτό αν λάβουμε υπόψη την αντίσταση του αέρα;

β) *Ελαστική δύναμη*



Θεωρούμε σωματίδιο μάζας m που κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του άξονα x, κάτω από την επίδραση μιας δύναμης της μορφής

$$\vec{F} = -kx\,\hat{u}_x \qquad (4.25)$$

όπου k μια θετική σταθερά. Η δύναμη (4.25) ονομάζεται *ελαστική δύναμη* και θα τη μελετήσουμε αναλυτικότερα στο Κεφ.5.

Η στοιχειώδης μετατόπιση του m πάνω στον άξονα γράφεται

$$d\vec{r} = (dx)\,\hat{u}_x \ .$$

Έτσι,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -kx dx \ .$$

Το έργο τής $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση του m από το σημείο A στο σημείο B είναι

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B kx dx = \frac{1}{2}k{x_A}^2 - \frac{1}{2}k{x_B}^2 \ .$$

Τώρα, για να είναι η $\vec{F}$ συντηρητική, θα πρέπει να υπάρχει συνάρτηση δυναμικής ενέργειας E_p του m, τέτοια ώστε

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} \ .$$

Πράγματι:

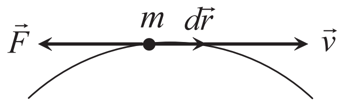
$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2} \tag{4.26}$$

όπου υποθέσαμε αυθαίρετα ότι E_p=0 στο σημείο x=0. Σύμφωνα με την ΑΔΜΕ,

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{4.27}$$

4.7 Η Κινητική Τριβή ως Μη-Συντηρητική Δύναμη

Η κινητική τριβή (εδώ θα τη συμβολίσουμε $\vec{F}$) είναι πάντα αντίθετη στην ταχύτητα $\vec{v}$ ενός σωματιδίου, άρα και στη στοιχειώδη μετατόπιση $d\vec{r}$ του σωματιδίου πάνω στην τροχιά του:



Έτσι, το στοιχειώδες έργο τής $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση $d\vec{r}$ είναι πάντα αρνητικό:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} < 0 \ .$$

Το έργο, λοιπόν, της $\vec{F}$ κατά μήκος *οποιασδήποτε* τροχιάς είναι αρνητικό. Ειδικά, για μια κλειστή τροχιά,

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} < 0 \ .$$

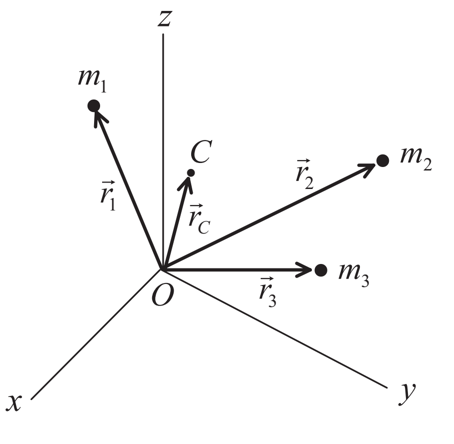
Έτσι, το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\vec{F}$ είναι διάφορο του μηδενός, πράγμα που σημαίνει ότι *η κινητική τριβή δεν είναι συντηρητική δύναμη* (βλ. Παρ.4.4). Για τη στατική τριβή δεν τίθεται καν θέμα συζήτησης, αφού αυτή δεν παράγει έργο.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

6.1 Κέντρο Μάζας Συστήματος

Η μελέτη της δυναμικής ενός συστήματος σωματιδίων παρουσιάζει πρόσθετες δυσκολίες σε σύγκριση με τη δυναμική ενός μοναδικού σωματιδίου. Αυτό που κατά κύριο λόγο περιπλέκει τα πράγματα είναι ότι, στην περίπτωση ενός συστήματος πρέπει να διαχωρίσουμε ανάμεσα σε δύο κατηγορίες δυνάμεων: τις *εσωτερικές*, αυτές δηλαδή που ασκούνται μεταξύ των ίδιων των σωματιδίων του συστήματος, και τις *εξωτερικές*, που ασκούνται στο σύστημα από παράγοντες εξωτερικούς ως προς αυτό. Όπως θα δούμε, σε κάθε σύστημα αντιστοιχεί ένα σημείο του χώρου, το *κέντρο μάζας* του συστήματος, το οποίο κινείται σαν να είναι ένα σωμάτιο με μάζα ίση με την ολική μάζα του συστήματος, και πάνω στο οποίο ασκείται η ολική *εξωτερική* δύναμη που δρα στο σύστημα.

Θεωρούμε ένα σύστημα σωματιδίων με μάζες $m_1, m_2, m_3, \cdots,$ τα οποία βρίσκονται κάποια χρονική στιγμή στα σημεία του χώρου με αντίστοιχα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \cdots,$ ως προς τυχαίο σημείο αναφοράς *O*. Το *O* είναι σταθερό σημείο σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, και λαμβάνεται ως αρχή των συντεταγμένων στο σύστημα αυτό:



Η ολική μάζα του συστήματος είναι

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots = \sum_i m_i \tag{6.1}$$

Το *κέντρο μάζας* του συστήματος ορίζεται σαν το σημείο *C* του χώρου με διάνυσμα θέσης

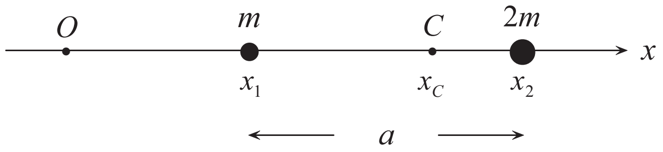
$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots) = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \tag{6.2}$$

Στη σχέση (6.2), όλα τα διανύσματα θέσης λαμβάνονται ως προς ένα σταθερό σημείο O του συστήματος αναφοράς μας. Αν παίρναμε ένα διαφορετικό σημείο αναφοράς O', τα διανύσματα θέσης θα άλλαζαν αλλά η *θέση* του ίδιου του κέντρου μάζας C *ως προς το σύστημα των σωματιδίων* θα έμενε σταθερή, ανεξάρτητη από την εκλογή του σημείου αναφοράς!

Αν (x_i, y_i, z_i) και (x_C, y_C, z_C) είναι οι συντεταγμένες των m_i και C, αντίστοιχα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη διανυσματική σχέση (6.2) με τρεις αλγεβρικές εξισώσεις:

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \ , \quad y_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \ , \quad z_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i \qquad (6.3)$$

Σαν παράδειγμα, ας θεωρήσουμε δύο σωματίδια με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$, τοποθετημένα στα σημεία x_1 και x_2 του άξονα x. Καλούμε $a = x_2 - x_1$ την απόσταση μεταξύ των δύο σωματιδίων:



Η ολική μάζα του συστήματος είναι $M=m_1+m_2=3m$. Από τις σχέσεις (6.3) βλέπουμε αμέσως ότι το κέντρο μάζας C του συστήματος βρίσκεται πάνω στον άξονα x, αφού $y_i=z_i=0$ $(i = 1,2)$ έτσι ώστε $y_C=z_C=0$ (οι άξονες y και z δεν έχουν σχεδιαστεί). Επίσης,

$$x_C = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2) = \frac{1}{3}(x_1 + 2x_2) = x_1 + \frac{2}{3}a$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $x_2= x_1+a$. Δηλαδή, το κέντρο μάζας C βρίσκεται σε απόσταση $2a/3$ από το m. Προσέξτε ότι η θέση τού C ως προς το σύστημα των σωματιδίων δεν εξαρτάται από την εκλογή του σημείου αναφοράς O ως προς το οποίο μετρούμε τις συντεταγμένες των μαζών.

Σημειώνουμε ότι, όπως είναι φανερό και από το παραπάνω παράδειγμα, η θέση του κέντρου μάζας ενός συστήματος *δεν συμπίπτει απαραίτητα με τη θέση κάποιου σωματιδίου του συστήματος*. (Δώστε παραδείγματα συστημάτων όπου το C συμπίπτει με κάποιο από τα σωματίδια, καθώς και συστημάτων όπου δεν συμπίπτει.)

6.2 Νόμος του Νεύτωνα και Διατήρηση της Ορμής

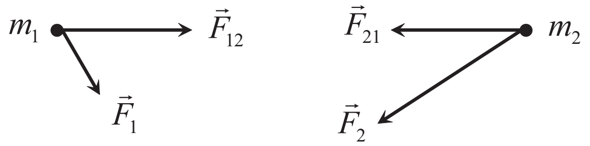
Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots$, οι στιγμιαίες ταχύτητες των σωματιδίων ενός συστήματος. Η *ολική ορμή* του συστήματος είναι

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots$$

ή, σύντομα,

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \qquad (6.4)$$

Θεωρούμε, για ευκολία, ένα σύστημα δύο σωματιδίων m_1 , m_2 . Καλούμε $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ τις αντίστοιχες ολικές *εξωτερικές* δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια από παράγοντες εξωτερικούς ως προς το σύστημα. Υποθέτουμε, επίσης, ότι υπάρχουν και *εσωτερικές* δυνάμεις: $\vec{F}_{12}$ στο σωματίδιο *1* από το σωματίδιο *2*, και $\vec{F}_{21}$ στο σωματίδιο *2* από το σωματίδιο *1*. Σύμφωνα με το νόμο δράσης-αντίδρασης, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.



Η ολική δύναμη στο σωμ.*1* είναι $\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}$, ενώ αυτή στο σωμ.*2* είναι $\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}$. Από το νόμο του Νεύτωνα, έχουμε

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} \ , \qquad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} \ .$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$, βρίσκουμε

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \ .$$

Γενικεύοντας το παραπάνω αποτέλεσμα για σύστημα με αυθαίρετο αριθμό σωματιδίων, έχουμε

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \vec{F}_i \qquad (6.5)$$

Το αριστερό μέλος τής (6.5) είναι η χρονική παράγωγος της ολικής ορμής $\vec{P}$ του συστήματος. Το δεξί μέλος παριστά την *ολική εξωτερική δύναμη* που δρα στο σύστημα:

$$\vec{F}_{\varepsilon\xi} = \sum_i \vec{F}_i \qquad (6.6)$$

Έτσι, η (6.5) γράφεται

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\varepsilon\xi}} \qquad (6.7)$$

Δηλαδή, *ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ορμής του συστήματος είναι ίσος με την ολική* ***εξωτερική*** *δύναμη που δρα στο σύστημα*. Παρατηρούμε ότι οι *εσωτερικές* δυνάμεις (που ανά δύο αλληλοαναιρούνται) *δεν* μπορούν να μεταβάλουν την ορμή του συστήματος: αυτό το επιτυγχάνουν μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις.

Ποιος είναι ο ρόλος του κέντρου μάζας σε όλα αυτά; Η απάντηση βρίσκεται σε δύο σημαντικές προτάσεις τις οποίες θα αποδείξουμε παρακάτω:

1. Η ολική ορμή του συστήματος είναι ίδια με αυτή ενός υποθετικού σωματιδίου το οποίο έχει μάζα ίση με την ολική μάζα *M* του συστήματος και κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος.

2. Το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται σαν να είναι ένα σωματίδιο με μάζα ίση με την ολική μάζα M του συστήματος, πάνω στο οποίο ασκείται η ολική εξωτερική δύναμη που δρα στο σύστημα.

Απόδειξη:

1) Παραγωγίζοντας την (6.2), βρίσκουμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας C του συστήματος:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v}_C = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i \tag{6.8}$$

Συνδυάζοντας την (6.8) με την (6.4), βρίσκουμε

$$\boxed{\vec{P} = M\,\vec{v}_C} \tag{6.9}$$

2) Παραγωγίζοντας την (6.9), έχουμε

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_C) = M\frac{d\vec{v}_C}{dt} = M\vec{a}_C$$

όπου $\vec{a}_C$ η επιτάχυνση του κέντρου μάζας. Έτσι, λόγω της (6.7),

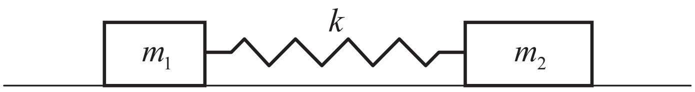
$$\boxed{\vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\,\vec{a}_C} \tag{6.10}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το κέντρο μάζας C παίζει το ρόλο ενός υποθετικού σωματιδίου του οποίου η κίνηση αντιπροσωπεύει, κατά κάποιον τρόπο, την κίνηση ολόκληρου του συστήματος.

Ένα σύστημα σωματιδίων λέγεται *απομονωμένο* όταν (α) δεν υπόκειται σε εξωτερικές επιδράσεις (πράγμα που μόνο θεωρητικά μπορεί να συμβεί), ή (β) η ολική εξωτερική δύναμη πάνω σε αυτό είναι μηδέν: $\vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0$. Σε μια τέτοια περίπτωση, οι σχέσεις (6.7) και (6.9) οδηγούν σε δύο βασικά συμπεράσματα:

1. *Η ολική ορμή $\vec{P}$ ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται σταθερή* ***(αρχή διατήρησης της ορμής)****.*
2. *Το κέντρο μάζας C ενός απομονωμένου συστήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_C$.*

Σαν παράδειγμα, θεωρούμε δύο μάζες m_1, m_2, συνδεδεμένες μεταξύ τους με ελατήριο, οι οποίες μπορούν να κινούνται χωρίς τριβή πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια (όπως εξηγήσαμε στην Παρ.3.1, οι μάζες μπορούν να αντιμετωπίζονται σαν «σωματίδια» στο βαθμό που μας ενδιαφέρει μόνο η μεταφορική τους κίνηση):



Το σύστημα είναι απομονωμένο, διότι η ολική εξωτερική δύναμη είναι μηδέν (τα βάρη των δύο σωμάτων εξουδετερώνονται από τις κάθετες αντιδράσεις από την οριζόντια επιφάνεια, ενώ δεν υπάρχει τριβή). Έτσι, η ολική ορμή του συστήματος, καθώς και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του, μένουν σταθερές κατά την κίνηση των μαζών πάνω στο επίπεδο. Στο σύστημα υπάρχει επίσης και μια *εσωτερική* δύναμη, μέτρου $F_{\varepsilon\sigma} = k\Delta l$ (όπου Δl η παραμόρφωση του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό του μήκος), η οποία *δεν* επηρεάζει την ορμή του συστήματος. Αν και, στην πραγματικότητα, η δύναμη αυτή ασκείται στις μάζες από το ελατήριο, μπορούμε να θεωρούμε ότι η $F_{\varepsilon\sigma}$ ασκείται από τη μία μάζα στην άλλη *μέσω* του ελατηρίου. (Το ελατήριο θεωρείται αβαρές, άρα με μηδενική μάζα, κι έτσι δεν λογίζεται σαν μέρος του συστήματος.)

6.4 Κινητική Ενέργεια Συστήματος Σωματιδίων

Θυμίζουμε ότι, σύμφωνα με το ΘΜΚΕ (Παρ.4.3), η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σωματιδίου μέσα σε ένα χρονικό διάστημα ισούται με το έργο της *ολικής* δύναμης που δρα πάνω στο σωματίδιο στο διάστημα αυτό. Στην περίπτωση συστήματος σωματιδίων, το ΘΜΚΕ γενικεύεται ως εξής:

> *Η μεταβολή της ολικής κινητικής ενέργειας ενός συστήματος σωματιδίων ισούται με το έργο των εξωτερικών* ***και*** *των εσωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα.*

$$\boxed{E_{k,B} - E_{k,A} \equiv \Delta E_k = W_{\varepsilon\xi} + W_{\varepsilon\sigma}} \qquad (6.23)$$

Όταν στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, τότε προφανώς $W_{\varepsilon\xi}$=0, οπότε η μεταβολή της ολικής κινητικής ενέργειας του συστήματος οφείλεται αποκλειστικά στις *εσωτερικές* δυνάμεις. Για παράδειγμα, θεωρήστε δύο ηλεκτρικά φορτία που βρίσκονται κοντά το ένα στο άλλο και τα οποία κρατάμε αρχικά ακίνητα. Αν τα αφήσουμε ελεύθερα, οι μεταξύ τους ασκούμενες δυνάμεις Coulomb (εσωτερικές δυνάμεις) θα θέσουν τα φορτία σε κίνηση και θα προσδώσουν στο σύστημα κινητική ενέργεια ίση με το ολικό έργο των δυνάμεων αυτών. Προσέξτε ότι, στην απουσία *εξωτερικών* δυνάμεων, η ολική ορμή του συστήματος μένει σταθερή, κάτι που γενικά *δεν* ισχύει για την κινητική ενέργεια (εκτός αν η αλληλεπίδραση των σωματιδίων είναι αμελητέα).

6.5 Διατήρηση της Ενέργειας Συστήματος Σωματιδίων

Το γενικευμένο ΘΜΚΕ (6.23) έχει γενική ισχύ, ανεξάρτητα από τη φύση των εξωτερικών και των εσωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα. Στη σχέση (6.23), τα $W_{\varepsilon\xi}$ και $W_{\varepsilon\sigma}$ παριστούν τα αντίστοιχα έργα των δυνάμεων αυτών όταν το σύστημα μεταβαίνει από μια κατάσταση *A* σε μια άλλη κατάσταση *B* μέσα στο χρονικό διάστημα t_A t_B .

Όταν τόσο οι εσωτερικές, όσο και οι εξωτερικές δυνάμεις είναι *συντηρητικές*, υπάρχουν εκφράσεις $E_{p,\varepsilon\sigma}$ (*εσωτερική δυναμική ενέργεια*) και $E_{p,\varepsilon\xi}$ (*εξωτερική δυναμική ενέργεια*), οι οποίες είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων των σωματιδίων, τέτοιες ώστε

$$W_{\varepsilon\sigma} = (E_{p,\varepsilon\sigma})_A - (E_{p,\varepsilon\sigma})_B \tag{6.24}$$

και

$$W_{\varepsilon\xi} = (E_{p,\varepsilon\xi})_A - (E_{p,\varepsilon\xi})_B \tag{6.25}$$

Η (6.23), τότε, γράφεται

$$E_{k,B} - E_{k,A} = (E_{p,\varepsilon\sigma} + E_{p,\varepsilon\xi})_A - (E_{p,\varepsilon\sigma} + E_{p,\varepsilon\xi})_B \quad \Rightarrow$$

$$(E_k + E_{p,\varepsilon\sigma} + E_{p,\varepsilon\xi})_A = (E_k + E_{p,\varepsilon\sigma} + E_{p,\varepsilon\xi})_B \tag{6.26}$$

Η σχέση (6.26), που αποτελεί την ΑΔΜΕ για σύστημα σωματιδίων, ισχύει για τυχαίες καταστάσεις A και B του συστήματος. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η ποσότητα

$$E = E_k + E_{p,\varepsilon\sigma} + E_{p,\varepsilon\xi} = E_k + E_p \tag{6.27}$$

που παριστά την *ολική μηχανική ενέργεια* του συστήματος, μένει σταθερή κατά την κίνηση του συστήματος, υπό την προϋπόθεση ότι *όλες* οι δυνάμεις που δρουν στο σύστημα, εσωτερικές και εξωτερικές, είναι συντηρητικές. Προσέξτε ότι καλέσαμε $E_p = E_{p,\varepsilon\sigma} + E_{p,\varepsilon\xi}$ την *ολική δυναμική ενέργεια* του συστήματος. Επίσης, οι εκφράσεις $E_{p,\varepsilon\sigma}$ και $E_{p,\varepsilon\xi}$ στην ουσία παριστούν αθροίσματα δυναμικών ενεργειών που σχετίζονται με όλες τις συντηρητικές δυνάμεις που δρουν στο σύστημα, εσωτερικές και εξωτερικές, αντίστοιχα.

Όταν κάποιες από τις δυνάμεις που δρουν στο σύστημα (εσωτερικές ή εξωτερικές) είναι μη-συντηρητικές, το άθροισμα (E_k+E_p) δεν μένει σταθερό: η μεταβολή του περιγράφεται από μια σχέση ανάλογη της (4.20). Έτσι, αν W' είναι το έργο των μη-συντηρητικών δυνάμεων κατά τη μετάβαση του συστήματος από μια κατάσταση A σε μια άλλη κατάσταση B, είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$W' = (E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A \equiv \Delta(E_k + E_p) \tag{6.28}$$

Δηλαδή, *η μεταβολή του αθροίσματος* (E_k+E_p) *ισούται με το έργο των μη-συντηρητικών δυνάμεων (εσωτερικών ή εξωτερικών).* Το άθροισμα (E_k+E_p) μένει σταθερό μόνο στην ειδική περίπτωση όπου οι μη-συντηρητικές δυνάμεις δεν παράγουν έργο $(W' = 0)$.

Δίνουμε τώρα δύο παραδείγματα συντηρητικών συστημάτων:

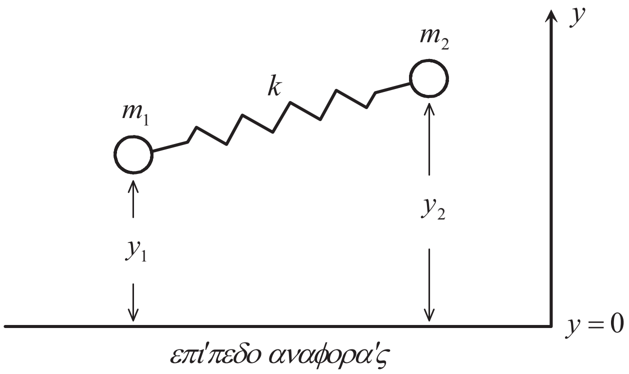
1) Θεωρούμε ένα άτομο υδρογόνου αποτελούμενο από ένα ηλεκτρόνιο και ένα πρωτόνιο με μάζες m_1 και m_2 , αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι τα σωμάτια δεν υπόκεινται σε άλλες δυνάμεις πέραν από τη μεταξύ τους έλξη Coulomb, η οποία παίζει το ρόλο εσωτερικής δύναμης στο σύστημα και είναι συντηρητική. Έχουμε:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 \ , \quad E_{p,\varepsilon\sigma} = -k\frac{q^2}{r} \ , \quad E_{p,\varepsilon\xi} = 0$$

όπου q η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου και r η απόσταση του ηλεκτρονίου από τον πυρήνα του ατόμου (πρωτόνιο). Η ΑΔΜΕ δίνει

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 - k\frac{q^2}{r} = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{6.29}$$

2) Θεωρούμε δύο μάζες m_1, m_2 που συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς k. Το σύστημα βρίσκεται στον αέρα, κοντά στην επιφάνεια της Γης:



Καλούμε y_1, y_2 τα στιγμιαία ύψη στα οποία βρίσκονται οι μάζες πάνω από το επίπεδο αναφοράς y=0 (π.χ., επιφάνεια της Γης), στο οποίο η δυναμική ενέργεια της βαρύτητας ορίζεται ως μηδέν. Επίσης, καλούμε x την παραμόρφωση (επέκταση ή συμπίεση) του ελατηρίου σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Στο σύστημα ασκούνται τέσσερις δυνάμεις: δύο εσωτερικές, μέτρου kx, που εκφράζουν την αλληλεπίδραση των δύο μαζών μέσω του ελατηρίου, και δύο εξωτερικές, $m_1 g$ και $m_2 g$, που περιγράφουν την έλξη της Γης στις δύο μάζες. Οι δυναμικές ενέργειες, εσωτερική και εξωτερική, του συστήματος είναι

$$E_{p,\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2} k x^2 \ , \quad E_{p,\varepsilon\xi} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

(προσέξτε ότι η $E_{p,\varepsilon\xi}$ είναι το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών που αντιστοιχούν σε κάθε μάζα ξεχωριστά). Η ΑΔΜΕ δίνει

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 + \frac{1}{2} k x^2 + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{6.30}$$

6.6 Κρούσεις

Η *κρούση* είναι μια μορφή αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο μαζών, κατά την οποία οι μάζες έρχονται σε «επαφή» (αν και αυτό δεν είναι ακριβές σε ατομικό επίπεδο!), ανταλλάσσοντας ορμή και ενέργεια. Θεωρούμε ότι το φαινόμενο λαμβάνει χώρα μέσα σε ένα πάρα πολύ μικρό (απειροστό) χρονικό διάστημα *dt*. Δηλαδή, η αλληλεπίδραση των μαζών είναι σχεδόν στιγμιαία: αμέσως πριν και αμέσως μετά την επαφή, οι μάζες ουσιαστικά δεν ασκούν καμία δύναμη η μία στην άλλη.

Τα προβλήματα κρούσης μάς δίνουν μια καλή ευκαιρία να μελετήσουμε στην πράξη διάφορους νόμους διατήρησης:

1) <u>Διατήρηση της ορμής</u>

Όπως γνωρίζουμε, η μεταβολή $d\vec{P}$ της ολικής ορμής $\vec{P}$ ενός συστήματος σε ένα χρονικό διάστημα *dt* οφείλεται στην ολική εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$ (π.χ., βαρύτητα, τριβή, κλπ.) που δρα στο σύστημα στο διάστημα αυτό. Τα παραπάνω μεγέθη συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\varepsilon\xi} \quad \Rightarrow \quad d\vec{P} = \vec{F}_{\varepsilon\xi}\, dt \ .$$

Τώρα, στις κρούσεις οι εξωτερικές δυνάμεις (που αθροίζονται στην $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$) είναι σχεδόν αμελητέες σε σύγκριση με τις εσωτερικές δυνάμεις που οφείλονται στην αλληλεπίδραση των μαζών. Επιπλέον, το χρονικό διάστημα *dt* που διαρκεί η αλληλεπίδραση είναι απειροστό. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{F}_{\varepsilon\xi}\, dt \approx 0 \quad \Rightarrow \quad d\vec{P} \approx 0 \ .$$

Τούτο σημαίνει ότι

> *κατά τη διάρκεια μιας κρούσης, η ολική ορμή του συστήματος μένει σταθερή. Δηλαδή, η ορμή* ***αμέσως πριν*** *την κρούση είναι ίση με την ορμή* ***αμέσως μετά*** *την κρούση.*

2) <u>Κινητική ενέργεια</u>

Σε αντίθεση με την ορμή, η ολική κινητική ενέργεια *δεν* διατηρείται απαραίτητα σε μια κρούση. Τούτο εξηγείται ως εξής: Θυμίζουμε ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός συστήματος σε ένα χρονικό διάστημα (εδώ, στο διάστημα *dt* που διαρκεί η κρούση) ισούται με το έργο των εξωτερικών *και* των εσωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα στο διάστημα αυτό. Και, αν το έργο των εξωτερικών δυνάμεων σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα είναι αμελητέο, το έργο των εσωτερικών δυνάμεων μπορεί να είναι σημαντικό, ιδιαίτερα αν η κρούση προκαλεί *παραμόρφωση* των συγκρουόμενων σωμάτων. Σε μια τέτοια περίπτωση, μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος καταναλώνεται λόγω του (αρνητικού) έργου των εσωτερικών δυνάμεων που προκαλούν την παραμόρφωση.

Με βάση τη διατήρηση ή όχι της κινητικής ενέργειας, διακρίνουμε τα εξής είδη κρούσης:

α) *Τέλεια ελαστική κρούση* (ή απλά *ελαστική*): Η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος μένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κρούσης. Δηλαδή, οι τιμές της κινητικής ενέργειας *αμέσως πριν* και *αμέσως μετά* την κρούση είναι ίσες. Τούτο ισχύει όταν η κρούση δεν προκαλεί παραμόρφωση των σωμάτων. Παράδειγμα: η σύγκρουση ανάμεσα σε δύο μπάλες του μπιλιάρδου.

β) *Μη-ελαστική κρούση*: Μέρος της κινητικής ενέργειας του συστήματος χάνεται λόγω παραμόρφωσης κατά την κρούση, κι έτσι η ενέργεια αυτή δεν μένει σταθερή. Παράδειγμα: η σύγκρουση ανάμεσα σε δύο λαστιχένιες μπάλες.

γ) *Πλαστική κρούση*: Είναι ακραία μορφή μη-ελαστικής κρούσης κατά την οποία τα συγκρουόμενα σώματα προσκολλώνται το ένα στο άλλο και κινούνται μαζί, σαν ένα σώμα, με κοινή ταχύτητα. Μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος χάνεται λόγω παραμόρφωσης των σωμάτων. Παράδειγμα: η σύγκρουση ανάμεσα σε δύο μπάλες από πηλό.

6.7 Πλαστική και Ελαστική Κρούση

α) *Πλαστική κρούση*

Θεωρούμε δύο μάζες m_1 και m_2 που κινούνται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητες $\vec{v}_1 = v_1\hat{u}_x$ και $\vec{v}_2 = v_2\hat{u}_x$. (Προσέξτε ότι τα v_1 και v_2 είναι *αλγεβρικές τιμές* και μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά. Στο παράδειγμα του σχήματος, $v_1>0$ και $v_2<0$.) Μετά τη σύγκρουσή τους, οι μάζες προσκολλώνται η μία στην άλλη και κινούνται σαν ένα σώμα μάζας (m_1+m_2), με ταχύτητα $\vec{V} = V\hat{u}_x$.

Εδώ ισχύει μόνο η διατήρηση της ορμής. Εξισώνοντας τις τιμές της ολικής ορμής αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση, έχουμε:

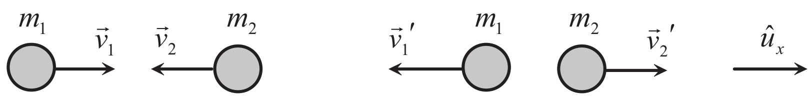
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{V} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{V} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2}\,\hat{u}_x \equiv V\hat{u}_x \qquad (6.31)$$

Στην περίπτωση που οι δύο μάζες είναι ίσες ($m_1=m_2$) και συγκρούονται μετωπικά με ταχύτητες ίσες κατά μέτρο ($v_2=-v_1$), η (6.31) δίνει $\vec{V}=0$. Δηλαδή, η σύνθετη μάζα που προκύπτει μένει ακίνητη. Γενικά, η κατεύθυνση της ταχύτητας $\vec{V}$ προσδιορίζεται από το πρόσημο της αλγεβρικής τιμής V.

Άσκηση: Βρείτε την ταχύτητα $\vec{V}$ στην περίπτωση που το σώμα m_2 είναι αρχικά ακίνητο. Τι θα συμβεί αν $m_2 >> m_1$ (όπως, π.χ., όταν ένα κομμάτι πηλού εκτοξεύεται σε έναν τοίχο);

β) <u>*Ελαστική κρούση*</u>



Πριν *Μετά*

Θεωρούμε δύο μάζες m_1 και m_2 που κινούνται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητες $\vec{v}_1 = v_1 \hat{u}_x$ και $\vec{v}_2 = v_2 \hat{u}_x$. Οι μάζες συγκρούονται ελαστικά και, αμέσως μετά την κρούση, αποκτούν νέες ταχύτητες $\vec{v}_1{}' = v_1{}' \hat{u}_x$ και $\vec{v}_2{}' = v_2{}' \hat{u}_x$. (Τα v_1, v_2, $v_1{}'$, $v_2{}'$ είναι αλγεβρικές τιμές και μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά. Στο παράδειγμα του σχήματος, $v_1>0$, $v_2<0$, κλπ.) Ζητούμε τις ταχύτητες των μαζών μετά την κρούση.

Η διατήρηση της ορμής δίνει

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' \;\Rightarrow\; (m_1v_1 + m_2v_2)\,\hat{u}_x = (m_1v_1{}' + m_2v_2{}')\,\hat{u}_x \;\Rightarrow$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1{}' + m_2v_2{}' \qquad (6.32)$$

Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας, έχουμε

$$\frac{1}{2}m_1v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2v_2{}^2 = \frac{1}{2}m_1v_1{}'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2{}'^2 \;\Rightarrow$$

$$m_1v_1{}^2 + m_2v_2{}^2 = m_1v_1{}'^2 + m_2v_2{}'^2 \qquad (6.33)$$

Η (6.32) γράφεται

$$m_1(v_1 - v_1{}') = m_2(v_2{}' - v_2) \qquad (6.32΄)$$

ενώ η (6.33) δίνει

$$m_1(v_1 - v_1{}')(v_1 + v_1{}') = m_2(v_2{}' - v_2)(v_2 + v_2{}') \qquad (6.33΄)$$

Τώρα, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι οι ταχύτητες των μαζών μεταβάλλονται κατά την κρούση. Έτσι, $v_1 - v_1{}' \neq 0$, $v_2{}' - v_2 \neq 0$, πράγμα που μας επιτρέπει να διαιρέσουμε κατά μέλη την (6.33΄) με την (6.32΄):

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \tag{6.34}$$

Οι (6.32) και (6.34) αποτελούν σύστημα με αγνώστους τα v_1' και v_2', για δοσμένα v_1 και v_2 . Λύνοντας το σύστημα αυτό, βρίσκουμε

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad , \qquad v_2' = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \tag{6.35}$$

Ειδικές περιπτώσεις:

1) Αν m_1=m_2 , η (6.35) δίνει $v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$. Δηλαδή, *τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες*. Ειδικά, αν το m_2 είναι αρχικά ακίνητο, μετά την κρούση αποκτά την ταχύτητα που είχε αρχικά το m_1, το οποίο μετά την κρούση μένει, με τη σειρά του, ακίνητο.

2) Αν m_2>>m_1 , μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $m_1 / m_2 \simeq 0$. Η (6.35) τότε δίνει $v_1' \simeq -v_1 + 2v_2$, $v_2' \simeq v_2$ (δείξτε το!). Ειδικά, αν το m_2 είναι αρχικά ακίνητο (v_2=0), τότε $v_1' \simeq -v_1$, $v_2' \simeq 0$. Δηλαδή, μετά την κρούση το m_2 παραμένει ακίνητο, ενώ η φορά κίνησης του m_1 αντιστρέφεται χωρίς να αλλάξει το μέτρο της ταχύτητάς του. Αυτό συμβαίνει, π.χ., όταν μια μπάλα του μπιλιάρδου προσκρούει κάθετα σε μια σκληρή επιφάνεια και ανακλάται.

Σημείωση: Το είδος της κρούσης που περιγράψαμε ονομάζεται *κεντρική κρούση*, και έχει σαν χαρακτηριστικό ότι όλες οι ταχύτητες, πριν και μετά την κρούση, είναι στη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τα κέντρα μάζας των συγκρουόμενων σωμάτων. Όταν η συνθήκη αυτή δεν πληρούται, η κρούση καλείται *έκκεντρη*.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

8.1 Ιδανικό Υγρό

Με τον όρο *ρευστό* εννοούμε ένα συνεχές μέσο που μπορεί να ρέει. Ανάλογα με τις φυσικές τους ιδιότητες, τα ρευστά χωρίζονται σε *υγρά* και *αέρια*. Στο κεφάλαιο αυτό θα περιοριστούμε στη μελέτη των υγρών, και με αυτή τη σημασία θα χρησιμοποιούμε στο εξής τον όρο «ρευστό». Η μηχανική των ρευστών χωρίζεται σε δύο ενότητες: την *στατική* των ρευστών (*Υδροστατική*), που μελετάει τα ρευστά σε κατάσταση ισορροπίας, και την *δυναμική* των ρευστών (*Υδροδυναμική*), που μελετάει τα ρευστά σε κίνηση.

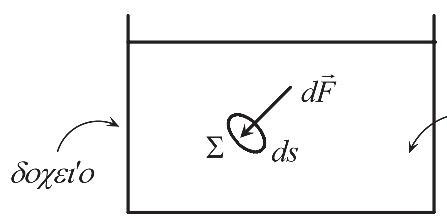
Στον κόσμο δεν υπάρχει τίποτα το ιδανικό! Δεν είναι απαισιόδοξη διαπίστωση αλλά απλή ερμηνεία του όρου «ιδανικός» (=*ιδέα*): κάτι που βρίσκεται μόνο στη σκέψη μας, που δεν υπάρχει στην πραγματικότητα. Επειδή τα *πραγματικά* υγρά έχουν χαρακτηριστικά (π.χ., ιξώδες) που συχνά δυσκολεύουν τη μελέτη τους, επινοούμε μια εξιδανίκευσή τους που την καλούμε *ιδανικό υγρό*, με τις εξής ιδιότητες:

1. Είναι *τελείως ασυμπίεστο*. Τούτο έχει σαν συνέπεια ότι η πυκνότητα ενός ιδανικού υγρού είναι σταθερή σε όλη την έκταση του υγρού. (Αυτή είναι και μια από τις βασικές διαφορές των υγρών από τα αέρια.)
2. Δεν έχει *εσωτερικές τριβές* (*ιξώδες*). Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία στην Υδροδυναμική, γιατί μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για να μελετήσουμε την κίνηση του υγρού.

Πολλά πραγματικά υγρά (όπως, π.χ., το νερό) έχουν ιδιότητες που προσεγγίζουν αυτές των ιδανικών. Εν τούτοις, οι αποκλίσεις των υγρών από την ιδανική κατάσταση δεν είναι πάντα ανεπιθύμητες. Για παράδειγμα, αν τα υγρά ήταν *τελείως* ασυμπίεστα, δεν θα επέτρεπαν τη διάδοση ελαστικών κυμάτων (όπως ο ήχος) στο εσωτερικό τους.

8.2 Υδροστατική Πίεση

Ξεκινώντας τη μελέτη της Υδροστατικής, θεωρούμε ένα υγρό που ηρεμεί (ισορροπεί) και καλούμε ds μια *στοιχειώδη* (απειροστή) επιφάνεια που βρίσκεται τοποθετημένη σε κάποιο σημείο Σ του υγρού. Η ds μπορεί να αποτελεί τμήμα της επιφάνειας ενός αντικειμένου που βρίσκεται μέσα στο υγρό, ή και να είναι τμήμα μιας *νοητής* επιφάνειας μέσα στο υγρό (μιας επιφάνειας, δηλαδή, που αποτελείται από σημεία που ανήκουν στο ίδιο το υγρό). Μια τέτοια απειροστή επιφάνεια μπορεί πάντα, έστω προσεγγιστικά, να θεωρείται επίπεδη. Καλούμε $d\vec{F}$ τη στοιχειώδη δύναμη που ασκεί το υγρό στην επιφάνεια ds :



Όπως βρίσκεται πειραματικά, η $d\vec{F}$ έχει τις εξής ιδιότητες:

1) Είναι ανεξάρτητη από τη φύση της επιφάνειας *ds*. Δηλαδή, η δύναμη που ασκεί το υγρό στο στοιχείο *ds* δεν εξαρτάται από τη μοριακή σύνθεση του *ds* (από το υλικό από το οποίο αποτελείται το *ds*).

2) Η διεύθυνση της $d\vec{F}$ είναι πάντα *κάθετη* στο *ds*, ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό τού *ds*. Τούτο εξηγείται από την απουσία εσωτερικών τριβών στο υγρό και την υπόθεση ότι το υγρό ισορροπεί.

3) Το μέτρο *dF* της $d\vec{F}$ είναι ανεξάρτητο του προσανατολισμού τού *ds* (δηλαδή, το *dF* δεν αλλάζει αν στρέψουμε το *ds*, αφήνοντάς το όμως σταθερά τοποθετημένο στο σημείο *Σ* του υγρού). Όπως βρίσκεται, το *dF* εξαρτάται μόνο από τη θέση του σημείου *Σ* και, για απειροστό *ds*, είναι ανάλογο του εμβαδού τού *ds* (το εμβαδόν αυτό, για ευκολία, θα συμβολίζεται επίσης με *ds*).

Η τελευταία αυτή παρατήρηση μας οδηγεί στον ορισμό της *υδροστατικής πίεσης P* στο θεωρούμενο σημείο *Σ* του υγρού:

$$P = \frac{dF}{ds} \quad \Leftrightarrow \quad dF = P\, ds \tag{8.1}$$

Παρατηρούμε τα εξής:

1) Η *P* είναι, γενικά, συνάρτηση της θέσης του σημείου *Σ*.

2) Η *P* δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό τού *ds* (γιατί;), ούτε, επομένως, και από τον προσανατολισμό τής $d\vec{F}$. Άρα, η *P* είναι *μονόμετρο* μέγεθος.

3) Η *P* ορίζεται για κάθε σημείο του υγρού χωριστά, *δεν* ορίζεται αθροιστικά. Έτσι, δεν έχει νόημα να μιλάμε για «ολική πίεση» πάνω σε μια επιφάνεια (όπως δεν μιλάμε, π.χ., για «ολική θερμοκρασία» μέσα σε ένα δωμάτιο). Αντίθετα, η δύναμη *είναι* αθροιστικό μέγεθος. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την ολική δύναμη πάνω σε μια επιφάνεια *S* σαν το διανυσματικό άθροισμα των στοιχειωδών δυνάμεων $d\vec{F}$ που ασκούνται από το υγρό στις διάφορες στοιχειώδεις επιφάνειες *ds* από τις οποίες αποτελείται η *S*.

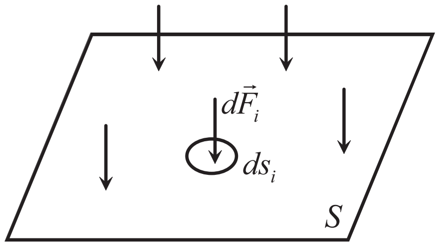
Όπως βρίσκεται πειραματικά,

> *όλα τα σημεία μιας* ***οριζόντιας*** *επιφάνειας μέσα σε ένα υγρό που ηρεμεί έχουν τη ίδια πίεση.*

Αυτό σημαίνει ότι η υδροστατική πίεση μεταβάλλεται μόνο στην *κατακόρυφη* διεύθυνση, δηλαδή στη διεύθυνση του πεδίου βαρύτητας. (Ο ρόλος της βαρύτητας γίνεται φανερός και από την παρουσία της σταθεράς g στις βασικές εξισώσεις της Υδροστατικής.) Σαν ειδική περίπτωση, η σταθερή πίεση στην *ελεύθερη επιφάνεια* του υγρού (η οποία είναι πάντα οριζόντια επιφάνεια) είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση P_0.

Θεωρούμε τώρα μια *οριζόντια* επιφάνεια εμβαδού S μέσα στο υγρό. Χωρίζουμε την S σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος από στοιχειώδεις επιφάνειες ds_i :

$$S = \sum_i ds_i \ .$$



Η ολική δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί το υγρό στην S είναι *κάθετη* στην S, και το μέτρο της, F, είναι το άθροισμα των μέτρων dF_i όλων των στοιχειωδών δυνάμεων $d\vec{F}_i$ που α-σκούνται κάθετα στα αντίστοιχα ds_i :

$$F = \sum_i dF_i \ .$$

Αλλά, $dF_i = Pds_i$, όπου P η *σταθερή* πίεση πάνω στην S, κοινή για όλες τις στοιχειώδεις επιφάνειες ds_i . Έτσι,

$$F = \sum_i Pds_i = P\sum_i ds_i \quad \Rightarrow$$

$$F = PS \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{F}{S} \qquad (8.2)$$

Προσέξτε ότι η (8.2) ισχύει μόνο για *οριζόντια* επιφάνεια, διότι προϋποθέτει ότι η πίεση P είναι σταθερή πάνω στην S. Αντίθετα, η *απειροστή* σχέση (8.1), που αφορά στοιχειώδη επιφάνεια ds σε μεμονωμένο σημείο Σ του υγρού, ισχύει πάντα, ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό τής ds.

8.3 Θεμελιώδης Εξίσωση της Υδροστατικής

Αναφέρθηκε νωρίτερα ότι η υδροστατική πίεση P σε ένα υγρό που ισορροπεί, μεταβάλλεται μόνο στην *κατακόρυφη* διεύθυνση. Αναζητούμε τώρα την εξίσωση που περιγράφει αυτή τη μεταβολή.

Θεωρούμε ένα υγρό πυκνότητας ρ. Καλούμε P την πίεση σε μια οριζόντια επιφάνεια που βρίσκεται σε ύψος y πάνω από ένα αυθαίρετο οριζόντιο επίπεδο αναφοράς (ως τέτοιο επίπεδο αναφοράς μπορεί να λαμβάνεται, π.χ., ο πυθμένας του δοχείου). Όπως βρίσκεται, η μεταβολή της πίεσης $\Delta P = P_2 - P_1$, καθώς μετακινούμαστε από ύψος y_1 σε ύψος y_2 (δηλαδή, κατά $\Delta y = y_2 - y_1$), δίνεται από την έκφραση:

$$\boxed{P_2 - P_1 = -\rho g (y_2 - y_1) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta P = -\rho g \Delta y} \qquad (8.6)$$

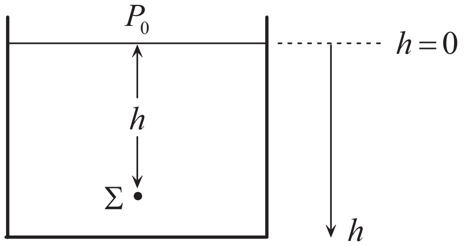
Προσέξτε ότι η πίεση *ελαττώνεται* ($\Delta P < 0$) όταν αυξάνει το ύψος ($\Delta y > 0$).

Εναλλακτικά, αντί για τα ύψη y, που έχουν θετική φορά προς τα *πάνω*, μπορούμε να αναφερόμαστε στα *βάθη h* με θετική φορά προς τα *κάτω* και με επίπεδο αναφοράς (συνήθως) την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Τότε, η θεμελιώδης εξίσωση (8.6) παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{P_2 - P_1 = \rho g (h_2 - h_1) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta P = \rho g \Delta h} \qquad (8.8)$$

Προσέξτε ότι η πίεση *αυξάνει* με το βάθος ($\Delta P>0$ όταν $\Delta h>0$).

Έστω τώρα ότι ζητούμε την πίεση P σε ένα σημείο Σ σε βάθος h κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Φυσικά, *όλα* τα σημεία του υγρού στο ίδιο βάθος h με το Σ θα έχουν την ίδια πίεση P. Η πίεση στην επιφάνεια του υγρού, όπου $h=0$, είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση P_0 :



Θέτοντας $h_1=0$, $P_1=P_0$, και $h_2=h$, $P_2=P$, στη σχέση (8.8), έχουμε:

$$P - P_0 = \rho g (h-0) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{P = P_0 + \rho g h} \qquad (8.9)$$

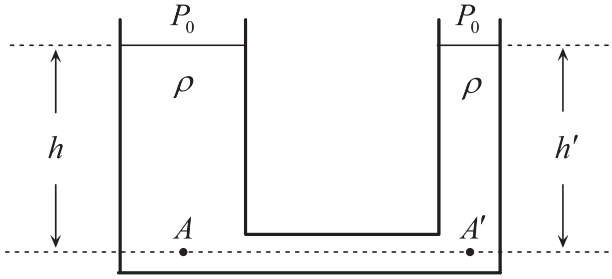
Η σχέση (8.9) είναι μια εναλλακτική, ισοδύναμη μορφή της θεμελιώδους εξίσωσης (8.8). [Εφαρμόζοντας την (8.9) σε δύο σημεία P_1 και P_2 σε βάθη h_1 και h_2 , αντίστοιχα, βρείτε πάλι την (8.8).] Προσέξτε ότι η ατμοσφαιρική πίεση P_0 προστίθεται στην πίεση ρgh που θα προκαλούσε από μόνο του το υγρό στο σημείο Σ. Η παρατήρηση αυτή εκφράζει την *αρχή του Pascal*, την οποία θα εξετάσουμε στην Παρ.8.6.

8.5 Αρχή των Συγκοινωνούντων Δοχείων

Φανταστείτε το εξής πείραμα: Παίρνουμε δύο δοχεία του ίδιου ύψους, ένα λεπτό και ένα φαρδύ, τα τρυπάμε σε σημεία κοντά στους πυθμένες τους, και προσαρμόζουμε στα ανοίγματα τις δύο άκρες ενός σωλήνα, συνδέοντας έτσι τα δοχεία και δημιουργώντας ένα ενιαίο *σύστημα συγκοινωνούντων δοχείων*. Στη συνέχεια, τοποθετούμε το σύστημα πάνω σε ένα τραπέζι και, με αργό αλλά σταθερό ρυθμό, γεμίζουμε ταυτόχρονα και τα δύο δοχεία με νερό. Ποιο δοχείο θα γεμίσει πρώτο;

Πιθανώς θα απαντήσετε «το λεπτό, γιατί σ' αυτό η ελεύθερη επιφάνεια του νερού θα φτάσει γρηγορότερα στο άνοιγμα του δοχείου». Αν κάνουμε, όμως, το πείραμα θα διαπιστώσουμε ότι τα δύο δοχεία γεμίζουν *ταυτόχρονα*! Αυτό είναι συνέπεια της *αρχής των συγκοινωνούντων δοχείων*, η οποία λέει ότι *αν δύο ή περισσότερα δοχεία συγκοινωνούν μεταξύ τους, περιέχουν το ίδιο υγρό, και υπόκεινται στην ίδια εξωτερική πίεση, τότε, σε κατάσταση ισορροπίας, οι ελεύθερες επιφάνειες του υγρού βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο σε όλα τα δοχεία.*

Η αρχή αποδεικνύεται θεωρητικά ως εξής:

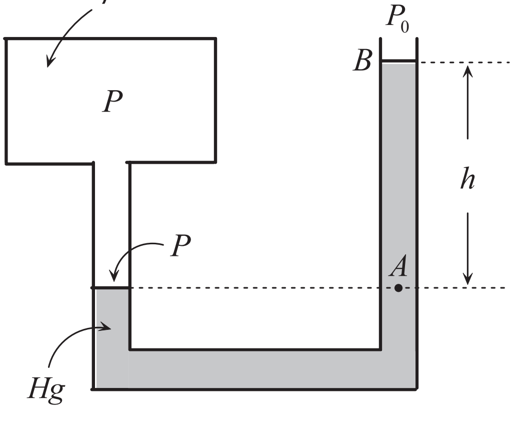


Θεωρούμε τα σημεία A και A' του υγρού, τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικά δοχεία αλλά στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, άρα έχουν την ίδια πίεση. Καλούμε h και h' τα ύψη των ελεύθερων επιφανειών των δοχείων πάνω από το επίπεδο αυτό. Από την (8.9),

$$P_A = P_{A'} \;\Rightarrow\; P_0 + \rho g h = P_0 + \rho g h' \;\Rightarrow\; h = h' \;.$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δύο δοχείων.

Η αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων *δεν* ισχύει σε δύο περιπτώσεις: (α) όταν στα δοχεία υπάρχουν διαφορετικά υγρά που δεν αναμειγνύονται, και (β) όταν οι πιέσεις στις ελεύθερες επιφάνειες του περιεχόμενου υγρού είναι διαφορετικές. Παράδειγμα: Στα δοχεία του παρακάτω σχήματος, το ένα σκέλος συνδέεται με δεξαμενή που περιέχει αέριο πίεσης P, ενώ το άλλο σκέλος είναι ανοιχτό στην ατμοσφαιρική πίεση P_0. Το σύστημα των δοχείων περιέχει υδράργυρο (Hg). Καλούμε h το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του Hg (δεξί δοχείο) πάνω από το επίπεδο της διαχωριστικής επιφάνειας του Hg με το αέριο (αριστερό δοχείο), και θεωρούμε ένα σημείο A στο δεξί δοχείο, στο ύψος της διαχωριστικής επιφάνειας:



Η υδροστατική πίεση στο σημείο *A* του Hg είναι ίση με την πίεση *P* του αερίου στη δεξαμενή (γιατί;), ενώ η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια *B* του Hg είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση P_0. Από τη σχέση (8.8),

$$P_A - P_B = \rho g h \quad \Rightarrow \quad P - P_0 = \rho g h\,.$$

Η παραπάνω διάταξη ονομάζεται *ανοιχτό μανόμετρο* και χρησιμεύει για τη μέτρηση *υπερπιέσεων* (P–P_0). Γενικά, καλούμε *υπερπίεση* τη διαφορά πιέσεων ανάμεσα σε μια μεταβλητή πίεση *P* και μια προκαθορισμένη, σταθερή πίεση P_0 (στο παράδειγμά μας, η ατμοσφαιρική πίεση) η οποία λαμβάνεται ως «σημείο αναφοράς» για τη μέτρηση πιέσεων.

8.6 Αρχή του Pascal

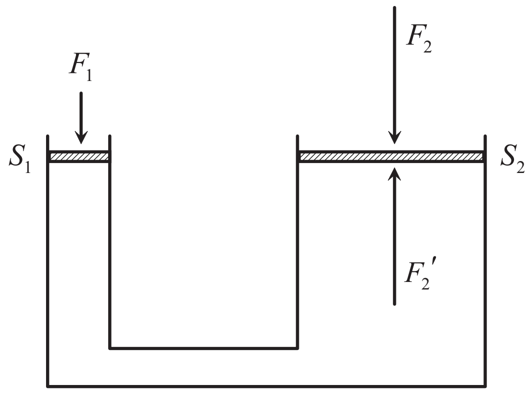
Η *αρχή του Pascal* μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

> *Κάθε μεταβολή της πίεσης στην επιφάνεια ενός υγρού γίνεται αισθητή ταυτόχρονα σε όλα τα σημεία του υγρού. Ειδικότερα, αν η εξωτερική πίεση μεταβληθεί κατά ΔP, η πίεση σε κάθε σημείο του υγρού θα μεταβληθεί επίσης κατά ΔP.*

Πράγματι: Όταν η εξωτερική πίεση είναι P_0, η πίεση σε ένα σημείο *Σ* του υγρού σε βάθος *h* είναι $P=P_0+\rho gh$. Αν η εξωτερική πίεση αυξηθεί κατά ΔP, έτσι ώστε η νέα τιμή της γίνει $P_0'=P_0+\Delta P$, η πίεση στο *Σ* θα είναι

$$P' = P_0' + \rho gh = (P_0+\Delta P) + \rho gh = (P_0 + \rho gh) + \Delta P = P + \Delta P\,.$$

Μια πρακτική εφαρμογή της αρχής του Pascal έχουμε στο *υδραυλικό πιεστήριο*. Στην απλούστερη μορφή του, αποτελείται από δύο κατακόρυφα κυλινδρικά δοχεία εμβαδών διατομής S_1 και S_2, όπου $S_1 < S_2$. Στο πάνω μέρος κάθε κυλίνδρου έχει τοποθετηθεί ένα έμβολο, κάτω από το οποίο υπάρχει υγρό, π.χ., ορυκτέλαιο. Οι δύο κύλινδροι συγκοινωνούν στο κάτω μέρος τους με σωλήνα. Στο μικρό έμβολο ασκείται μια κατακόρυφη δύναμη F_1 προς τα κάτω. Ποια δύναμη F_2 πρέπει να ασκήσουμε στο μεγάλο έμβολο ώστε το σύστημα να είναι σε ισορροπία;



Το μικρό έμβολο ασκεί στο υγρό μια πίεση $P=F_1 / S_1$. Κατά την αρχή του Pascal, η πίεση αυτή μεταφέρεται ακέραια στο μεγάλο έμβολο, στο οποίο έτσι ασκείται μια δύναμη κατακόρυφη προς τα πάνω, ίση με

$$F_2' = PS_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2 \ .$$

Για να ισορροπεί, λοιπόν, το μεγάλο έμβολο θα πρέπει να του ασκήσουμε δύναμη προς τα κάτω, ίση με $F_2=F_2'$, δηλαδή,

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 \qquad (8.10)$$

Παρατηρούμε ότι $F_2>F_1$. Έτσι, με μικρή προσπάθεια (δύναμη F_1) μπορούμε, π.χ., να συγκρατήσουμε ένα μεγάλο βάρος (δύναμη F_2).

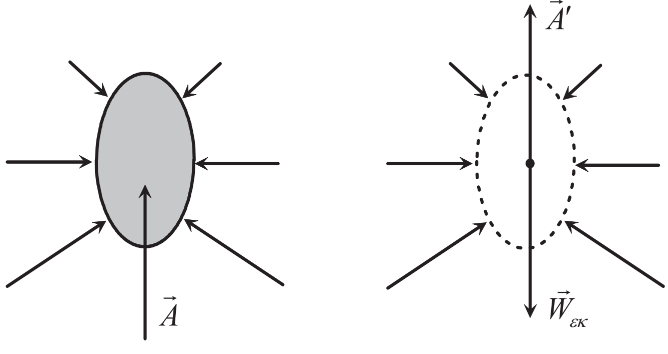
8.7 Αρχή του Αρχιμήδη

Η *αρχή του Αρχιμήδη* αποτελεί τη σπουδαιότερη, ίσως, αρχή της Υδροστατικής, και διατυπώνεται ως εξής:

> *Κάθε σώμα βυθισμένο (ολόκληρο ή κατά ένα μέρος του) μέσα σε ένα υγρό, δέχεται μια δύναμη την οποία ονομάζουμε* ***άνωση*** *και η οποία είναι η συνισταμένη όλων των στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούνται κάθετα από το υγρό στα διάφορα σημεία της βυθισμένης επιφάνειας του σώματος. Το μέτρο της άνωσης ισούται με το βάρος του υγρού που εκτοπίζεται από το σώμα, η κατεύθυνσή της είναι κατακόρυφη προς τα πάνω, και ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού (****κέντρο άνωσης****).*

Η αρχή αποδεικνύεται θεωρητικά ως εξής:

Καλούμε $V_{εκ}$ και $W_{εκ}$ τον όγκο και το βάρος, αντίστοιχα, του υγρού που εκτοπίζεται από το σώμα. (Αν το σώμα είναι εξ ολοκλήρου βυθισμένο στο υγρό, το $V_{εκ}$ ισούται με τον όγκο του σώματος. Αν όμως το σώμα είναι μερικώς βυθισμένο, το $V_{εκ}$ είναι μικρότερο.) Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το σώμα είναι βυθισμένο ολόκληρο:



(α) (β)

Στο σχήμα (*α*) βλέπουμε μια «φωτογραφία» του σώματος τη στιγμή που είναι βυθισμένο. Η εικόνα αυτή είναι στιγμιαία διότι, γενικά, το σώμα *δεν* ισορροπεί μέσα στο υγρό. Η άνωση $\vec{A}$ είναι η συνισταμένη των στοιχειωδών δυνάμεων που ασκούνται κάθετα στο σώμα από το υγρό.

Στο σχήμα (*β*), το σώμα έχει αφαιρεθεί και στη θέση του έχει εισρεύσει υγρό του ίδιου σχήματος και όγκου με το σώμα. Η επιφάνεια αυτού του τμήματος του υγρού δέχεται τώρα μια ολική δύναμη (άνωση) $\vec{A}'$ από το υγρό που την περιβάλλει. Το βάρος $\vec{W}_{\varepsilon\kappa}$ αυτού του τμήματος είναι ίσο με το βάρος του υγρού που είχε εκτοπιστεί από το σώμα, και διέρχεται από το κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού.

Σε αντίθεση με το σώμα, το υγρό που το αντικατέστησε ισορροπεί (αφού αποτελεί τμήμα ενός υγρού σε ισορροπία). Άρα,

$$\vec{A}' + \vec{W}_{\varepsilon\kappa} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A}' = -\vec{W}_{\varepsilon\kappa} \ .$$

Όμως, η άνωση είναι ίδια στις δύο περιπτώσεις ($\vec{A} = \vec{A}'$) αφού, όπως έχουμε πει, οι δυνάμεις που ασκεί ένα υγρό σε μια επιφάνεια δεν εξαρτώνται από τη φύση της επιφάνειας. Έτσι, τελικά, η άνωση που ασκεί το υγρό στο σώμα είναι

$$\vec{A} = -\vec{W}_{\varepsilon\kappa} \qquad (8.11)$$

Η κατεύθυνση της άνωσης είναι κατακόρυφη προς τα πάνω (αντίθετη του βάρους), ενώ το μέτρο της είναι

$$\boxed{A = W_{\varepsilon\kappa} = \rho g V_{\varepsilon\kappa}} \qquad (8.12)$$

όπου ρ η πυκνότητα του υγρού.

Παρατηρούμε τα εξής:

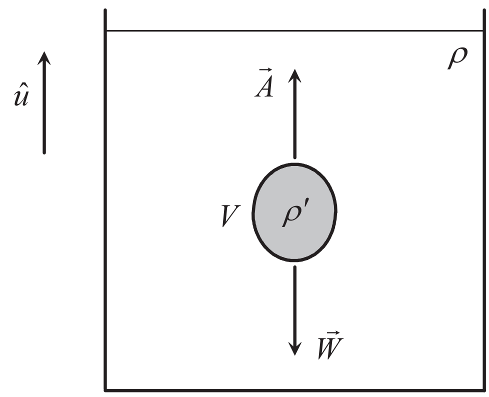
1) Η άνωση εξαρτάται μόνο από τον όγκο του *βυθισμένου* τμήματος του σώματος και είναι ανεξάρτητη από το βάρος, την πυκνότητα, ή το υλικό από το οποίο αποτελείται το σώμα.

2) Για σώμα που είναι ολόκληρο βυθισμένο, η άνωση δεν εξαρτάται από το βάθος στο οποίο βρίσκεται το σώμα μέσα στο υγρό.

3) Η άνωση *δεν* διέρχεται απαραίτητα από το κέντρο βάρους του σώματος, εκτός αν το σώμα είναι ομογενές και πλήρως βυθισμένο, οπότε το κέντρο βάρους του συμπίπτει με το κέντρο άνωσης (κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού).

8.8 Δυναμική του Βυθισμένου Σώματος

Βυθίζουμε ολόκληρο ένα σώμα μέσα σε ένα υγρό, και κατόπιν το αφήνουμε ελεύθερο. Πώς θα κινηθεί στη συνέχεια το σώμα; Όπως θα δείξουμε, η κίνηση εξαρτάται από το συσχετισμό της *μέσης* πυκνότητας ρ' του σώματος με την πυκνότητα ρ του υγρού.



Έστω m, V, W η μάζα, ο όγκος, και το βάρος, αντίστοιχα, του σώματος. Η μέση πυκνότητα του σώματος ορίζεται

$$\rho' = \frac{m}{V} \quad \Leftrightarrow \quad m = \rho' V \tag{8.13}$$

Άρα,

$$W = mg = \rho' g V \tag{8.14}$$

Επειδή το σώμα είναι ολόκληρο βυθισμένο, $V_{εκ}=V$, όπου $V_{εκ}$ ο όγκος του υγρού που εκτοπίζεται από το σώμα. Από την (8.12), τότε, η άνωση που δέχεται το σώμα είναι, κατά μέτρο,

$$A = \rho g V \ .$$

Διανυσματικά, παίρνοντας τη θετική φορά (που καθορίζεται από το $\hat{u}$) προς τα πάνω,

$$\vec{A} = A\,\hat{u} = \rho g V\,\hat{u} \ , \quad \vec{W} = -W\,\hat{u} = -\rho' g V\,\hat{u} \ .$$

Η ολική δύναμη στο σώμα είναι

$$\vec{F} = \vec{A} + \vec{W} = (A - W)\,\hat{u} = (\rho - \rho')gV\,\hat{u} \equiv F\,\hat{u} \ .$$

Παρατηρούμε ότι η φορά τής $\vec{F}$ εξαρτάται από το πρόσημο της αλγεβρικής τιμής

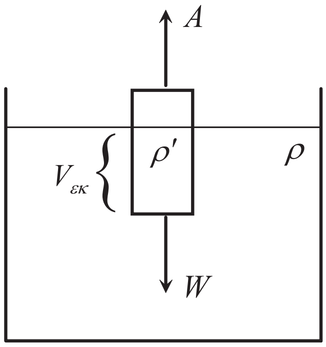
$$F = A - W = (\rho - \rho')gV \tag{8.15}$$

- Αν $\rho' > \rho$, τότε $F < 0$ και το σώμα *βυθίζεται*.
- Αν $\rho' = \rho$, τότε $F = 0$ και το σώμα *ισορροπεί* βυθισμένο *ολόκληρο* στο υγρό.
- Αν $\rho' < \rho$, τότε $F > 0$ και το σώμα *ανέρχεται* και *επιπλέει*, βυθισμένο μόνο κατά ένα *μέρος* του στο υγρό.

Η μέση πυκνότητα ρ' ενός υποβρυχίου μπορεί να μεταβάλλεται με εισροή ή εκροή θαλασσινού νερού και να καθίσταται, έτσι, μεγαλύτερη, μικρότερη, ή και ίση με την πυκνότητα ρ του νερού. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η κατάδυση, η ανάδυση, ή η ισορροπία του υποβρυχίου μέσα στο νερό.

8.9 Ισορροπία Σώματος που Επιπλέει

Καταρχήν, αναγκαία συνθήκη για να επιπλέει ένα σώμα είναι να έχει μέση πυκνότητα ρ' *μικρότερη* από την πυκνότητα ρ του υγρού ($\rho' < \rho$). Καλούμε V και W τον όγκο και το βάρος, αντίστοιχα, του σώματος, και $V_{\varepsilon\kappa}$ τον όγκο του βυθισμένου τμήματός του (που είναι επίσης και ο όγκος του εκτοπιζόμενου υγρού). Εκτός από το W, στο σώμα επενεργεί και η άνωση A που ασκείται από το υγρό στη *βυθισμένη* επιφάνεια του σώματος. Θέλουμε να βρούμε το ποσοστό του όγκου του σώματος που είναι βυθισμένο στο υγρό.



Επειδή το σώμα ισορροπεί, η ολική δύναμη πάνω σε αυτό είναι μηδέν. Δηλαδή, η άνωση εξισορροπεί πλήρως το βάρος του σώματος: $A=W$. Όμως, από την (8.12), $A=\rho g V_{\varepsilon\kappa}$, ενώ από την (8.14), $W=\rho' g V$. Άρα (απαλείφοντας το g),

$$\rho V_{\varepsilon\kappa} = \rho' V \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{V_{\varepsilon\kappa}}{V} = \frac{\rho'}{\rho}} \qquad (8.16)$$

Έτσι, π.χ., αν $\rho' = 3\rho/4$, τότε $V_{\varepsilon\kappa}= 3V/4$. Δηλαδή, το σώμα είναι βυθισμένο κατά τα 3/4 του όγκου του, *ανεξάρτητα από το σχήμα ή τις διαστάσεις του*. Εφαρμόζοντας ιδιότητες των αναλογιών στην (8.16), βρίσκουμε το ποσοστό του όγκου του σώματος που είναι *πάνω* από την επιφάνεια του υγρού:

$$\frac{V - V_{\varepsilon\kappa}}{V} = \frac{\rho - \rho'}{\rho} \qquad (8.17)$$

Εφαρμογή: Γιατί ο καπετάνιος του *Τιτανικού* δεν είδε το παγόβουνο; Η πυκνότητα του πάγου είναι $\rho'=0.92 gr/cm^3$, ενώ αυτή του θαλασσινού νερού είναι $\rho=1.03 gr/cm^3$. Αντικαθιστώντας τα δεδομένα αυτά στη σχέση (8.17), βρίσκουμε ότι μόνο το 10.68% του ολικού όγκου του παγόβουνου ήταν ορατό πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας.

Θα μπορούσατε να παρατηρήσετε ότι η σχέση $A=W$ που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, εξασφαλίζει μόνο τη *μεταφορική* αλλά όχι και την *περιστροφική* ισορροπία του σώματος. Τι θα συμβεί αν εκτρέψουμε λίγο το σώμα από την αρχική θέση ισορροπίας του, περιστρέφοντάς το ελαφρά ως προς οριζόντιο άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας του; Αν το σώμα έχει την τάση να επανέλθει στην αρχική του θέση, η ισορροπία καλείται *ευσταθής*. Αν όμως το σώμα ανατραπεί, η ισορροπία είναι *ασταθής*. Αν το σώμα, τέλος, παραμείνει στη νέα του θέση, η ισορροπία λέγεται *αδιάφορη*.

Όταν το κέντρο βάρους C του σώματος βρίσκεται *κάτω* από το κέντρο άνωσης K (κέντρο βάρους του εκτοπιζόμενου υγρού, από το οποίο διέρχεται η άνωση), η ισορροπία είναι *ευσταθής*, διότι, όταν εκτρέπουμε λίγο το σώμα από τη θέση ισορροπίας του, το βάρος $\vec{W}$ και η άνωση $\vec{A}$ δημιουργούν *ζεύγος επαναφοράς* που εξαναγκάζει το σώμα να επιστρέψει στην αρχική του θέση. Αυτό συμβαίνει, π.χ., στους πλωτήρες, που είναι αντικείμενα που επιπλέουν στη θάλασσα και έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε το κέντρο βάρους τους C να βρίσκεται πολύ χαμηλά.

Είναι όμως δυνατό η ισορροπία ενός σώματος που επιπλέει να είναι ευσταθής ακόμα και όταν το κέντρο βάρους C είναι *πάνω* από το κέντρο άνωσης K. Αυτό εξαρτάται από τη θέση τού C ως προς ένα άλλο σημείο M που ονομάζεται *μετάκεντρο*. Το M βρίσκεται ως εξής: Όταν το σώμα ισορροπεί, ο άξονας CK που διέρχεται από τα C και K είναι κατακόρυφος. Θεωρούμε ότι ο άξονας αυτός είναι σταθερά συνδεδεμένος με το σώμα και περιστρέφεται με αυτό. Κατά την εκτροπή του σώματος από τη θέση ισορροπίας του εμφανίζεται ένα *νέο* κέντρο άνωσης K', αφού η γεωμετρία του εκτοπιζόμενου υγρού γενικά αλλάζει. Η άνωση $\vec{A}$ διέρχεται τώρα από το K'. Το μετάκεντρο M είναι το σημείο τομής του φορέα τής $\vec{A}$ με τον άξονα CK. Όπως αποδεικνύεται:

- Αν το C βρίσκεται *κάτω* από το M, η ισορροπία είναι *ευσταθής*.
- Αν το C βρίσκεται *πάνω* από το M, η ισορροπία είναι *ασταθής*.
- Αν το C *συμπίπτει* με το M, η ισορροπία είναι *αδιάφορη*.

Στα πλοία, το κέντρο βάρους C βρίσκεται πάντα ψηλότερα από το κέντρο άνωσης K αλλά, για σχετικά μικρές γωνίες εκτροπής, το C είναι κάτω από το μετάκεντρο M. Έτσι, η ισορροπία των πλοίων είναι ευσταθής. Για γωνίες εκτροπής μεγαλύτερες από μια οριακή τιμή, το M είναι δυνατό να βρεθεί κάτω από το C, οπότε αναπτύσσεται ζεύγος ανατροπής.

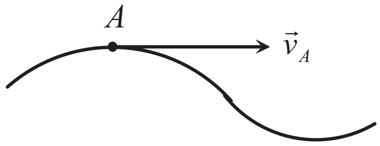
Στα υποβρύχια το μετάκεντρο M συμπίπτει με το *σταθερό* κέντρο άνωσης K. Έτσι, η ισορροπία ενός υποβρυχίου θα είναι ευσταθής όταν το κέντρο βάρους του, C, βρίσκεται *κάτω* από το K. Τούτο εξασφαλίζεται κατά την κατάδυση με εισροή θαλασσινού νερού σε κατάλληλες δεξαμενές. Οι δεξαμενές αυτές αδειάζουν κατά την ανάδυση του υποβρυχίου.

8.10 Φλέβες Ροής

Έχοντας μελετήσει τα ρευστά σε ισορροπία, περνάμε τώρα στα ρευστά σε κίνηση. Γενικά, η κίνηση ενός ρευστού καλείται *ροή*. Η μελέτη μιας πραγματικής ροής είναι συχνά μια εξαιρετικά περίπλοκη υπόθεση, γι' αυτό θα καταφύγουμε και πάλι σε κάποιες απλουστευτικές εξιδανικεύσεις. Ορίζουμε λοιπόν ως *ιδανική ροή* μια ροή με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

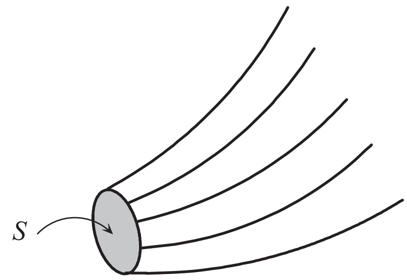
1. Το ρευστό είναι ένα ιδανικό υγρό, δηλαδή ασυμπίεστο και χωρίς εσωτερικές τριβές.
2. Η ροή είναι *στρωτή* ή *μόνιμη*. Τούτο σημαίνει ότι η ταχύτητα $\vec{v}$ του ρευστού είναι *χρονικά* σταθερή σε κάθε σημείο της ροής. (Η ταχύτητα ροής μπορεί, όμως, να μεταβάλλεται από ένα σημείο σε ένα άλλο.)
3. Η ροή είναι *αστρόβιλη*. Αυτό μπορούμε να το κατανοήσουμε ως εξής: Φανταστείτε το ρευστό σαν ένα τεράστιο πλήθος από «σωματίδια» (στοιχειώδεις όγκους) που κινούνται στη φορά της ροής. Τότε, σε κάθε σημείο της ροής, το διερχόμενο σωματίδιο δεν έχει στροφορμή ως προς το σημείο αυτό (εκτελεί μόνο μεταφορική και όχι περιστροφική κίνηση).

Η τροχιά ενός σωματιδίου του ρευστού αποτελεί μια *ρευματική γραμμή*. Σε κάθε σημείο μιας ρευματικής γραμμής, η ταχύτητα ροής (δηλαδή, η ταχύτητα του διερχόμενου σωματιδίου του ρευστού) είναι διάνυσμα *εφαπτόμενο* στη γραμμή:



Στη στρωτή ροή, κάθε σωματίδιο που διέρχεται από ένα σημείο A ακολουθεί πάντα την ίδια ρευματική γραμμή (διαφορετικά, η ταχύτητα ροής $\vec{v}_A$ στο σημείο αυτό δεν θα ήταν χρονικά σταθερή, αφού θα άλλαζε η κατεύθυνσή της). Τούτο σημαίνει ότι *οι ρευματικές γραμμές δεν τέμνονται*. (Τι σας θυμίζει αυτό από τον Ηλεκτρισμό; Τι παίζει εκεί τον ίδιο ρόλο που παίζει εδώ η ταχύτητα ροής;)

Ένας μεγάλος αριθμός ρευματικών γραμμών που σχηματίζουν δέσμη σωληνοειδούς σχήματος, αποτελούν μια *φλέβα ροής* (ονομάζεται και *σωλήνας ροής*):



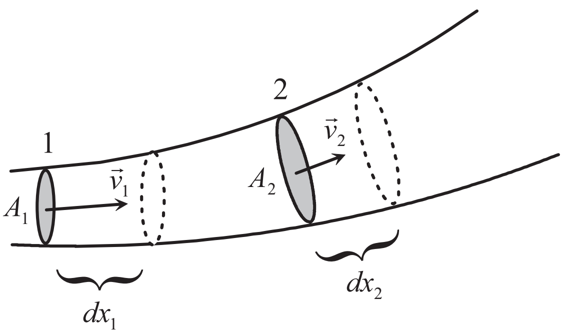
Φανταστείτε μια επιφάνεια S κάθετη στις ρευματικές γραμμές της ροής. Το σύνολο των ρευματικών γραμμών που διέρχονται από το εσωτερικό και την περιφέρεια της S συνθέτουν αυτό που ονομάσαμε φλέβα ροής. Ειδικά, οι ρευματικές γραμμές που διέρχονται από την περιφέρεια της S αποτελούν την *επιφάνεια* της φλέβας.

Μια φλέβα συμπεριφέρεται σαν να είναι πραγματικός σωλήνας με αδιαπέραστα τοιχώματα. Πράγματι: Ένα σωματίδιο του ρευστού που δεν βρίσκεται στην επιφάνεια της φλέβας είναι αδύνατο να διαπεράσει την επιφάνεια, αφού, αν συνέβαινε αυτό, η ρευματική γραμμή του σωματιδίου θα έτεμνε μια ρευματική γραμμή της επιφάνειας. Στην πράξη, βέβαια, οι φλέβες ροής που παρατηρούμε περιβάλλονται από φυσικά τοιχώματα όπως, π.χ., ένα λάστιχο ποτίσματος ή ένας σωλήνας ύδρευσης.

8.11 Νόμος Συνεχείας

Ο νόμος αυτός είναι άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων της ιδανικής ροής, και αποτελεί την πρώτη θεμελιώδη αρχή της Υδροδυναμικής:

Θεωρούμε μια φλέβα ροής και δύο κάθετες τομές σε αυτή στα σημεία 1 και 2, με εμβαδά διατομής A_1 και A_2, αντίστοιχα. (Ως κάθετη τομή σε κάποιο σημείο μιας φλέβας εννοούμε μια τομή της φλέβας με ένα επίπεδο κάθετο στην ταχύτητα ροής, ή στην κεντρική ρευματική γραμμή, στο σημείο αυτό.) Οι ταχύτητες ροής $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ στα σημεία 1 και 2 είναι κάθετες στις αντίστοιχες διατομές A_1 και A_2:



Έστω ότι, μέσα σε χρόνο dt, τα σωματίδια του υγρού που διέρχονται από τη διατομή A_1 προχωρούν κατά απόσταση dx_1, ενώ αυτά που διέρχονται από την A_2 προχωρούν κατά dx_2. Έτσι, στο διάστημα dt, από τις δύο διατομές περνούν όγκοι υγρού ίσοι με

$$dV_1 = A_1\, dx_1 \quad , \quad dV_2 = A_2\, dx_2 \ .$$

Όμως, λόγω του ότι το υγρό είναι ασυμπίεστο και τα τοιχώματα της φλέβας είναι αδιαπέραστα, ο όγκος του υγρού που διέρχεται από μια διατομή θα είναι ίσος με τον όγκο που διέρχεται από κάθε άλλη διατομή μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα. Έτσι,

$$dV_1 = dV_2 \ .$$

Επιπλέον, αν v_1 και v_2 είναι τα μέτρα των ταχυτήτων ροής στις δύο διατομές, τότε

$$dx_1 = v_1\, dt \quad , \quad dx_2 = v_2\, dt \ .$$

Έτσι, έχουμε:

$$A_1 v_1\, dt = A_2 v_2\, dt \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2} \tag{8.18}$$

Επειδή τα σημεία 1 και 2 της φλέβας επιλέχθηκαν τυχαία, η σχέση (8.18) διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\boxed{A \cdot v = \textit{σταθερό κατά μήκος της φλέβας}} \tag{8.19}$$

Οι (8.18) και (8.19) εκφράζουν το *νόμο συνεχείας* για μια φλέβα ροής. Προσέξτε ότι η απόδειξη του νόμου βασίστηκε στην ιδιότητα που έχουν τα τοιχώματα της φλέβας να είναι αδιαπέραστα, πράγμα που καθιστά αδύνατο σε μια ποσότητα υγρού στο εξωτερικό της φλέβας να εισέλθει σε αυτήν, όπως και σε μια ποσότητα υγρού στο εσωτερικό της φλέβας να εξέλθει από αυτήν. Έτσι, η ποσότητα του διερχόμενου υγρού ανά μονάδα χρόνου πρέπει να είναι ίδια για όλες τις διατομές της φλέβας.

Το γινόμενο $A\,v$ έχει μια ιδιαίτερη φυσική σημασία, αν προσέξουμε ότι

$$A\,v = A\,\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

όπου dV είναι ο όγκος του υγρού που διέρχεται από τη διατομή A σε χρόνο dt. Έτσι, το γινόμενο $A\,v$ παριστά τον *όγκο υγρού ανά μονάδα χρόνου* που διέρχεται από τη διατομή A, και ονομάζεται *παροχή* της φλέβας:

$$\Pi = A\,v = \frac{dV}{dt} = \textit{παροχή} \qquad (8.20)$$

Σύμφωνα με το νόμο συνεχείας (8.19),

η παροχή μιας φλέβας είναι σταθερή κατά μήκος της φλέβας.

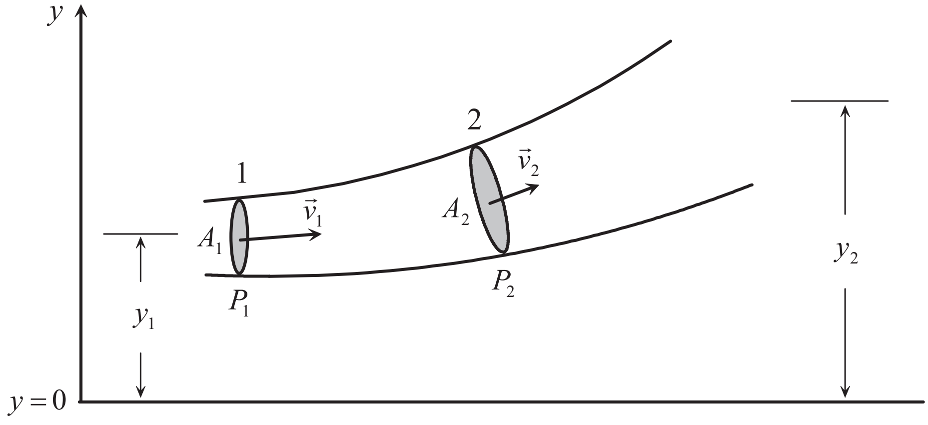
Δηλαδή, ο ίδιος όγκος υγρού ανά μονάδα χρόνου διέρχεται από κάθε διατομή της φλέβας, σε συμφωνία και με την παρατήρηση που κάναμε νωρίτερα.

Όταν ανοίγουμε τη βρύση, αυτό που ρυθμίζουμε με τη στρόφιγγα είναι η παροχή εκροής του νερού. Αν συνδέσουμε τη βρύση με ένα λάστιχο ποτίσματος, η ίδια αυτή παροχή θα εξέλθει από το στόμιο του λάστιχου. Όταν θέλουμε να στείλουμε το νερό πιο μακριά, καλύπτουμε με το δάχτυλό μας ένα μέρος του στομίου ώστε να ελαττώσουμε το εμβαδόν διατομής του. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να αυξηθεί η ταχύτητα εκροής του νερού, σύμφωνα με το νόμο συνεχείας.

8.12 Νόμος του Bernoulli

Ο νόμος αυτός δεν αποτελεί μια νέα, ανεξάρτητη αρχή της Μηχανικής: είναι απλά η έκφραση της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για ένα ρευστό (εδώ, ένα υγρό).

Θεωρούμε μια φλέβα ροής ενός υγρού πυκνότητας ρ, και δύο διατομές εμβαδών A_1 και A_2 στα σημεία 1 και 2 της φλέβας. Οι ταχύτητες ροής, μέτρων v_1 και v_2, είναι κάθετες στις αντίστοιχες διατομές. Καλούμε P_1, P_2 τις υδροστατικές πιέσεις στις δύο διατομές, και y_1, y_2 τα ύψη στα οποία βρίσκονται τα κέντρα των διατομών πάνω από ένα αυθαίρετο επίπεδο αναφοράς:



Για να κατανοήσουμε το πώς ακριβώς ορίζονται οι πιέσεις P_1 και P_2 , θεωρούμε το τμήμα της φλέβας που εκτείνεται από το σημείο 1 ως το σημείο 2. Το τμήμα αυτό οριοθετείται από τις διατομές A_1 και A_2. Υποθέτοντας, έστω προσεγγιστικά, ότι η υδροστατική πίεση έχει σταθερή τιμή πάνω σε κάθε διατομή, γράφουμε

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} \quad , \quad P_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

όπου F_1, F_2 οι δυνάμεις που ασκούνται κάθετα στις διατομές A_1, A_2 από το ρευστό που περιβάλλει το θεωρούμενο τμήμα της φλέβας. (Οι δυνάμεις είναι κάθετες στις διατομές, αφού οι τελευταίες κινούνται πάντα κάθετα προς τον εαυτό τους.)

Σύμφωνα τώρα με το *νόμο του Bernoulli*, για κάθε δύο σημεία 1 και 2 της φλέβας ισχύει ότι

$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2} \qquad (8.21)$$

ή, πιο γενικά,

$$\boxed{P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \textit{σταθερό κατά μήκος της φλέβας}} \qquad (8.22)$$

Αν εξαιρέσουμε την παρουσία της πίεσης P, το αριστερό μέλος τής (8.22) θυμίζει ολική μηχανική ενέργεια στο πεδίο βαρύτητας, μόνο που στη θέση της μάζας m έχουμε την πυκνότητα ρ του ρευστού. Το P εδώ σχετίζεται με το έργο που απαιτείται για να μεταβληθεί αυτή η ενέργεια, σύμφωνα με τη σχέση (6.28). Πιο συγκεκριμένα, εκτός από τη συντηρητική δύναμη της βαρύτητας, στο θεωρούμενο τμήμα της φλέβας ασκούνται και οι πιεστικές δυνάμεις F_1, F_2 από το περιβάλλον ρευστό. Το έργο των δυνάμεων αυτών αντιπροσωπεύει ο όρος P στο νόμο του Bernoulli, και είναι αυτό το έργο που ευθύνεται για τη μεταβολή της ολικής μηχανικής ενέργειας του θεωρούμενου τμήματος (περισσότερες λεπτομέρειες στο Παράρτημα Δ).

Στο όριο που η ταχύτητα της ροής τείνει στο μηδέν, οι νόμοι της Υδροδυναμικής θα πρέπει να ανάγονται σε αυτούς της Υδροστατικής. Για ένα ακίνητο ρευστό έχουμε ότι v_1=v_2=0, για δύο τυχαίες διατομές A_1, A_2 του δοχείου που το περιέχει. Ο νόμος συνεχείας (8.18), τότε, ανάγεται σε μια τετριμμένη ισότητα της μορφής 0=0, ενώ ο νόμος του Bernoulli (8.21) δίνει

$$P_2 - P_1 = -\rho g (y_2 - y_1) \qquad (8.23)$$

Η σχέση αυτή δεν είναι άλλη από τη θεμελιώδη εξίσωση (8.6) της Υδροστατικής.

8.13 Οριζόντια Ροή

Μια φλέβα ροής καλείται οριζόντια αν ο άξονάς της (ή, η κεντρική ρευματική γραμμή της) κείται σε οριζόντιο επίπεδο. Προσέξτε ότι ο άξονας αυτός δεν είναι απαραίτητα ευθύγραμμος. Για παράδειγμα, η ροή νερού μέσα σε ένα λάστιχο ποτίσματος καμπύλου σχήματος, το οποίο ακουμπά ολόκληρο στο δάπεδο, συνιστά οριζόντια φλέβα.

Όλες οι διατομές μιας οριζόντιας φλέβας βρίσκονται στο ίδιο ύψος y πάνω από το επίπεδο αναφοράς. Θέτοντας $y_1=y_2$ στο νόμο του Bernoulli (8.21), οι όροι που περιέχουν τα ύψη απαλείφονται και ο νόμος παίρνει τη μορφή

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (8.24)$$

ή

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \qquad (8.25)$$

Στην οριακή περίπτωση που το ρευστό είναι σε ισορροπία ($v=0$), η (8.25) μας λέει ότι $P = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$ κατά μήκος μιας οριζόντιας διαδρομής. Αυτό, βέβαια, μας είναι γνωστό από την Υδροστατική. Κάτω από ποιες προϋποθέσεις, τώρα, ισχύει στην Υδροδυναμική ($v \neq 0$) η υπόθεση ότι η πίεση P κατά μήκος μιας οριζόντιας φλέβας είναι σταθερή; Σύμφωνα με την (8.25), αυτό συμβαίνει όταν $v=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$ κατά μήκος της φλέβας. Όμως, από το νόμο συνεχείας, $A\,v = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$ κατά μήκος της φλέβας, όπου A η διατομή της φλέβας. Έτσι, θα πρέπει να ισχύει ότι $A=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$:

Η υδροστατική πίεση είναι σταθερή κατά μήκος μιας οριζόντιας φλέβας με σταθερή διατομή.

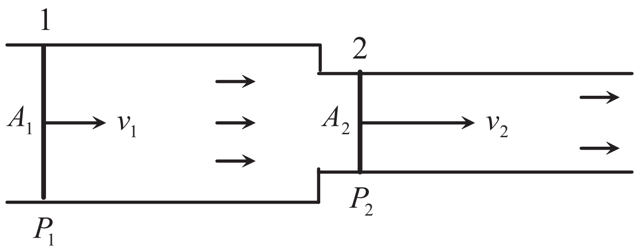
Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, όταν έχουμε ροή νερού μέσα σε ένα λάστιχο ποτίσματος τοποθετημένο ολόκληρο πάνω σε οριζόντια επιφάνεια.

Σε ποιο σημείο μιας οριζόντιας φλέβας είναι η πίεση μέγιστη (ή ελάχιστη); Σύμφωνα με την (8.25), η πίεση P είναι μέγιστη εκεί όπου η ταχύτητα v είναι ελάχιστη. Αυτό όμως, κατά το νόμο συνεχείας, συμβαίνει εκεί όπου η διατομή A είναι μέγιστη:

Σε οριζόντια ροή, η πίεση είναι μέγιστη (ελάχιστη) εκεί όπου η διατομή της φλέβας είναι μέγιστη (ελάχιστη).

Έτσι, στα σημεία όπου ένας οριζόντιος σωλήνας ύδρευσης στενεύει, η πίεση του νερού ελαττώνεται.

Θεωρούμε τώρα έναν οριζόντιο σωλήνα μεταβλητής διατομής A και δύο σημεία του, 1 και 2. Έστω A_1 και A_2 οι διατομές του σωλήνα στα σημεία αυτά, όπου $A_1>A_2$. Μέσα στο σωλήνα ρέει υγρό πυκνότητας ρ. Η διαφορά πιέσεων ($P_1 - P_2$) στα δύο σημεία μετρήθηκε και βρέθηκε ίση με ΔP. Ποια είναι η παροχή της οριζόντιας φλέβας ;



Καλούμε v_1 και v_2 τις ταχύτητες ροής στα δύο σημεία της φλέβας. Οι βασικές μας εξισώσεις είναι

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \text{(νόμος συνεχείας)}$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad \text{(νόμος Bernoulli)}$$

Με το νόμο συνεχείας μπορούμε να απαλείψουμε, π.χ., το v_2, γράφοντας

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \tag{8.26}$$

Αντικαθιστώντας την (8.26) στο νόμο του Bernoulli, βρίσκουμε

$$P_1 - P_2 \equiv \Delta P = \frac{\rho (A_1^2 - A_2^2)}{2A_2^2} v_1^2 \tag{8.27}$$

Παρατηρούμε ότι $P_1 > P_2$, δοθέντος ότι $A_1 > A_2$. Λύνοντας την (8.27) ως προς v_1 , και χρησιμοποιώντας την (8.26) για το v_2 , έχουμε

$$v_1 = A_2 \left[\frac{2\Delta P}{\rho (A_1^2 - A_2^2)} \right]^{1/2}, \qquad v_2 = A_1 \left[\frac{2\Delta P}{\rho (A_1^2 - A_2^2)} \right]^{1/2} \tag{8.28}$$

Η παροχή της φλέβας είναι

$$\Pi = A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_1 A_2 \left[\frac{2\Delta P}{\rho (A_1^2 - A_2^2)} \right]^{1/2} \tag{8.29}$$

ΤΕΛΟΣ

Κ. Ι. ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ

ΕΠΙΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

ΑΤΟΜΑ, ΜΟΡΙΑ, ΚΡΥΣΤΑΛΛΟΙ

1.1 Καταστάσεις της Ύλης

Έχει παρατηρηθεί ότι οι περισσότερες φυσικές ουσίες μπορούν, ανάλογα με τη θερμοκρασία, να βρεθούν σε κάθε μια από τις τρεις καταστάσεις της ύλης: στερεά, υγρή, ή αέρια. Ποιοι φυσικοί παράγοντες ευθύνονται για την κατάσταση στην οποία βρίσκεται μια ουσία;

Η φυσική κατάσταση μιας ουσίας είναι προϊόν «ανταγωνισμού» ανάμεσα σε δύο αντίθετους παράγοντες: (α) Μιας *ελκτικής* (ή *ενωτικής*) δύναμης, ηλεκτρομαγνητικής προέλευσης, ανάμεσα στα άτομα (ή μόρια, ή ιόντα) η οποία έχει την τάση να φέρνει τα άτομα όσο γίνεται πιο κοντά το ένα στο άλλο. Αυτό επιτυγχάνεται καλλίτερα όταν τα άτομα βρίσκονται σε κάποιας μορφής κανονική διάταξη, όπως συμβαίνει σε ένα *κρυσταλλικό πλέγμα.* (β) Της θερμικής ενέργειας, η οποία προκαλεί *τυχαία* κίνηση των ατόμων. Η άτακτη αυτή κίνηση γίνεται πιο έντονη με την αύξηση της θερμοκρασίας. Οι δύο παραπάνω παράγοντες δρουν αντίθετα ο ένας προς τον άλλον.

Ας θεωρήσουμε μια ουσία που βρίσκεται αρχικά στη *στερεά* κατάσταση. Στην κατάσταση αυτή κυριαρχούν οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των ατόμων, οι οποίες τείνουν να συσπειρώσουν τα άτομα σε μια κανονική διάταξη που ονομάζεται *κρύσταλλος*. Η θερμική ενέργεια δεν είναι ικανή να αντιτεθεί στις ισχυρές δυνάμεις που συγκρατούν τα άτομα σε σταθερές σχετικές θέσεις μέσα στην κρυσταλλική δομή: το μόνο που επιτυγχάνει είναι να θέσει τα άτομα σε *ταλάντωση* γύρω από τις σταθερές αυτές θέσεις.

Καθώς η θερμοκρασία αυξάνει, το πλάτος ταλάντωσης των ατόμων γίνεται όλο και μεγαλύτερο, ώσπου κάποια στιγμή οι ελκτικές δυνάμεις μεταξύ των ατόμων δεν είναι πια αρκετά ισχυρές για να συγκρατήσουν τα άτομα στις θέσεις που κατείχαν μέσα στον κρύσταλλο. Στη θερμοκρασία αυτή (*σημείο τήξης*) η κρυσταλλική δομή διασπάται και το στερεό *τήκεται* (λιώνει) και μετατρέπεται σε *υγρό*. Στην κατάσταση αυτή υπάρχει ισοδυναμία ανάμεσα στις δύο αντίθετες τάσεις, δηλαδή, τις ελκτικές ατομικές δυνάμεις και τη θερμική κίνηση.[1]

Με την περαιτέρω αύξηση της θερμοκρασίας η θερμική κίνηση των ατόμων αρχίζει να γίνεται κυρίαρχη στο παιχνίδι του ανταγωνισμού. Όταν η θερμοκρασία φτάσει στο *σημείο βρασμού*, οι ενέργειες των ατόμων γίνονται τόσο μεγάλες ώστε αυτά κατορθώνουν τελικά να «αποδράσουν» από το υγρό και να σχηματίσουν ένα *αέριο*. Στην κατάσταση αυτή οι ελκτικές ατομικές δυνάμεις είναι πολύ ασθενείς (σε ένα *ιδανικό* αέριο θεωρούνται αμελητέες). Παρατηρούμε ότι τα σημεία τήξης και βρασμού μιας ουσίας σχετίζονται άμεσα με την ισχύ των (ηλεκτρομαγνητικής φύσης) δεσμών μεταξύ των ατόμων της ουσίας αυτής.

[1] Το διαμάντι αποτελεί αξιοσημείωτη εξαίρεση: το σημείο τήξης του είναι, θεωρητικά, στους 5000 K, αλλά δεν το φτάνει ποτέ, αφού μετατρέπεται σε γραφίτη στους 3400 K !

1.2 Κρυσταλλικά και Άμορφα Στερεά

Είδαμε προηγουμένως ότι η κρυσταλλική δομή, που χαρακτηρίζεται από κανονικότητα στη διάταξη των ατόμων, εξασφαλίζει τη μέγιστη σταθερότητα στη στερεά κατάσταση μιας ουσίας. Στη φύση όμως συναντούμε και υλικά που *μοιάζουν* με στερεά (π.χ., είναι σκληρά και έχουν σταθερό σχήμα) χωρίς εν τούτοις να διαθέτουν πραγματική κρυσταλλική δομή. Τέτοια στερεά ονομάζονται *άμορφα* και η ατομική δομή τους είναι παρόμοια με αυτή των υγρών: τα άτομα βρίσκονται σε τυχαίες θέσεις, σε αντίθεση με την κανονική διάταξη των ατόμων στα κρυσταλλικά στερεά. Μπορούμε, δηλαδή, να φανταστούμε ένα άμορφο στερεό σαν υγρό με τεράστιο ιξώδες! Στην κατηγορία αυτή ανήκει το συνηθισμένο γυαλί (αν ακούσετε την κυρία Χ. να καυχιέται για τα πανάκριβα κρυστάλλινα ποτήρια που αγόρασε, μην ξεγελαστείτε: η καθημερινή χρήση του όρου «κρύσταλλο» δεν έχει την ίδια σημασία με αυτή που δίνουμε εδώ στον όρο αυτό!).

Ας επιστρέψουμε, όμως, στους πραγματικούς κρυστάλλους. Πού οφείλεται η τόσο μεγάλη ευστάθεια της κρυσταλλικής δομής; Ας θυμηθούμε ένα πολύ απλούστερο παράδειγμα, αυτό ενός εκκρεμούς. Ευσταθής ισορροπία της σφαίρας του εκκρεμούς επιτυγχάνεται όταν η σφαίρα βρίσκεται ακίνητη στο χαμηλότερο δυνατό σημείο της τροχιάς της (όταν, δηλαδή, το νήμα είναι κατακόρυφο). Στη θέση αυτή η δυναμική ενέργεια της σφαίρας λόγω του πεδίου βαρύτητας γίνεται *ελάχιστη*. Κατ' αναλογία, η εσωτερική δυναμική ενέργεια ορισμένων στερεών ελαχιστοποιείται όταν τα άτομά τους τοποθετούνται έτσι ώστε να σχηματίσουν μια κανονική, κρυσταλλική δομή. Αυτό εξασφαλίζει και τη μέγιστη ευστάθεια των στερεών αυτών. Από την άλλη μεριά, κάποια άλλα στερεά είναι άμορφα διότι, λόγω αυξημένων εσωτερικών τριβών στη φάση της στερεοποίησης, τα άτομά τους δεν μπορούν να μετακινηθούν στις κατάλληλες θέσεις ώστε να σχηματίσουν κρυστάλλους. Σημειώνουμε επίσης ότι η μετάβαση ενός κρυσταλλικού στερεού από τη στερεά στην υγρή κατάσταση γίνεται απότομα όταν η θερμοκρασία φτάσει στο σημείο τήξης. Αντίθετα, η υγροποίηση ενός άμορφου στερεού γίνεται *βαθμιαία*, έτσι ώστε να μην είναι δυνατό να προσδιοριστεί σαφές σημείο τήξης.

Ορισμένα κρυσταλλικά στερεά, όπως τα μέταλλα, εμφανίζουν αυξημένη ηλεκτρική αγωγιμότητα. Αυτό οφείλεται στο ότι διαθέτουν στο εσωτερικό τους ελεύθερους ηλεκτρικούς φορείς (ηλεκτρόνια, στην περίπτωση των μετάλλων) οι οποίοι μπορούν να κινηθούν προσανατολισμένα κάτω από την επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου. Στο άλλο άκρο, υπάρχουν στερεά που δεν διαθέτουν τέτοιους φορείς κι έτσι συμπεριφέρονται σαν ηλεκτρικοί *μονωτές*. Υπάρχουν, βέβαια, και «διπλοί πράκτορες», οι *ημιαγωγοί*, οι οποίοι φέρουν χαρακτηριστικά και από τις δύο παραπάνω κατηγορίες και, υπό κανονικές συνθήκες, εμφανίζουν αγωγιμότητα που όμως είναι μικρότερη από αυτή των μετάλλων.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα των στερεών [2] είναι η *θερμική* τους αγωγιμότητα. Η διάδοση της θερμότητας στα στερεά γίνεται με δύο τρόπους: (α) ταλαντώσεις του κρυσταλλικού πλέγματος (σε όλα τα στερεά), και (β) μετακίνηση ελεύθερων ηλεκτρονίων (στα μέταλλα). Η εξαιρετική θερμική αγωγιμότητα των μετάλλων οφείλεται στην ταυτόχρονη δράση και των δύο αυτών μηχανισμών.

[2] Στο εξής, με τον όρο «στερεό» θα εννοούμε «κρυσταλλικό στερεό».

Τα στερεά μπορούν να ταξινομηθούν με βάση το είδος του δεσμού που συγκρατεί τα άτομα (ή μόρια, ή ιόντα) του κρυσταλλικού πλέγματος. Οι βασικότερες κατηγορίες στερεών που παρατηρούνται είναι οι εξής:

1) *Ομοιοπολικά στερεά*. Τα άτομα συγκρατούνται μεταξύ τους με ομοιοπολικούς δεσμούς. Τέτοια στερεά είναι οι κρύσταλλοι του διαμαντιού, του πυριτίου και του γερμανίου. Λόγω της πολύ σταθερής ηλεκτρονικής δομής τους, τα στερεά αυτά εμφανίζουν διάφορα κοινά χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, είναι εξαιρετικά σκληρά και παραμορφώνονται δύσκολα. Επίσης, είναι κακοί αγωγοί της θερμότητας[3] και του ηλεκτρισμού (διότι δεν διαθέτουν σημαντικό αριθμό ελεύθερων ηλεκτρονίων, τα οποία θα μπορούσαν να μεταφέρουν ενέργεια ή ηλεκτρικό φορτίο από σημείο σε σημείο).

2) *Ιοντικά στερεά*. Δομούνται με κανονική διάταξη θετικών και αρνητικών ιόντων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι κρύσταλλοι του χλωριούχου νατρίου (NaCl) οι οποίοι αποτελούνται από ιόντα Na^+ και Cl^-. Λόγω της απουσίας ελεύθερων ηλεκτρονίων, τα στερεά αυτά είναι κακοί αγωγοί της θερμότητας και του ηλεκτρισμού. Επίσης, είναι σκληρά και έχουν υψηλό σημείο τήξης εξαιτίας των ισχυρών ηλεκτροστατικών δυνάμεων ανάμεσα στα ιόντα.

3) *Στερεά δεσμού υδρογόνου*. Χαρακτηρίζονται από την παρουσία ισχυρά διπολικών μορίων τα οποία περιέχουν ένα ή περισσότερα άτομα υδρογόνου. Τέτοιο στερεό είναι ο πάγος (H_2O).

4) *Μοριακά στερεά*. Αποτελούνται από μόρια που δεν είναι πολικά. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε τη στερεά μορφή τού CO_2 .

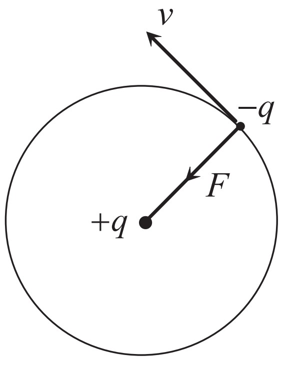
5) *Μέταλλα*. Αποτελούνται από άτομα με μικρή ενέργεια ιονισμού και μικρό αριθμό ηλεκτρονίων στην εξωτερική τους στοιβάδα. Τα ηλεκτρόνια αυτά απελευθερώνονται εύκολα από τα άτομα στα οποία ανήκουν, χρησιμοποιώντας μέρος της ενέργειας που εκλύεται κατά το σχηματισμό του κρυστάλλου. Το μεταλλικό πλέγμα, λοιπόν, αποτελείται από μια κανονική διάταξη *θετικών ιόντων*, ανάμεσα στα οποία κινείται ένα «σμήνος» *ελεύθερων ηλεκτρονίων*. Στα ηλεκτρόνια αυτά οφείλουν τα μέταλλα την ηλεκτρική τους αγωγιμότητα καθώς και ένα σημαντικό μέρος της θερμικής τους αγωγιμότητας (ένα άλλο μέρος οφείλεται στις ταλαντώσεις των ιόντων του κρυσταλλικού πλέγματος). Στα ελεύθερα ηλεκτρόνια επίσης οφείλεται η συνεκτικότητα της μεταλλικής κρυσταλλικής δομής, αφού χωρίς αυτά οι απωστικές δυνάμεις μεταξύ των θετικών ιόντων θα αποσυνέθεταν τον κρύσταλλο! Θα μπορούσαμε να πούμε, δηλαδή, ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια είναι η «κόλλα» που συγκρατεί τα ιόντα στις θέσεις τους στο μεταλλικό πλέγμα.

Πριν συνεχίσουμε τη μελέτη των κρυσταλλικών στερεών, θα ήταν χρήσιμο να εξοικειωθούμε με κάποιες βασικές έννοιες από την Κβαντική Φυσική καθώς και με τη δομή κάποιων απλούστερων κβαντικών συστημάτων: των ατόμων και των μορίων.

[3] Το διαμάντι αποτελεί εξαίρεση, αφού η *θερμική* αγωγιμότητά του ξεπερνά ακόμα και αυτή των μετάλλων σε συνήθεις θερμοκρασίες! Φυσικά, η αγωγιμότητα αυτή οφείλεται αποκλειστικά σε ταλαντώσεις του κρυσταλλικού πλέγματος.

1.3 Ατομικό Μοντέλο του Rutherford

Το πρώτο σύγχρονο ατομικό μοντέλο προτάθηκε από τον Rutherford το 1911. Ας πάρουμε το απλούστερο δυνατό άτομο, αυτό του υδρογόνου. Σύμφωνα με το μοντέλο του Rutherford, το μοναδικό ηλεκτρόνιο του ατόμου κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον πυρήνα (πρωτόνιο) με ταχύτητα σταθερού μέτρου *v*. Επειδή το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, η ολική δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο θα πρέπει να είναι εξ ολοκλήρου κεντρομόλος. Η δύναμη αυτή δεν είναι άλλη από την ελκτική δύναμη Coulomb ανάμεσα στο πρωτόνιο και το ηλεκτρόνιο (το βάρος του ηλεκτρονίου το θεωρούμε αμελητέο). Καλούμε *m* τη μάζα του ηλεκτρονίου και *q* την *απόλυτη* τιμή του φορτίου του, ίση με $1.6\times10^{-19}C$. Έτσι, το πρωτόνιο έχει φορτίο $+q$ ενώ το φορτίο του ηλεκτρονίου είναι $-q$.



Η δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο είναι

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}\right)^{1/2} \tag{1.1}$$

όπου *r* η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

ενώ η δυναμική του ενέργεια, λόγω του πεδίου Coulomb του πρωτονίου, είναι

$$E_p = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

όπου διαλέξαμε τη μηδενική στάθμη της δυναμικής ενέργειας σε άπειρη απόσταση από τον πυρήνα $(r=\infty)$. Η ολική μηχανική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι

$$E = E_k + E_p = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \tag{1.2}$$

Παρατηρούμε ότι $E \to 0$ καθώς $r \to \infty$. Το αρνητικό πρόσημο της ενέργειας οφείλεται στην επιλογή της μηδενικής στάθμης τής E_p στο άπειρο και δεν έχει καμία ιδιαίτερη φυσική σημασία. Σημειώνουμε, γενικά, ότι στην Ατομική Φυσική αυτό που έχει φυσική σημασία είναι οι *διαφορές* ενέργειας ΔE και όχι οι ενέργειες *E* καθαυτές. Η ποσότητα ΔE είναι ανεξάρτητη από την εκλογή της μηδενικής στάθμης της δυναμικής ενέργειας.

Η γωνιακή ταχύτητα ω του ηλεκτρονίου είναι συνάρτηση της ολικής ενέργειας E. Πράγματι, συνδυάζοντας την έκφραση (1.1) για το v με τη σχέση $v=\omega r$, βρίσκουμε ότι

$$r=\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m\omega^2}\right)^{1/3}$$

Δηλαδή, το r είναι ανάλογο του $\omega^{-2/3}$. Άρα, βάσει της (1.2), το E είναι ανάλογο του $\omega^{2/3}$, ή, το ω είναι ανάλογο του $|E|^{3/2}$.

Το «πλανητικό» αυτό μοντέλο του ατόμου, αν και ευσταθεί μηχανικά, παρουσιάζει σοβαρά προβλήματα αν λάβει κανείς υπόψη τους νόμους του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού. Σύμφωνα με αυτούς, κάθε επιταχυνόμενο φορτίο εκπέμπει ενέργεια στη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Αν το φορτίο εκτελεί ταλαντώσεις ή, γενικά, περιοδική κίνηση κυκλικής συχνότητας $\omega=2\pi f$ (όπου f η συχνότητα της περιοδικής κίνησης), η εκπεμπόμενη ακτινοβολία θα χαρακτηρίζεται επίσης από την ίδια συχνότητα. Στην περίπτωσή μας, η κυκλική συχνότητα της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από το ηλεκτρόνιο θα είναι ίση με τη γωνιακή ταχύτητα ω της περιστροφής του (προσέξτε ότι $\omega=2\pi/T=2\pi f$, όπου T η περίοδος της κίνησης). Όμως, αν το ηλεκτρόνιο εκπέμπει ενέργεια, η ολική του ενέργεια E θα πρέπει να μειώνεται συνεχώς, με παράλληλη μείωση και της ακτίνας r της τροχιάς, βάσει της (1.2). Έτσι, το ηλεκτρόνιο θα πέσει τελικά μέσα στον πυρήνα και το άτομο θα καταρρεύσει (όπως έχει υπολογιστεί, ο χρόνος που θα χρειαζόταν για κάτι τέτοιο θα ήταν της τάξης των $10^{-8}s$!). Ευτυχώς κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στ' αλήθεια, αφού τα άτομα είναι ευσταθή. Επίσης, κατά τη συνεχή μεταβολή της ενέργειας E η συχνότητα ω της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας θα πρέπει κι αυτή να μεταβάλλεται κατά τρόπο συνεχή, αφού, όπως δείξαμε παραπάνω, το E είναι μια συνεχής συνάρτηση του ω. Έτσι, το *φάσμα εκπομπής* του υδρογόνου θα πρέπει να εμφανίζει μια συνεχή κατανομή συχνοτήτων. Στην πραγματικότητα, όμως, το φάσμα του υδρογόνου, όπως και των άλλων ατόμων, είναι *γραμμικό*, δηλαδή περιέχει ορισμένες μόνο συχνότητες χαρακτηριστικές του ατόμου που εκπέμπει την ακτινοβολία.

Το μοντέλο του Rutherford, λοιπόν, ήταν ένα πρώτο, τολμηρό βήμα στην ατομική θεωρία, έπασχε όμως από σοβαρά θεωρητικά προβλήματα. Ο κύριος λόγος της αποτυχίας του ήταν ότι αντιμετώπισε ένα σωμάτιο του μικρόκοσμου, το ηλεκτρόνιο, σαν κοινό κλασικό σωματίδιο που υπακούει στους νόμους του Νεύτωνα, αγνοώντας την κβαντική φύση του. Θα έπρεπε, άραγε, να εγκαταλειφθεί το μοντέλο οριστικά, ή μήπως υπήρχαν περιθώρια «θεραπείας» του; Το 1913 ένας νεαρός που δούλευε στο εργαστήριο του Rutherford διάλεξε τη δεύτερη λύση.

1.4 Μοντέλο του Bohr για το Άτομο του Υδρογόνου

Για να ξεπεράσει τις θεωρητικές δυσκολίες που προέκυψαν με το μοντέλο του Rutherford, ο Bohr πρότεινε τις παρακάτω αρχές για το άτομο του υδρογόνου:

1. Το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται σε καθορισμένες μόνο κυκλικές τροχιές γύρω από τον πυρήνα, με ακτίνες r_1, r_2, r_3, ..., και αντίστοιχες ενέργειες E_1, E_2, E_3, ... Στις τροχιές αυτές το ηλεκτρόνιο *δεν* εκπέμπει ακτινοβολία.

2. Όταν το ηλεκτρόνιο μεταπίπτει από μια τροχιά ενέργειας E σε μια άλλη τροχιά μικρότερης ενέργειας E', το άτομο εκπέμπει ακτινοβολία με τη μορφή *ενός* φωτονίου, συχνότητας

$$f = \frac{E - E'}{h} \tag{1.3}$$

όπου h η σταθερά του Planck, ίση με $6.63 \times 10^{-34} J \cdot s$.

3. Οι επιτρεπόμενες τροχιές και ενέργειες καθορίζονται από τη συνθήκη ότι, η στροφορμή του ηλεκτρονίου μπορεί να πάρει ένα άπειρο πλήθος από διακριτές τιμές που δίνονται από τη σχέση

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \ , \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{1.4}$$

> *Η ιδιότητα τόσο της ενέργειας, όσο και της στροφορμής, να παίρνουν συγκεκριμένες μόνο τιμές (αντί για τις αυθαίρετες τιμές που θα επέτρεπε η κλασική μηχανική) ονομάζεται* ***κβαντισμός*** *της ενέργειας και της στροφορμής, αντίστοιχα.*

Θα υπολογίσουμε τώρα τις επιτρεπόμενες τροχιές r_n και τις αντίστοιχες ενέργειες E_n (n=1,2,3,...). Από την (1.4) έχουμε ότι $v=nh/2\pi mr$. Συγκρίνοντας αυτή την έκφραση για το v με εκείνη της σχέσης (1.1), βρίσκουμε ότι

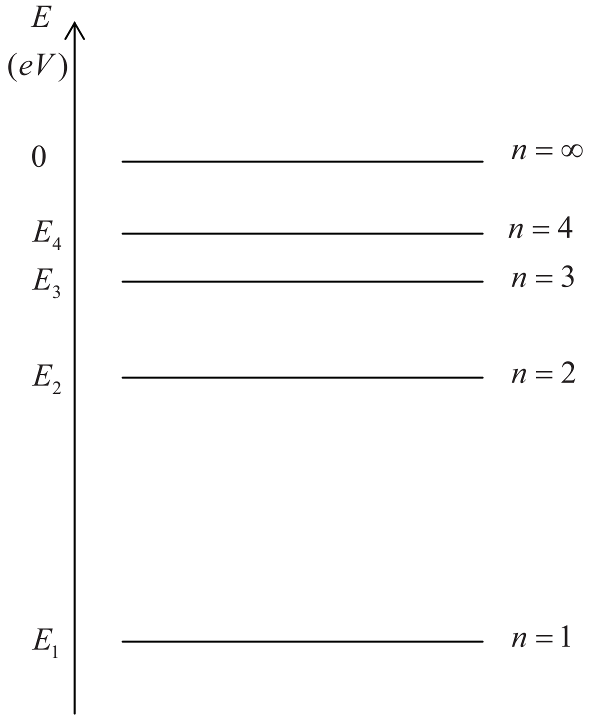
$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi q^2 m} n^2 \equiv a_0 n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1.5}$$

Ειδικά, η μικρότερη επιτρεπτή τροχιά έχει ακτίνα $r_1=a_0$ (*ακτίνα Bohr*). Αντικαθιστώντας την (1.5) στην (1.2) βρίσκουμε τις επιτρεπτές (κβαντισμένες) τιμές της ενέργειας του ηλεκτρονίου:

$$E_n = -\frac{mq^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \equiv -\frac{\kappa}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1.6}$$

Παρατηρούμε ότι $E_n \to 0$ για $n \to \infty$ (άρα και $r \to \infty$). Στο όριο αυτό, το ηλεκτρόνιο αποδεσμεύεται από το άτομο και κινείται πλέον σαν ελεύθερο σωμάτιο (βρείτε τις επιτρεπτές τιμές F_n της δύναμης Coulomb που ασκείται στο ηλεκτρόνιο και δείξτε ότι $F_n \to 0$ όταν $n \to \infty$). Η ενέργεια $E_\infty - E_1 = |E_1| = \kappa$ καλείται *ενέργεια ιονισμού* του ατόμου του υδρογόνου. Από φυσική άποψη, η ενέργεια ιονισμού είναι η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να δώσουμε στο ηλεκτρόνιο για να το αποσπάσουμε από το άτομο. Προσέξτε ότι, από τη στιγμή που το ηλεκτρόνιο είναι ελεύθερο να κινείται οπουδήποτε στο χώρο, μπορεί πλέον να έχει *οποιαδήποτε* ενέργεια! Δηλαδή, *ο κβαντισμός της ενέργειας δεν ισχύει για τα ελεύθερα κινούμενα ηλεκτρόνια αλλά μόνο γι' αυτά που βρίσκονται περιορισμένα μέσα σε ένα άτομο, μόριο, κρύσταλλο, κλπ.* Μη λέτε ποτέ, λοιπόν, γενικά και αόριστα ότι «η ενέργεια είναι κβαντισμένη»!

Μια χρήσιμη κβαντική έννοια που θα τη συναντούμε συχνά είναι αυτή μιας ενεργειακής στάθμης. Καταρχήν, χαράζουμε έναν κατακόρυφο άξονα με θετική φορά προς τα πάνω και συμφωνούμε ότι τα σημεία του θα παριστούν τιμές της ενέργειας σε μονάδες eV ($1eV=1.6\times 10^{-19}\ J$). Για οποιαδήποτε τιμή E της ενέργειας μπορούμε να χαράξουμε μια οριζόντια γραμμή (*ενεργειακή στάθμη*) η οποία να τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο που αντιστοιχεί στην τιμή αυτή. Ειδικά, οι επιτρεπτές *ατομικές ενεργειακές στάθμες* για το ηλεκτρόνιο του ατόμου του υδρογόνου σχεδιάζονται με βάση τη σχέση (1.6). Από ενεργειακή άποψη, το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί σε *οποιαδήποτε* από αυτές τις στάθμες, *όχι όμως ενδιάμεσα*:



Η στάθμη E_1 λέγεται *βασική* ή *θεμελιώδης*, ενώ οι E_2, E_3, ..., καλούνται *διηγερμένες* στάθμες. Παρατηρούμε ότι οι στάθμες πυκνώνουν καθώς η ενέργεια αυξάνει (αυτό μπορούμε να το εξηγήσουμε υπολογίζοντας τη διαφορά $\Delta E_n=E_{n+1} - E_n$ από την (1.6) και παρατηρώντας ότι το ΔE_n φθίνει καθώς το n αυξάνει).

Εκτός από την ευστάθεια του ατόμου του υδρογόνου, το μοντέλο του Bohr μπορεί να εξηγήσει και τη γραμμικότητα του φάσματος εκπομπής και απορρόφησης του ατόμου, το γεγονός δηλαδή ότι το άτομο εκπέμπει και απορροφά ορισμένες μόνο συχνότητες ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Όπως είδαμε, το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρίσκεται σε καθορισμένες κυκλικές τροχιές γύρω από τον πυρήνα, με ακτίνες r_1, r_2, r_3, ..., και αντίστοιχες ενέργειες E_1, E_2, E_3, ... Ας υποθέσουμε τώρα ότι το ηλεκτρόνιο μετακινείται από μια τροχιά r_a *απευθείας* σε μια άλλη τροχιά r_b , όπου $a\neq b$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: (α) Αν $a>b$, τότε, βάσει της (1.6), $E_a>E_b$. Το ηλεκτρόνιο *μεταπίπτει* σε τροχιά μικρότερης ενέργειας με ταυτόχρονη εκπομπή *ενός* φωτονίου. (β) Αν $a<b$, τότε $E_a<E_b$. Το ηλεκτρόνιο *απορροφά* ένα φωτόνιο και *διεγείρεται* σε τροχιά μεγαλύτερης ενέργειας. Σε κάθε περίπτωση, η συχνότητα του εκπεμπόμενου ή απορροφούμενου φωτονίου είναι

$$f=\frac{|E_a-E_b|}{h}=\frac{\kappa}{h}\left|\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right| \tag{1.7}$$

Το μήκος κύματος της εκπεμπόμενης ή απορροφούμενης ακτινοβολίας δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{f}{c}=\frac{\kappa}{hc}\left|\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right| \tag{1.8}$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός. Η γραμμικότητα του φάσματος του ατόμου του υδρογόνου προκύπτει από την παρατήρηση ότι τόσο το f, όσο και το λ, παίρνουν διακριτές και όχι αυθαίρετες τιμές. Αυτό, με τη σειρά του, είναι συνέπεια του κβαντισμού της ενέργειας και της στροφορμής του ηλεκτρονίου.

1.5 Άτομα με Πολλά Ηλεκτρόνια

Αν και επιτυχημένο για το υδρογόνο, το μοντέλο του Bohr δεν επαρκεί για να εξηγήσει τη δομή ατόμων με δύο ή περισσότερα ηλεκτρόνια. Η μελέτη τέτοιων ατόμων γίνεται με τη βοήθεια της Κβαντομηχανικής, μιας αρκετά πολύπλοκης, από μαθηματική άποψη, θεωρίας. Στη θεωρία αυτή, φυσικές έννοιες όπως η θέση ή η τροχιά ενός ηλεκτρονίου δεν έχουν νόημα αφού είναι αδύνατο, λόγω της «αρχής της αβεβαιότητας», να προσδιοριστούν επακριβώς σε ένα πείραμα. Άλλα φυσικά μεγέθη, όπως η ενέργεια και η στροφορμή ενός ηλεκτρονίου, μπορούν να λαμβάνουν μόνο διακεκριμένες τιμές, είναι δηλαδή *κβαντισμένα* μεγέθη. Οι τιμές αυτές προσδιορίζονται με τη βοήθεια παραμέτρων που ονομάζονται *κβαντικοί αριθμοί*. Το σύνολο των κβαντικών αριθμών που μπορούν να προσδιοριστούν κατά την πειραματική παρατήρηση ενός ηλεκτρονίου αντιπροσωπεύει μια *κατάσταση* του ηλεκτρονίου. Κατά μία έννοια, κατάσταση ενός ηλεκτρονίου είναι η μέγιστη πληροφορία που μπορούμε να αποκομίσουμε για το ηλεκτρόνιο μέσα στα πλαίσια της αρχής της αβεβαιότητας. Χαρακτηρίζεται από καθορισμένες (κβαντισμένες) τιμές φυσικών μεγεθών όπως η ενέργεια και η στροφορμή. (Από μαθηματική άποψη, η κατάσταση ενός ηλεκτρονίου εκφράζεται στη μορφή μιας «κυματοσυνάρτησης» η οποία αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης του Schrodinger. Η συνάρτηση αυτή περιέχει ένα σύνολο παραμέτρων που δεν είναι άλλες από τους κβαντικούς αριθμούς που προαναφέραμε. Το πλήθος και οι δυνατές τιμές των κβαντικών αριθμών ποικίλλουν, ανάλογα με το φυσικό σύστημα στο οποίο ανήκει το ηλεκτρόνιο.)

Η κατάσταση ενός ηλεκτρονίου σε ένα άτομο προσδιορίζεται με τη βοήθεια τεσσάρων κβαντικών αριθμών (n, l, m_l, m_s) οι οποίοι μπορούν να πάρουν τις παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned}
&n = 1, 2, 3, \ldots \\
&l = 0, 1, 2, \ldots, (n-1) && \text{(για δοσμένο } n\text{)} \\
&m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l && \text{(για δοσμένο } l\text{)} \\
&m_s = \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Το l καθορίζει το μέτρο της στροφορμής $\vec{L}$ του ηλεκτρονίου, το m_l τη διεύθυνση της στροφορμής (για την ακρίβεια, την προβολή τής $\vec{L}$ στον άξονα z), το m_s τη διεύθυνση (την προβολή) της ιδιοστροφορμής (spin), ενώ τα (n, l) προσδιορίζουν την ενέργεια του ηλεκτρονίου. Αναλυτικά:

$$|\vec{L}|=\sqrt{l(l+1)}\,\hbar\ , \qquad L_z = m_l\,\hbar \qquad \left(\hbar=\frac{h}{2\pi}\right)$$

$$S_z = m_s\,\hbar = \pm\frac{\hbar}{2}\ , \qquad E = E(n,l)$$

Σύμφωνα με την *απαγορευτική αρχή του Pauli*,

> ***σε ένα άτομο (ή μόριο, κρύσταλλο, κλπ.) δεν μπορεί να υπάρχουν δύο ή περισσότερα ηλεκτρόνια που να βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση (να έχουν όλους τους κβαντικούς αριθμούς ίδιους).***

Έτσι, για παράδειγμα, αν δύο ηλεκτρόνια ενός ατόμου έχουν τις ίδιες τιμές των n, l και m_l, τότε υποχρεωτικά θα έχουν διαφορετικά m_s (+ ½ και – ½). Λόγω της αρχής αυτής δεν επιτρέπεται στο σύνολο των ηλεκτρονίων του ατόμου να καταλαμβάνουν τη χαμηλότερη δυνατή ενεργειακή στάθμη, αφού η στάθμη αυτή δεν διαθέτει ικανό αριθμό καταστάσεων για να «χωρέσει» όλα τα ηλεκτρόνια.[4]

Οι καταστάσεις που έχουν την ίδια τιμή τού n (αλλά διαφορετικούς συνδυασμούς των l, m_l, m_s) αποτελούν μια *στοιβάδα*. Για n=1,2,3,4,..., οι στοιβάδες συμβολίζονται με K, L, M, N,..., αντίστοιχα. Οι καταστάσεις της στοιβάδας n που έχουν την ίδια τιμή τού l (αλλά διαφορετικούς συνδυασμούς των m_l, m_s) αποτελούν την *υποστοιβάδα* (n,l). Για l=0,1,2,3,..., οι υποστοιβάδες ονομάζονται s, p, d, f,..., αντίστοιχα. Για δοσμένη τιμή τού n, υπάρχουν n διάφορες τιμές τού l: 0,1,2,...,(n-1). Έτσι, η στοιβάδα n υποδιαιρείται σε n υποστοιβάδες.

Η υποστοιβάδα που αντιστοιχεί στο ζεύγος (n, l) παρίσταται με την τιμή τού n ακολουθούμενη από το σύμβολο που αντιστοιχεί στην τιμή τού l. Έτσι, π.χ., η υποστοιβάδα με (n, l)=(2,1) γράφεται 2p. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που βρίσκονται σε μια υποστοιβάδα δηλώνεται με ένα δείκτη που τοποθετείται πάνω δεξιά από το σύμβολο της υποστοιβάδας. Για παράδειγμα, $2p^2$ σημαίνει ότι η 2p έχει 2 ηλεκτρόνια.

Στοιβάδες (n)	Υποστοιβάδες (n, l)	
n=1	l=0	=> 1s
n=2	l=0,1	=> 2s, 2p
n=3	l=0,1,2	=> 3s, 3p, 3d
n=4	l=0,1,2,3	=> 4s, 4p, 4d, 4f

Οι *χωρητικότητες* των υποστοιβάδων σε ηλεκτρόνια βρίσκονται με τη βοήθεια της απαγορευτικής αρχής του Pauli, ως εξής: Αφού τα ηλεκτρόνια μιας υποστοιβάδας έχουν το ίδιο l (και, φυσικά, το ίδιο n), θα πρέπει να έχουν διάφορους συνδυασμούς των m_l και m_s. Θέλουμε να βρούμε τον αριθμό των διαφορετικών ζευγών (m_l, m_s) που αντιστοιχούν σε δοσμένο l. Για μια δοσμένη τιμή τού l, το m_l μπορεί να πάρει (2l+1) διαφορετικές τιμές: $0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l$. Σε κάθε μια από αυτές αντιστοιχούν δύο τιμές τού m_s (+ ½ και – ½) . Έτσι έχουμε συνολικά 2(2l+1) διαφορετικά ζεύγη τιμών (m_l, m_s) για το δοσμένο l. Σύμφωνα με την απαγορευτική αρχή του Pauli, λοιπόν, *η υποστοιβάδα l χωράει το πολύ* 2(2 l+1) *ηλεκτρόνια.* Αναλυτικά:

[4] Εξαίρεση αποτελούν το υδρογόνο (H, 1) και το ήλιο (He, 2).

s => l=0 => 2 ηλεκτρόνια

p => l=1 => 6 ηλεκτρόνια

d => l=2 => 10 ηλεκτρόνια

f => l=3 => 14 ηλεκτρόνια

κλπ. Τώρα, η στοιβάδα K (n=1) έχει μόνο την υποστοιβάδα s, άρα χωράει 2 ηλεκτρόνια. Η στοιβάδα L (n=2) έχει τις s και p, άρα χωράει 2+6=8 ηλεκτρόνια. Η στοιβάδα M (n=3) έχει τις s, p, d, άρα χωράει 2+6+10=18 ηλεκτρόνια, κλπ. Σε κάθε περίπτωση, όμως, *η τελευταία (εξωτερική) στοιβάδα του ατόμου δεν μπορεί να έχει περισσότερα από 8 ηλεκτρόνια.*

Δοθέντος ενός ατόμου με ατομικό αριθμό Z, τα Z ηλεκτρόνιά του τοποθετούνται στις διάφορες υποστοιβάδες με καθορισμένη σειρά, ξεκινώντας από την 1s και συνεχίζοντας με τις 2s, 2p, 3s, 3p, κλπ. Η ηλεκτρονική διάταξη ενός ατόμου (με κάποιες μικρές αποκλίσεις για ορισμένα άτομα, όπως π.χ. τα στοιχεία μεταπτώσεως) παρίσταται με βάση το ακόλουθο γενικό σχήμα (ο δείκτης πάνω δεξιά από το σύμβολο μιας υποστοιβάδας δηλώνει τον αριθμό των ηλεκτρονίων που περιέχονται στην υποστοιβάδα):

$$1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^6\, 3d^{10}\, 4s^2\, 4p^6 \ldots$$

Στις περισσότερες των περιπτώσεων η τελευταία υποστοιβάδα δεν είναι συμπληρωμένη μέχρι τη μέγιστη χωρητικότητά της. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

Νάτριο (Na, 11): $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^1$

Πυρίτιο (Si, 14): $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^2$

Γερμάνιο (Ge, 32): $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^6\, 3d^{10}\, 4s^2\, 4p^2$

Νικέλιο (Ni, 28): $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, 3p^6\, 3d^8\, 4s^2$

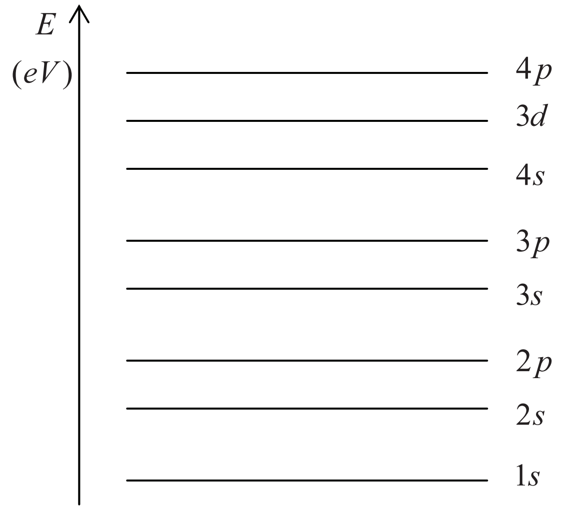
Προσέξτε ότι στο Νικέλιο η υποστοιβάδα 4s, που ανήκει στην τελευταία στοιβάδα, συμπληρώνεται *πριν* από την 3d, που ανήκει στην προηγούμενη στοιβάδα. Ποιος κανόνας θα παραβιαζόταν αν μετακινούσαμε τα δύο ηλεκτρόνια της 4s στην 3d;

Όπως αναφέραμε νωρίτερα, η ενέργεια ενός ηλεκτρονίου του ατόμου εξαρτάται από τους κβαντικούς αριθμούς (n, l). Έτσι, ηλεκτρόνια με τα ίδια (n, l) έχουν την ίδια ενέργεια. Συμπεραίνουμε ότι *ηλεκτρόνια που ανήκουν στην ίδια υποστοιβάδα έχουν την ίδια ενέργεια.*[5] Κάθε υποστοιβάδα, λοιπόν, χαρακτηρίζεται από μια τιμή της ενέργειας που είναι κοινή για όλα τα ηλεκτρόνιά της. Λέμε ότι *κάθε υποστοιβάδα αντιστοιχεί σε μια ηλεκτρονική ενεργειακή στάθμη*, και ότι τα ηλεκτρόνια της υποστοιβάδας *καταλαμβάνουν* την αντίστοιχη ενεργειακή στάθμη.

---

[5] Εξαίρεση αποτελεί το υδρογόνο, όπου η ενέργεια του μοναδικού ηλεκτρονίου του εξαρτάται μόνο από το n ($E_n = -\kappa / n^2$), έτσι είναι χαρακτηριστική ιδιότητα των *στοιβάδων* μάλλον παρά των υποστοιβάδων.

Ηλεκτρονικές ενεργειακές στάθμες



Σημειώνουμε ότι η παραπάνω διάταξη των ενεργειακών σταθμών δεν είναι απόλυτη αλλά μπορεί να εμφανίζει μικρές αποκλίσεις για ορισμένα άτομα (π.χ., η 4*s* μπορεί να βρίσκεται πάνω από την 3*d*). Προσέξτε ότι οι αποστάσεις μεταξύ των σταθμών είναι χαρακτηριστικές του κάθε ατόμου και μεταβάλλονται από άτομο σε άτομο.

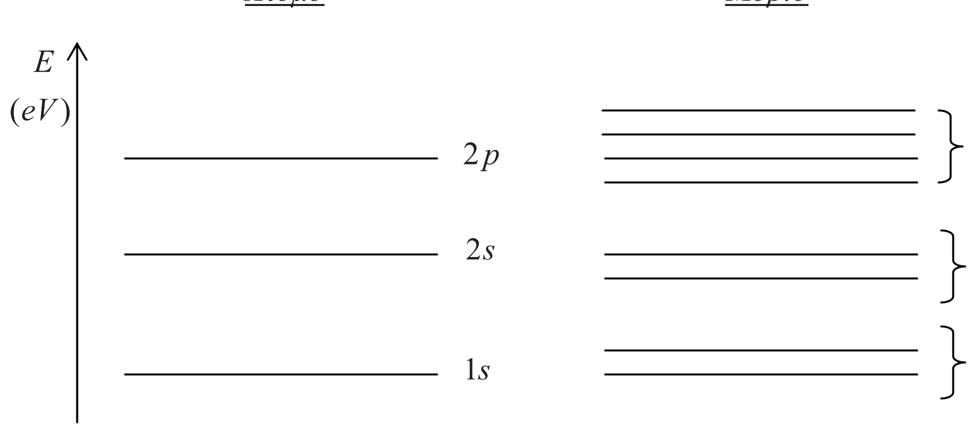
Η παραπάνω ανάλυση είναι βέβαια απλουστευμένη! Λόγω της πολυπλοκότητας των αλληλεπιδράσεων στα άτομα με πολλά ηλεκτρόνια, δεν είναι απόλυτα σωστό να μιλάμε για τις ενέργειες μεμονωμένων ηλεκτρονίων αλλά μάλλον για την (κβαντισμένη) ενέργεια *ολόκληρου* του ατόμου. Έτσι, στη θέση των ηλεκτρονικών ενεργειακών σταθμών θα έπρεπε να είχαμε χαράξει *ατομικές* ενεργειακές στάθμες. Το προσεγγιστικό μοντέλο που περιγράψαμε κάνει την υπόθεση ότι κάθε ηλεκτρόνιο του ατόμου μπορεί να κινείται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα ηλεκτρόνια μέσα στο πεδίο που αυτά δημιουργούν. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε μια μέση ενέργεια για κάθε ηλεκτρόνιο και να εκφράσουμε την ενέργεια του ατόμου σαν το άθροισμα όλων των επιμέρους ηλεκτρονικών ενεργειών. Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε «ατομικές στάθμες» ή «μοριακές στάθμες» θα εννοούμε τις *ηλεκτρονικές* ενεργειακές στάθμες των ατόμων ή των μορίων, αντίστοιχα.

1.6 Μόρια

Τα άτομα έχουν συχνά την τάση να συνενώνονται ώστε να σχηματίσουν μόρια. Αυτό δεν γίνεται με αυθαίρετο τρόπο αλλά ακολουθεί μια συγκεκριμένη λογική: Το δομικό σύστημα που προκύπτει είναι *ευσταθέστερο* σε σύγκριση με το σύστημα των μεμονωμένων ατόμων που υπήρχε πριν. Τούτο σημαίνει ότι η συνένωση είναι ενεργειακά σύμφορη, δηλαδή η δυναμική ενέργεια του νέου συστήματος (μορίου) είναι *μικρότερη* από την αντίστοιχη ενέργεια του συστήματος των μεμονωμένων ατόμων. Αυτό εξηγεί γιατί πρέπει να δαπανήσουμε ενέργεια για να διαχωρίσουμε ξανά τα άτομα ενός μορίου. (Ένα μηχανικό ανάλογο είναι το σύστημα δύο μαζών που συνδέονται μεταξύ τους με ελατήριο: Αν αγνοήσουμε τυχόν εξωτερικές δυνάμεις, το σύστημα θα βρίσκεται σε ισορροπία, άρα θα είναι ευσταθές, όταν το ελατήριο δεν υφίσταται παραμόρφωση, έτσι ώστε η δυναμική ενέργεια του συστήματος να είναι ελάχιστη.)

Πώς ακριβώς ορίζεται η έννοια του μορίου; Σαν πρώτη σκέψη θα λέγαμε ότι είναι μια ομάδα δύο ή περισσότερων ατόμων που συγκρατούνται μεταξύ τους με κάποιας μορφής ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Όμως, από τη στιγμή που δύο άτομα αλληλεπιδρούν παύουν να αποτελούν αυτόνομες, ξεχωριστές οντότητες, αλλά το ένα επηρεάζεται άμεσα από την παρουσία του άλλου (για παράδειγμα, οι κινήσεις και οι ενέργειες των ηλεκτρονίων των ατόμων τροποποιούνται σημαντικά). Μετά το σχηματισμό του μορίου, έχει άραγε νόημα να λέμε ακόμα ότι ένα ηλεκτρόνιο ανήκει στο άτομο A ή στο άτομο B; Αυτό μας οδηγεί σε μια άλλη, εκ διαμέτρου αντίθετη εικόνα, σύμφωνα με την οποία το μόριο είναι απλά μια ομάδα δύο ή περισσότερων πυρήνων που περιβάλλονται από ηλεκτρόνια έτσι ώστε η δομή που προκύπτει να είναι ευσταθής. Αν και πολλοί θα έσπευδαν να υιοθετήσουν αυτή τη δεύτερη άποψη, εμείς θα πάρουμε μια ενδιάμεση θέση με βάση την ακόλουθη παρατήρηση: Όταν δύο άτομα ενώνονται για να σχηματίσουν ένα μόριο, τα ηλεκτρόνια των εσωτερικών στοιβάδων τους (οι οποίες είναι πλήρεις) δεν επηρεάζονται ιδιαίτερα, αφού οι επιδράσεις που δέχονται οφείλονται κατά κύριο λόγο στους πυρήνες των αρχικών ατόμων στα οποία ανήκαν. Αυτά που επηρεάζονται σημαντικά είναι τα ηλεκτρόνια των *εξωτερικών* στοιβάδων (*ηλεκτρόνια σθένους*), τα οποία βρίσκονται κάτω από την επίδραση και των δύο πυρήνων έτσι ώστε να μην είναι πλέον δυνατό να προσδιορίσουμε σε ποιο από τα άτομα ανήκει το καθένα. Στα ηλεκτρόνια αυτά οφείλονται οι χημικοί δεσμοί που εξασφαλίζουν τη συνοχή του μορίου.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι N όμοια άτομα ενώνονται για να σχηματίσουν ένα *N-ατομικό μόριο* (όπως, π.χ., για N=2 τα μόρια H_2 και O_2, για N=3 το μόριο O_3, κλπ.). Το μόριο αυτό είναι ένα νέο κβαντικό σύστημα με διαφορετική δομή από εκείνη των αρχικών ατόμων. Ειδικότερα, *το μόριο διαθέτει τουλάχιστον N φορές περισσότερες επιτρεπόμενες ενεργειακές στάθμες για τα ηλεκτρόνια σε σύγκριση με τα αντίστοιχα άτομα*. Αυτό είναι λογικό, αφού στις μοριακές στάθμες πρέπει να χωρέσουν N φορές περισσότερα ηλεκτρόνια απ' ό,τι στις ατομικές στάθμες. Τώρα, όπως είδαμε, οι ενεργειακές στάθμες των ηλεκτρονίων ενός ατόμου αντιστοιχούν στις υποστοιβάδες 1*s*, 2*s*, 2*p*, 3*s*, 3*p*, κλπ. Όταν N όμοια άτομα ενώνονται για να σχηματίσουν ένα N-ατομικό μόριο, *από κάθε ενεργειακή στάθμη ενός μεμονωμένου ατόμου προκύπτουν N ή περισσότερες στάθμες για το μόριο*. Λέμε ότι, κατά το σχηματισμό του μορίου κάθε ατομική ενεργειακή στάθμη *διαχωρίζεται* σε N ή περισσότερες μοριακές στάθμες (στο ενεργειακό διάγραμμα οι στάθμες αυτές βρίσκονται πολύ κοντά η μία στην άλλη). Το παρακάτω ποιοτικό διάγραμμα αφορά το *διατομικό* μόριο (N=2):

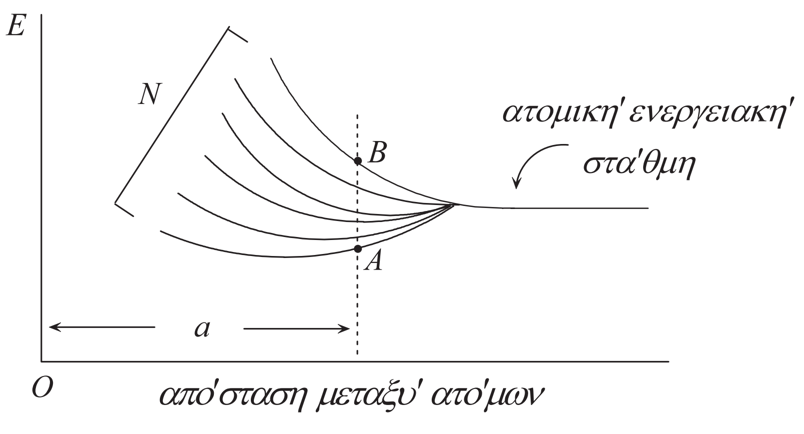


1.7 Ενεργειακές Ζώνες Κρυσταλλικών Στερεών

Όπως αναφέραμε νωρίτερα, η ευστάθεια πολλών στερεών ουσιών οφείλεται στην κρυσταλλική τους δομή. Ένας *κρύσταλλος* αποτελεί κανονική διάταξη ατόμων (ή μορίων, ή ιόντων) στο χώρο. Η διάταξη αυτή χτίζεται με κανονική επανάληψη μιας θεμελιώδους δομικής μονάδας στις τρεις διαστάσεις. Ο λόγος για τον οποίο σχηματίζονται κρύσταλλοι είναι κατά βάση ο ίδιος για τον οποίο σχηματίζονται μόρια: το αποτέλεσμα είναι ενεργειακά σύμφορο. Δηλαδή, η δυναμική ενέργεια του κρυστάλλου είναι μικρότερη από αυτή που θα είχε το σύστημα των ατόμων που τον αποτελούν αν αυτά ήταν μεμονωμένα.

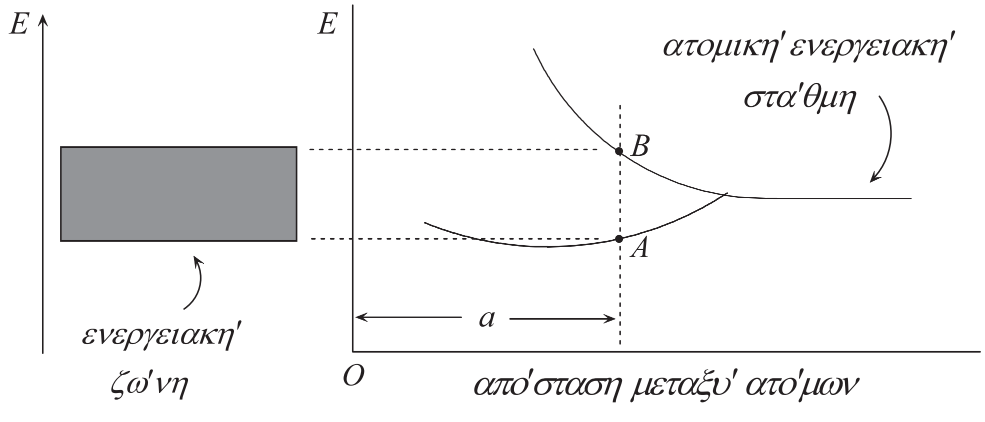
Στους κρυστάλλους, όπως και στα μόρια, χωρίζουμε τα ηλεκτρόνια σε δύο κατηγορίες: (α) τα ηλεκτρόνια των εσωτερικών στοιβάδων των ατόμων, και (β) τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων. Τα εσωτερικά ηλεκτρόνια βρίσκονται πιο κοντά στους πυρήνες των ατόμων όπου ανήκουν, δέχονται ισχυρές δυνάμεις από αυτούς, και δεν επηρεάζονται ιδιαίτερα από τα γειτονικά άτομα (ή ιόντα) του κρυστάλλου. Έτσι, τα ηλεκτρόνια αυτά διατηρούν τις ιδιότητες που θα είχαν αν βρίσκονταν στις εσωτερικές στοιβάδες μεμονωμένων ατόμων (π.χ., θα είχαν σχεδόν τις ίδιες ενέργειες και οι καταστάσεις τους θα περιγράφονταν με τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς). Αντίθετα, τα ηλεκτρόνια των στοιβάδων σθένους των ατόμων επηρεάζονται και από την παρουσία των γειτονικών ατόμων, έτσι ώστε οι αρχικές τους ιδιότητες (κυρίως σε ό,τι αφορά την ενέργεια) τροποποιούνται σημαντικά. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα ηλεκτρόνια αυτά δεν «θυμούνται» από ποια άτομα προέρχονται αλλά ανήκουν πλέον σε ολόκληρο τον κρύσταλλο. Στα ηλεκτρόνια σθένους οφείλονται οι δεσμοί μεταξύ των ατόμων καθώς και οι περισσότερες φυσικές ιδιότητες του κρυστάλλου (όπως η ηλεκτρική και η θερμική του αγωγιμότητα).

Ας θεωρήσουμε έναν κρύσταλλο που αποτελείται από N όμοια άτομα (ή μόρια, ή ιόντα). Φανταστείτε τον σαν ένα μόριο αποτελούμενο από έναν τεράστιο αριθμό ατόμων τα οποία είναι τοποθετημένα σε κανονική διάταξη στο χώρο. Σύμφωνα με αυτά που συζητήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, κατά το σχηματισμό του κρυστάλλου κάθε ατομική ενεργειακή στάθμη θα διαχωριστεί σε N (ή περισσότερες) κρυσταλλικές στάθμες που θα βρίσκονται πολύ κοντά η μία στην άλλη. Οι ακριβείς θέσεις και αποστάσεις μεταξύ των σταθμών αυτών εξαρτώνται από την απόσταση μεταξύ των ατόμων στον κρύσταλλο, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:

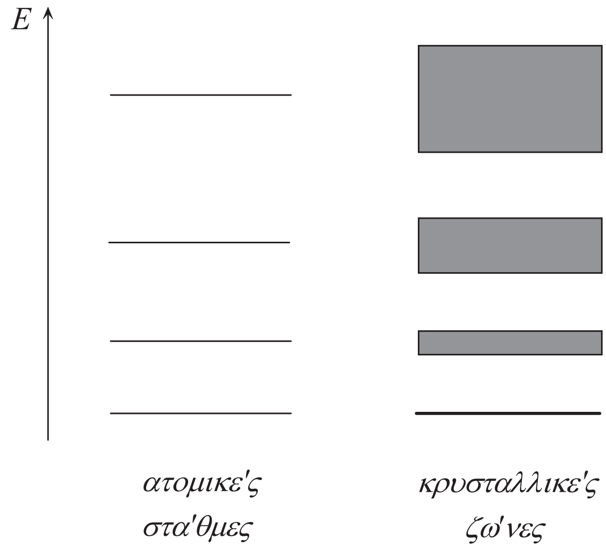


Ο οριζόντιος άξονας παριστά τις τιμές της απόστασης μεταξύ δύο γειτονικών ατόμων στον κρύσταλλο, ενώ ο κατακόρυφος άξονας παριστά τις τιμές της ενέργειας που αντιστοιχούν στις N κρυσταλλικές στάθμες. Το διάγραμμα ερμηνεύεται ως εξής: Φανταζόμαστε ότι αρχικά τα N άτομα βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις το ένα από το άλλο, έτσι ώστε να μην αλληλεπιδρούν (μεμονωμένα άτομα). Θεωρούμε μια συγκεκριμένη ατομική ενεργειακή στάθμη, κοινή για όλα τα άτομα. Καθώς τα άτομα πλησιάζουν μεταξύ τους για να σχηματίσουν την κρυσταλλική δομή, αρχίζουν να αλληλεπιδρούν. Από τη στιγμή αυτή και μετά δεν έχουμε ένα σύνολο μεμονωμένων ατόμων αλλά ένα καινούργιο κβαντικό σύστημα, τον κρύσταλλο. Ειδικά, τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων δεν σχετίζονται πλέον με μεμονωμένα άτομα αλλά αποτελούν ένα ενιαίο σύστημα που ανήκει σε όλο τον κρύσταλλο. Από την ατομική στάθμη που θεωρήσαμε προκύπτουν τώρα N (τουλάχιστον) διακεκριμένες κρυσταλλικές στάθμες που καθορίζουν τις δυνατές τιμές της ενέργειας των ηλεκτρονίων. Κάθε τέτοια στάθμη αντιστοιχεί σε μια τιμή της ενέργειας, η οποία όμως δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται σαν συνάρτηση της απόστασης μεταξύ των ατόμων. Έτσι, μπορούμε να χαράξουμε N καμπύλες, μία για κάθε στάθμη. Παρατηρούμε ότι για δεδομένη απόσταση ατόμων a, οι επιτρεπόμενες κρυσταλλικές στάθμες βρίσκονται μεταξύ A και B στο διάγραμμα. Η ενεργειακή απόσταση AB μεταβάλλεται με την απόσταση μεταξύ των ατόμων.

Τώρα, στους κρυστάλλους ο αριθμός N των ατόμων είναι πάρα πολύ μεγάλος, περίπου 10^{23} άτομα $/cm^3$. Έτσι, οι N ενεργειακές στάθμες είναι τόσο κοντά η μία στην άλλη που είναι αδύνατο να τις ξεχωρίσουμε. Λέμε τότε ότι οι στάθμες αυτές σχηματίζουν μια συνεχή *ενεργειακή ζώνη*. Το *εύρος* μιας ζώνης (η ενεργειακή απόσταση AB στο διάγραμμα) μεταβάλλεται με την απόσταση μεταξύ των ατόμων. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την ενεργειακή ζώνη που προκύπτει από μια ατομική στάθμη, για δοσμένη απόσταση a μεταξύ των ατόμων (ή ιόντων) του κρυστάλλου:



Θα μπορούσαμε, γενικά, να πούμε ότι, όπως δείχνει και το επόμενο σχήμα, από κάθε ατομική ενεργειακή στάθμη προκύπτει μια αντίστοιχη κρυσταλλική ενεργειακή ζώνη (αν και, όπως θα δούμε αργότερα, η απλοϊκή αυτή εικόνα δεν ισχύει απόλυτα για τις ζώνες τις οποίες καταλαμβάνουν τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων):

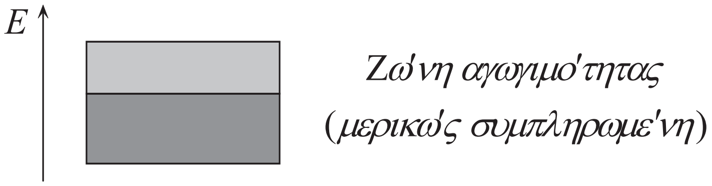


Παρατηρούμε ότι *το εύρος των ζωνών αυξάνει από την κατώτερη προς την ανώτερη ζώνη* (η κατώτερη είναι σχεδόν όμοια με ενεργειακή στάθμη). Αυτό εξηγείται ως εξής: Οι ανώτερες ζώνες αντιστοιχούν στις ανώτερες ατομικές στάθμες, οι οποίες με τη σειρά τους αντιστοιχούν στις εξωτερικές υποστοιβάδες των ατόμων του κρυστάλλου. Αντίθετα, οι κατώτερες ζώνες αντιστοιχούν στις εσωτερικές υποστοιβάδες. Δηλαδή, οι ανώτερες ζώνες καταλαμβάνονται από τα εξωτερικά ηλεκτρόνια των ατόμων, ενώ οι κατώτερες ζώνες από τα εσωτερικά. Όπως έχουμε ήδη εξηγήσει, τα εσωτερικά ηλεκτρόνια δέχονται επιδράσεις κυρίως από τους πυρήνες των ατόμων στα οποία ανήκουν και ελάχιστα «αισθάνονται» την παρουσία των γειτονικών ατόμων (ή ιόντων) του κρυστάλλου. Έτσι, οι ενέργειές τους δεν διαφέρουν σημαντικά από αυτές που θα είχαν στα μεμονωμένα άτομα, με συνέπεια οι ενεργειακές ζώνες τους να μη διαφέρουν πολύ ως προς το εύρος από τις αντίστοιχες ενεργειακές στάθμες. Από την άλλη μεριά, τα εξωτερικά ηλεκτρόνια (ιδιαίτερα τα ηλεκτρόνια σθένους) αλληλεπιδρούν πιο έντονα με τα γειτονικά άτομα και οι ενέργειές τους τροποποιούνται σημαντικά, με αποτέλεσμα οι ατομικές στάθμες στις οποίες ανήκαν να διευρύνονται σε ζώνες κατά το σχηματισμό του κρυστάλλου. Σημειώνουμε ότι *το εύρος των ζωνών είναι ανεξάρτητο από τις διαστάσεις του κρυστάλλου, δηλαδή από το ολικό πλήθος των ατόμων*: εξαρτάται μόνο από τη *συγκέντρωση* (πυκνότητα) των ατόμων, δηλαδή το πλήθος των ατόμων *ανά μονάδα όγκου*.

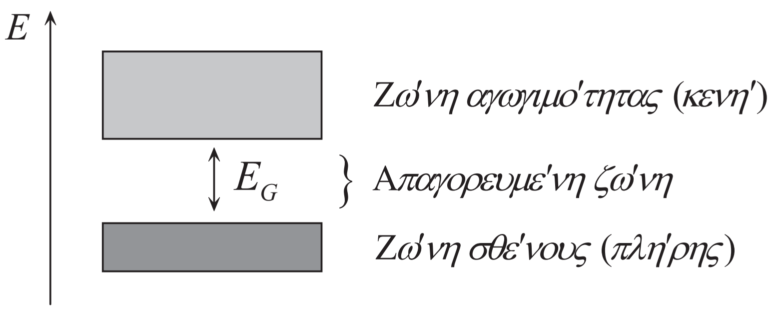
Όπως οι ατομικές ενεργειακές στάθμες (που αντιστοιχούν στις υποστοιβάδες), έτσι και οι κρυσταλλικές ενεργειακές ζώνες μπορούν να χωρέσουν ορισμένο μόνο αριθμό ηλεκτρονίων που καθορίζεται από το πλήθος των διαθέσιμων *επιτρεπτών καταστάσεων* και την απαγορευτική αρχή του Pauli. Θυμίζουμε ότι, σύμφωνα με την αρχή αυτή, δεν είναι δυνατόν δύο ή περισσότερα ηλεκτρόνια του συστήματος να βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση (ή, όπως λέμε, να «καταλαμβάνουν» την ίδια κατάσταση). Αυτό σημαίνει ότι διαφορετικά ηλεκτρόνια του κρυστάλλου δεν μπορεί να αντιστοιχούν στις ίδιες ακριβώς τιμές του συνόλου των κβαντικών αριθμών. Έτσι, το πλήθος των ηλεκτρονίων μιας ζώνης δεν μπορεί να υπερβαίνει το πλήθος των επιτρεπτών καταστάσεων της ζώνης.

Η πλήρωση των κρυσταλλικών ζωνών με ηλεκτρόνια ακολουθεί την ίδια λογική με την πλήρωση των ατομικών σταθμών (ή αντίστοιχα, των υποστοιβάδων): Πρώτα γεμίζει η κατώτατη ζώνη, μετά η αμέσως ανώτερη, κλπ., μέχρι να φτάσουμε σε μια τελευταία (ανώτατη) ζώνη που περιέχει ηλεκτρόνια (κάθε ζώνη πάνω από αυτήν είναι κενή). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν η τελευταία ζώνη *δεν* είναι πλήρης, ονομάζεται *ζώνη αγωγιμότητας*:



(β) Αν η τελευταία ζώνη είναι *πλήρης*, ονομάζεται *ζώνη σθένους*, ενώ η αμέσως ανώτερη *κενή* ζώνη καλείται *ζώνη αγωγιμότητας*. Η ενεργειακή περιοχή μεταξύ των ζωνών σθένους και αγωγιμότητας δεν περιέχει επιτρεπτές καταστάσεις και για το λόγο αυτό καλείται *απαγορευμένη ζώνη*. Το ενεργειακό εύρος της απαγορευμένης ζώνης καλείται *ενεργειακό χάσμα* (E_G) :



Προσέξτε ότι στην περίπτωση (β) η ζώνη αγωγιμότητας είναι μια *επιτρεπτή* ζώνη για τα ηλεκτρόνια, παρόλο που υπό κανονικές συνθήκες είναι κενή! Πράγματι, ηλεκτρόνια της ζώνης σθένους μπορούν, αν διεγερθούν κατάλληλα με προσφορά ενέργειας, να μεταφερθούν στην ενεργειακή περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας. Αντίθετα, *κανένα ηλεκτρόνιο δεν μπορεί να βρεθεί στην απαγορευμένη ζώνη*, αφού η ενεργειακή αυτή περιοχή δεν περιέχει επιτρεπτές στάθμες και καταστάσεις για τα ηλεκτρόνια του κρυστάλλου. Όπως είναι εύκολο να δούμε, το ενεργειακό χάσμα E_G παριστά την ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσφέρουμε σε ένα ηλεκτρόνιο της ζώνης σθένους για να το ανυψώσουμε ενεργειακά στη ζώνη αγωγιμότητας. Τη φυσική σημασία αυτής της διαδικασίας θα την εξηγήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

1.8 Κρύσταλλοι Τετρασθενών Στοιχείων

Θα κάνουμε τώρα μια σύντομη αναφορά στους κρυστάλλους που σχηματίζονται από όμοια άτομα τετρασθενών στοιχείων, μια και στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι κρύσταλλοι των ημιαγωγών που θα μελετήσουμε αργότερα. Επειδή είναι ομοιοπολικά στερεά (βλ.Παρ.1.2) δεν αναμένεται, υπό κανονικές συνθήκες, να εμφανίζουν αξιόλογη ηλεκτρική και θερμική αγωγιμότητα, αφού δεν διαθέτουν σημαντικό αριθμό ελεύθερων ηλεκτρονίων.

Η τελευταία (εξωτερική) στοιβάδα ενός τετρασθενούς ατόμου έχει τη δομή

$$\underbrace{\mathrm{n}s^2}_{\textit{πλήρης}}\ \underbrace{\mathrm{n}p^2}_{\textit{όχι πλήρης}} \quad (\mathrm{n}=2,3,4,...)$$

Για παράδειγμα, για n=2,3,4,..., έχουμε, αντίστοιχα:

Άνθρακας (C, 6): $1s^2\,2s^2\,2p^2$

Πυρίτιο (Si, 14): $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^2$

Γερμάνιο (Ge, 32): $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^{10}\,4s^2\,4p^2$

Η τελευταία κατειλημμένη ατομική στάθμη (np) δεν είναι πλήρης, αφού η αντίστοιχη υποστοιβάδα έχει μόνο 2 ηλεκτρόνια ενώ χωράει μέχρι και 6. Θα περίμενε κανείς ότι, κατ' αναλογία, και η τελευταία κατειλημμένη κρυσταλλική ζώνη δεν είναι πλήρης, αφού υποτίθεται ότι προκύπτει από διεύρυνση μιας μερικώς κατειλημμένης στάθμης. Τα πράγματα όμως δεν είναι ακριβώς έτσι! Το γεγονός και μόνο ότι οι κρύσταλλοι αυτοί δεν είναι καλοί ηλεκτρικοί αγωγοί μαρτυρά ότι η τελευταία κατειλημμένη ζώνη τους *είναι πλήρης*, δηλαδή είναι *ζώνη σθένους*. Πώς συμβαίνει αυτό; Ας φανταστούμε ότι N άτομα (όπου $N \sim 10^{23}$) τετρασθενούς στοιχείου ξεκινούν από «άπειρη» απόσταση και πλησιάζουν μεταξύ τους ώστε να σχηματίσουν κρύσταλλο. Τη στιγμή που αρχίζουν να αλληλεπιδρούν, οι στάθμες (n s) και (n p) αρχίζουν να διευρύνονται σε ζώνες. Η ζώνη (ns) είναι πλήρης ενώ η (np) είναι μερικώς κατειλημμένη. Καθώς τα άτομα πλησιάζουν περισσότερο, οι ζώνες αυτές διευρύνονται τόσο πολύ ώστε αρχίζουν να επικαλύπτονται, σχηματίζοντας μια ενιαία ζώνη. Τέλος, όταν τα άτομα φτάσουν στις κατάλληλες αποστάσεις για να σχηματίσουν τον κρύσταλλο, η ενιαία αυτή ζώνη διαχωρίζεται και πάλι, αυτή τη φορά όμως σε δύο *νέες* ζώνες με διαφορετικές χωρητικότητες από τις αρχικές ζώνες (n s) και (np). Όλα τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων του κρυστάλλου (4 ανά άτομο) βρίσκονται στην κατώτερη ζώνη η οποία τώρα είναι μια *πλήρης* ζώνη σθένους, ενώ η ανώτερη *κενή* ζώνη είναι ζώνη αγωγιμότητας.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. (α) Τι ονομάζουμε κατάσταση ενός ηλεκτρονίου σε ένα άτομο; Τι αναφέρει η απαγορευτική αρχή του Pauli; (β) Όπως γνωρίζουμε, η ενεργειακή στάθμη 1*s* είναι η στάθμη χαμηλότερης ενέργειας σε ένα άτομο. Γιατί δεν βρίσκεται το σύνολο των ηλεκτρονίων του ατόμου στη στάθμη αυτή (με εξαίρεση το H και το He); Τι επιπτώσεις πιστεύετε ότι θα είχε κάτι τέτοιο στη Φύση;

2. Να γίνει ένα συγκριτικό διάγραμμα (όχι κατ' ανάγκη ακριβές!) των ηλεκτρονικών ενεργειακών σταθμών του ατόμου του οξυγόνου (O) και των σταθμών του μορίου του όζοντος (O_3).

3. Γιατί στους κρυστάλλους των στερεών παρατηρούνται ενεργειακές ζώνες αντί για τις ενεργειακές στάθμες που χαρακτηρίζουν τα άτομα και τα μόρια; Γιατί οι ζώνες με μεγαλύτερη ενέργεια έχουν και μεγαλύτερο εύρος;

4. Μια ζώνη ενός κρυστάλλου είναι πλήρης από ηλεκτρόνια, ενώ μια άλλη ζώνη του ίδιου κρυστάλλου είναι μερικώς συμπληρωμένη. Ποια ζώνη έχει το μεγαλύτερο εύρος; Εξηγήστε.

5. Έχουμε δύο διαμάντια, ένα μικρό και ένα μεγάλο. Να συγκριθεί το εύρος των αντίστοιχων ζωνών των δύο κρυστάλλων.

6. Με ποιους τρόπους τα ελεύθερα ηλεκτρόνια επηρεάζουν τη δομή και τις φυσικές ιδιότητες των μετάλλων ;

7. Δώστε ένα παράδειγμα που να μας επισημαίνει ότι η αντιστοιχία ανάμεσα στις ενεργειακές στάθμες μεμονωμένων ατόμων και τις ενεργειακές ζώνες του κρυστάλλου που συντίθεται από τα άτομα αυτά, δεν είναι απόλυτη.

ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΕΡΕΩΝ

2.1 Εισαγωγή

Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες, από θεωρητική αλλά και πρακτική άποψη, ιδιότητες των στερεών είναι η ηλεκτρική τους αγωγιμότητα. Από τη σκοπιά αυτή διακρίνουμε τρεις κατηγορίες στερεών: τους *αγωγούς* (ή *μέταλλα*), τους *μονωτές* και τους *ημιαγωγούς*. Οι τελευταίοι έχουν ενδιάμεση αγωγιμότητα σε σχέση με τους μονωτές και τους αγωγούς. Σε αντίθεση, όμως, με τα μέταλλα, των οποίων η αγωγιμότητα *ελαττώνεται* με τη θερμοκρασία, η αγωγιμότητα των ημιαγωγών *αυξάνει* με τη θερμοκρασία.

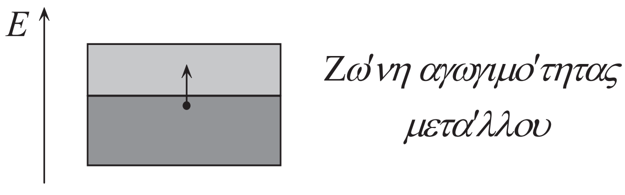
Όπως θα δούμε παρακάτω, η ηλεκτρική αγωγιμότητα ενός κρυσταλλικού στερεού σχετίζεται άμεσα με τη δομή των ενεργειακών ζωνών του, ή, για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι, των ζωνών εκείνων που «φιλοξενούν» τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων του κρυστάλλου. Αυτό που γενικά πρέπει να θυμόμαστε είναι ότι

> ***μια ζώνη που είναι πλήρης από ηλεκτρόνια (δεν έχει, δηλαδή, ελεύθερες καταστάσεις) δεν συμβάλλει στην αγωγιμότητα, σε αντίθεση με μια ζώνη που είναι μερικώς συμπληρωμένη.***

Έτσι, τα μέταλλα χαρακτηρίζονται από την παρουσία μερικώς συμπληρωμένων ζωνών, ενώ στους μονωτές όλες οι κατειλημμένες ζώνες είναι πλήρεις. Οι ημιαγωγοί σε καθαρή μορφή και χαμηλές θερμοκρασίες έχουν ηλεκτρική συμπεριφορά όμοια με αυτή των μονωτών, αφού στις συνθήκες αυτές οι ζώνες τους επίσης είναι πλήρεις. Η ηλεκτρική τους αγωγιμότητα μπορεί όμως να αυξηθεί σημαντικά με την αύξηση της θερμοκρασίας ή με κατάλληλες προσμείξεις.

2.2 Αγωγοί και Μονωτές

Αυτό που γενικά χαρακτηρίζει τα *μέταλλα* (αγωγούς) είναι ότι η τελευταία κατειλημμένη ζώνη τους δεν είναι πλήρης αλλά *μερικώς συμπληρωμένη* από ηλεκτρόνια. Με άλλα λόγια, τα μέταλλα διαθέτουν *ζώνη αγωγιμότητας*:



Στην ουσία, η ζώνη αγωγιμότητας είναι το σύνολο των ενεργειακών τιμών που μπορούν να πάρουν τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων του κρυστάλλου, η επιτρεπόμενη ενεργειακή περιοχή των ηλεκτρονίων σθένους. Τα ηλεκτρόνια αυτά έχουν απελευθερωθεί από τα άτομα στα οποία ανήκαν, μετατρέποντας έτσι τα άτομα σε *θετικά ιόντα* (για την απελευθέρωσή τους τα ηλεκτρόνια χρησιμοποιούν μέρος από την ενέργεια που εκλύεται κατά το σχηματισμό του κρυστάλλου, δεν απαιτείται δηλαδή προσφορά εξωτερικής ενέργειας για το σκοπό αυτό). Τα απελευθερωμένα ηλεκτρόνια σθένους κινούνται πλέον ελεύθερα ανάμεσα στα θετικά ιόντα του κρυσταλλικού πλέγματος χωρίς να υφίστανται ιδιαίτερα έντονες επιδράσεις από τα ιόντα, και για το λόγο αυτό καλούνται *ελεύθερα ηλεκτρόνια*. Σε αυτά οφείλεται η ηλεκτρική αγωγιμότητα του μετάλλου καθώς και ένα σημαντικό μέρος της θερμικής του αγωγιμότητας (ένα άλλο μέρος οφείλεται στις ταλαντώσεις των ιόντων του κρυστάλλου).

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα εξηγείται ως εξής: Όταν στο εσωτερικό του μετάλλου υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια παίρνουν ενέργεια απ' αυτό και αρχίζουν να επιταχύνονται. Μέρος της ενέργειας, βέβαια, χάνεται λόγω συγκρούσεων με τα ιόντα, αλλά τελικά τα ηλεκτρόνια αποκτούν μια σταθερή μέση ταχύτητα στη διεύθυνση του πεδίου. Η προσανατολισμένη κίνηση των ηλεκτρονίων συνιστά αυτό που ονομάζουμε ηλεκτρικό ρεύμα.

Από μια κάπως διαφορετική σκοπιά, η ηλεκτρική αγωγιμότητα του μετάλλου οφείλεται στο ότι τα ηλεκτρόνια των ανώτερων κατειλημμένων σταθμών της ζώνης αγωγιμότητας μπορούν, παίρνοντας ενέργεια από το ηλεκτρικό πεδίο, να μεταπηδήσουν σε υψηλότερες στάθμες της ζώνης που είναι κενές, έτσι ώστε να μην παραβιάζεται η απαγορευτική αρχή του Pauli. Η αύξηση της ενέργειας των ηλεκτρονίων οφείλεται στην επιτάχυνσή τους από το ηλεκτρικό πεδίο και έχει σαν φυσικό αποτέλεσμα αυτό που μακροσκοπικά αντιλαμβανόμαστε ως ηλεκτρικό ρεύμα. Προσέξτε ότι, αν η ζώνη των ηλεκτρονίων σθένους ήταν πλήρης, δεν θα μπορούσαν τα ηλεκτρόνια να μεταπηδήσουν σε υψηλότερες στάθμες της ζώνης αφού αυτές θα ήταν ήδη κατειλημμένες και η μετακίνηση ηλεκτρονίων σε αυτές θα παραβίαζε την απαγορευτική αρχή του Pauli.

Η παραπάνω ανάλυση εξηγεί επίσης την *αδιαφάνεια* των μετάλλων στο φως: Τα μέταλλα είναι αδιαφανή διότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνιά τους μπορούν να απορροφήσουν τα φωτόνια της ορατής περιοχής του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και να διεγερθούν σε μια από τις πολλές ανώτερες κενές στάθμες της ζώνης αγωγιμότητας που έχουν στη διάθεσή τους.

Ας δούμε δύο παραδείγματα, το νάτριο και το μαγνήσιο:

Νάτριο (Na, 11): $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^1$

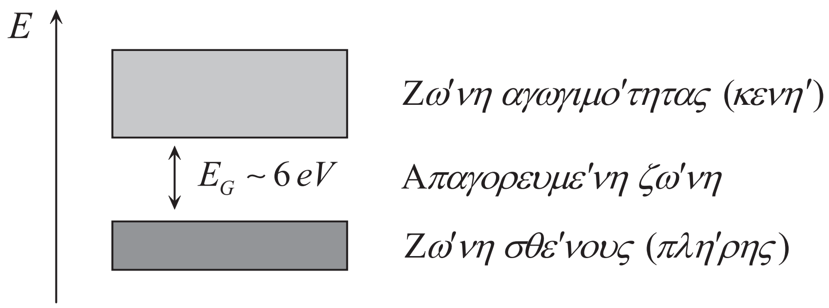
Μαγνήσιο (Mg, 12): $1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\, (3p^0)$

Το Na είναι αγωγός διότι, κατά το σχηματισμό του κρυστάλλου, η κατά το ήμισυ μόνο συμπληρωμένη ατομική στάθμη 3*s* διευρύνεται σε μια αντίστοιχα μερικώς συμπληρωμένη ζώνη αγωγιμότητας. Στο Mg έχουμε *επικάλυψη* των ζωνών που προκύπτουν από τη διεύρυνση των ατομικών σταθμών 3*s* (πλήρης) και 3*p* (κενή), με αποτέλεσμα μια μερικώς κατειλημμένη ζώνη αγωγιμότητας.[1]

Στον αντίποδα των μετάλλων από πλευράς αγωγιμότητας βρίσκονται οι *μονωτές*. Σαν τυπικό παράδειγμα παίρνουμε το διαμάντι, του οποίου η κρυσταλλική δομή χτίζεται με άτομα άνθρακα (C) συνδεμένα μεταξύ τους με ισχυρότατους ομοιοπολικούς δεσμούς. Επειδή ο άνθρακας είναι τετρασθενής, ο κρύσταλλος του διαμαντιού εμφανίζει μια *πλήρη ζώνη σθένους* και μια *κενή ζώνη αγωγιμότητας* (βλ. Παρ.1.8):

---

[1] Τέτοιας μορφής επικάλυψη ζωνών συμβαίνει, γενικά, σε *όλα* τα μέταλλα, ακόμα κι αν η τελευταία ατομική τους στάθμη δεν είναι πλήρης (π.χ., Na).



Η ζώνη σθένους χωράει ακριβώς όλα τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων του κρυστάλλου (4 ηλεκτρόνια ανά άτομο). Το *ενεργειακό χάσμα* E_G παριστά την ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να πάρει ένα ηλεκτρόνιο της ζώνης σθένους για να ανυψωθεί στην ενεργειακή περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας.[2] Από φυσική άποψη, το E_G είναι η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να «σπάσει» ένας ομοιοπολικός δεσμός στον κρύσταλλο και να απελευθερωθεί ένα ηλεκτρόνιο σθένους. Το ελεύθερο ηλεκτρόνιο θα ανήκει πλέον στην ενεργειακή περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας. (Τονίζουμε και πάλι ότι σε καμία περίπτωση δεν θα μπορούσε το ηλεκτρόνιο να βρεθεί στην απαγορευμένη ζώνη, αφού η περιοχή αυτή δεν περιέχει επιτρεπτές ενεργειακές στάθμες και καταστάσεις.)

Επειδή όλες οι καταστάσεις της ζώνης σθένους είναι κατειλημμένες, θα ήταν αδύνατο να επιταχύνουμε ένα ηλεκτρόνιο σθένους με τη βοήθεια ηλεκτρικού πεδίου και να δημιουργήσουμε ηλεκτρικό ρεύμα. Πράγματι, η επιτάχυνση θα επέφερε αύξηση της ενέργειας του ηλεκτρονίου και διέγερσή του σε υψηλότερη ενεργειακή στάθμη της ζώνης σθένους, πράγμα όμως που θα παραβίαζε την απαγορευτική αρχή του Pauli αφού όλες οι στάθμες της ζώνης αυτής είναι ήδη πλήρως κατειλημμένες. Η μόνη επιτρεπτή διέγερση του ηλεκτρονίου είναι η μετάβασή του στην άδεια ζώνη αγωγιμότητας (πρακτικά, το σπάσιμο ενός ομοιοπολικού δεσμού με απελευθέρωση ενός ηλεκτρονίου). Αυτό απαιτεί ενέργεια $E \geq E_G$, όπου $E_G \sim 6\ eV$ για το διαμάντι. Μια τόσο μεγάλη ενέργεια δεν μπορεί να προσφερθεί από ένα συνηθισμένης έντασης ηλεκτρικό πεδίο. Για το λόγο αυτό το διαμάντι έχει ελάχιστη (πρακτικά μηδενική) ηλεκτρική αγωγιμότητα.

Λόγω της μεγάλης τιμής τού E_G το διαμάντι δεν μπορεί να απορροφήσει φωτόνια της ορατής περιοχής του φάσματος, τα οποία έχουν ενέργειες 1.5-3 $eV < E_G$ (η απορρόφηση ενός τέτοιου φωτονίου θα έστελνε ένα ηλεκτρόνιο της ζώνης σθένους στην απαγορευμένη ζώνη!). Αυτό εξηγεί τη *διαφάνεια* του κρυστάλλου. (Το βαθύ μπλε χρώμα μερικών διαμαντιών οφείλεται σε πρόσμειξη με άτομα βορίου.)

2.3 Ημιαγωγοί

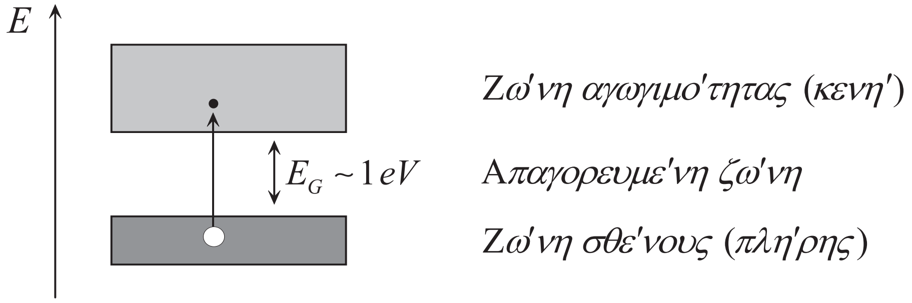
Οι ημιαγωγοί έχουν ενδιάμεση αγωγιμότητα σε σύγκριση με τα μέταλλα και τους μονωτές. Σαν τυπικά παραδείγματα με πολλές πρακτικές εφαρμογές, θα εξετάσουμε εδώ το *πυρίτιο* (Si) και το *γερμάνιο* (Ge). Όπως και το διαμάντι, είναι ομοιοπολικοί κρύσταλλοι τετρασθενών στοιχείων. Έτσι, σε θεμελιώδη κατάσταση (όταν δεν έχουν υποστεί διέγερση) εμφανίζουν μια πλήρη ζώνη σθένους. Σε αντίθεση όμως με το δια-

[2] Προσέξτε ότι δεν εννοούμε μετακίνηση του ηλεκτρονίου στο χώρο, αλλά στο ενεργειακό διάγραμμα!

μάντι, το ενεργειακό χάσμα E_G των ημιαγωγών είναι σχετικά μικρό, της τάξης του $1eV$:

Πυρίτιο (Si, 14): $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^2$ ($E_G = 1.21\,eV$)

Γερμάνιο (Ge, 32): $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^{10}\,4s^2\,4p^2$ ($E_G = 0.78\,eV$)

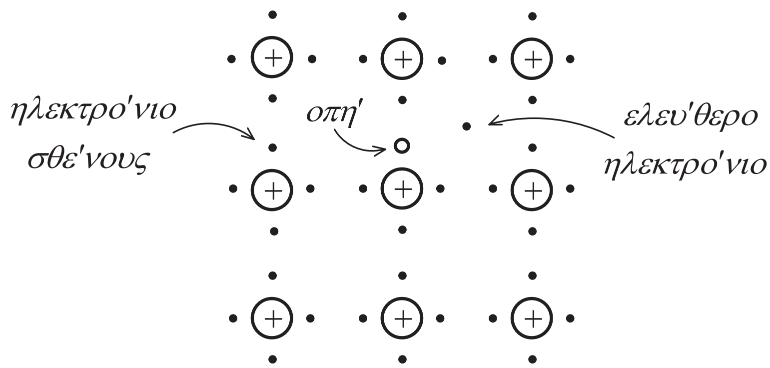


Η ζώνη σθένους περιέχει τα ηλεκτρόνια σθένους (4 ανά άτομο) των ατόμων του κρυστάλλου. Σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες (κοντά στο απόλυτο μηδέν, $T \sim 0K$) η ζώνη αυτή είναι πλήρης, πράγμα που πρακτικά σημαίνει ότι όλα τα ηλεκτρόνια σθένους συμμετέχουν σε ομοιοπολικούς δεσμούς και δεν υπάρχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια στον κρύσταλλο (η ζώνη αγωγιμότητας είναι κενή). Έτσι, στις θερμοκρασίες αυτές οι ημιαγωγοί συμπεριφέρονται σαν μονωτές, αφού το ενεργειακό χάσμα E_G δεν μπορεί να υπερπηδηθεί με την απλή εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου. Σε υψηλότερες θερμοκρασίες, όμως, (π.χ., σε θερμοκρασία δωματίου, $T \sim 300K$) τα ηλεκτρόνια των ανώτερων σταθμών της ζώνης σθένους προσλαμβάνουν αρκετή θερμική ενέργεια ώστε να υπερπηδήσουν το σχετικά μικρό χάσμα E_G και να ανυψωθούν ενεργειακά στη ζώνη αγωγιμότητας.

Από φυσική άποψη, η ενέργεια E_G είναι η ελάχιστη που απαιτείται για να σπάσει ένας ομοιοπολικός δεσμός και να απελευθερωθεί ένα ηλεκτρόνιο. Κάτω από την επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου, τα απελευθερωμένα ηλεκτρόνια κινούνται προσανατολισμένα όπως και τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων, έχοντας ενέργειες στην περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας του κρυστάλλου.

Από πλευράς οπτικών ιδιοτήτων, οι ημιαγωγοί είναι *αδιαφανείς* διότι το ενεργειακό τους χάσμα είναι μικρότερο από τις ενέργειες των φωτονίων της ορατής περιοχής του φάσματος (E_G < 1.5-3 eV). Έτσι, ηλεκτρόνια των ανώτερων σταθμών της ζώνης σθένους μπορούν να απορροφήσουν φωτόνια της περιοχής αυτής και να διεγερθούν στη ζώνη αγωγιμότητας (δηλαδή, να σπάσουν τους ομοιοπολικούς δεσμούς τους και να καταστούν ελεύθερα). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της αγωγιμότητας του ημιαγωγού (*φωτοαγωγιμότητα*).

Κάθε ηλεκτρόνιο σθένους που για οποιονδήποτε λόγο απελευθερώνεται, αφήνει πίσω του έναν *ατελή* («σπασμένο») ομοιοπολικό δεσμό ο οποίος αποτελεί μια *οπή* στον κρύσταλλο του ημιαγωγού. Ισοδύναμα, κάθε ηλεκτρόνιο της ζώνης σθένους που ανυψώνεται στη ζώνη αγωγιμότητας αφήνει μια κενή θέση (*κατάσταση*) στη ζώνη σθένους που επίσης ονομάζεται *οπή*. Η οπή συμπεριφέρεται σαν σωμάτιο με *θετικό* φορτίο, αφού δημιουργείται από την *απουσία* ενός ηλεκτρονίου. Επιπλέον, όπως θα δούμε, η οπή έχει τη δυνατότητα να μετακινείται μέσα στον κρύσταλλο, συμβάλλοντας έτσι κι αυτή στην αγωγιμότητα του ημιαγωγού. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε μια απλουστευμένη απεικόνιση, σε δύο διαστάσεις, του κρυσταλλικού πλέγματος ενός ημιαγωγού (μόνο τα 4 ηλεκτρόνια σθένους του κάθε ατόμου έχουν σχεδιαστεί). Κάθε άτομο σχηματίζει 4 ομοιοπολικούς δεσμούς με τα 4 γειτονικά του άτομα:



Ας συνοψίσουμε μερικές σημαντικές φυσικές έννοιες για τους ημιαγωγούς:

Ζώνη σθένους: η ενεργειακή περιοχή που σχηματίζεται από το σύνολο των ενεργειακών σταθμών τις οποίες καταλαμβάνουν τα *δέσμια* ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων του κρυστάλλου (τα ηλεκτρόνια που συμμετέχουν σε ομοιοπολικούς δεσμούς).

Ζώνη αγωγιμότητας: η ενεργειακή περιοχή που σχηματίζεται από το σύνολο των ενεργειακών σταθμών τις οποίες καταλαμβάνουν τα *ελεύθερα* ηλεκτρόνια (αυτά που έσπασαν τους ομοιοπολικούς δεσμούς).

Ενεργειακό χάσμα: η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να σπάσει ένας ομοιοπολικός δεσμός και να απελευθερωθεί ένα ηλεκτρόνιο σθένους.

Οπή: ατελής (σπασμένος) ομοιοπολικός δεσμός στον κρύσταλλο, που αντιστοιχεί σε μια κενή θέση (κατάσταση) στη ζώνη σθένους.

Ας δούμε τώρα το ρόλο της οπής στην αγωγιμότητα του ημιαγωγού: Όταν σε κάποιο σημείο του κρυσταλλικού πλέγματος υπάρχει ατελής δεσμός, είναι σχετικά εύκολο για ένα ηλεκτρόνιο σθένους ενός γειτονικού ατόμου, παίρνοντας ενέργεια από ένα ηλεκτρικό πεδίο, να εγκαταλείψει τον δικό του δεσμό και να καλύψει την οπή αυτή (δεν απαιτείται τώρα ενέργεια E_G , αφού το ηλεκτρόνιο παραμένει στη ζώνη σθένους). Το ηλεκτρόνιο αυτό όμως θα αφήσει πίσω του μια νέα οπή (έναν ατελή δεσμό). Είναι δηλαδή σαν η αρχική οπή να μετατοπίστηκε σε μια νέα θέση, κινούμενη *αντίθετα* από την κατεύθυνση μετατόπισης του ηλεκτρονίου σθένους. Η νέα οπή μπορεί, με τη σειρά της, να καλυφθεί από ένα ηλεκτρόνιο σθένους κάποιου άλλου γειτονικού ατόμου, κι έτσι να έχουμε περαιτέρω μετατόπιση της αρχικής οπής σε κατεύθυνση αντίθετη από αυτή των ηλεκτρονίων, κλπ. Δεδομένου ότι η οπή είναι στην ουσία η *απουσία* ενός (αρνητικά φορτισμένου) ηλεκτρονίου, μπορούμε να τη θεωρήσουμε σαν ισοδύναμη με *θετικό* φορτίο ίσο κατά μέτρο με αυτό του ηλεκτρονίου. Συμπερασματικά:

- Οι οπές μπορούν να θεωρηθούν σαν «πραγματικά» σωμάτια με θετικό φορτίο, των οποίων η κατεύθυνση κίνησης είναι *αντίθετη* από αυτή των ηλεκτρονίων σθένους όταν αυτά (υπό την επίδραση, π.χ., ενός ηλεκτρικού πεδίου) εγκαταλείπουν τους ομοιοπολικούς δεσμούς στους οποίους ανήκουν για να καλύψουν γειτονικούς, ατελείς δεσμούς.

- Η αγωγιμότητα ενός ημιαγωγού οφείλεται τόσο στην κίνηση των *ελεύθερων* ηλεκτρονίων, όσο και στην κίνηση των οπών (ουσιαστικά, των *δέσμιων* ηλεκτρονίων σθένους από δεσμό σε δεσμό).
- Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια έχουν ενέργειες στην περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας, ενώ οι οπές ανήκουν ενεργειακά στη ζώνη σθένους.

Συχνά συμβαίνει να καλύπτεται ένας ατελής δεσμός από ένα *ελεύθερο* ηλεκτρόνιο. Η διαδικασία αυτή της *επανασύνδεσης ζεύγους οπής-ηλεκτρονίου* αντιστοιχεί στη μετάπτωση ενός ηλεκτρονίου από τη ζώνη αγωγιμότητας στη ζώνη σθένους, με αποτέλεσμα την κάλυψη μιας οπής στη ζώνη σθένους.

2.4 Νόμος του Ohm για τα Μέταλλα

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα ηλεκτρόνια σθένους των ατόμων ενός μετάλλου αποσπώνται εύκολα από τα άτομα στα οποία ανήκουν (παίρνοντας ένα μέρος από την ενέργεια που εκλύεται κατά το σχηματισμό του κρυστάλλου) και καθίστανται *ελεύθερα ηλεκτρόνια*, έχοντας ενέργειες στην περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας. Ο χαρακτηρισμός «ελεύθερα» υποδηλώνει ότι τα ηλεκτρόνια αυτά δεν δέχονται σημαντικές δυνάμεις κατά την κίνησή τους μέσα στο κρυσταλλικό πλέγμα, εφόσον δεν πλησιάζουν πολύ στα ιόντα του μετάλλου. Η κίνηση των ηλεκτρονίων διαταράσσεται μόνο από τις συγκρούσεις τους με τα ιόντα, με αποτέλεσμα την επιβράδυνσή τους ή την αλλαγή της κατεύθυνσής τους.

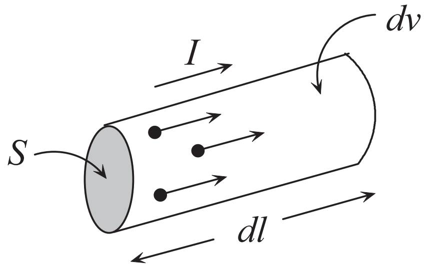
Όταν στο εσωτερικό του μετάλλου δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο[3] ($\vec{E}=0$) η κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων είναι τυχαία και προς όλες τις κατευθύνσεις, έτσι ώστε μακροσκοπικά δεν υφίσταται ηλεκτρικό ρεύμα μέσα στο μέταλλο. Η κατάσταση όμως αλλάζει όταν στο εσωτερικό του μετάλλου υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} \neq 0$. Το πεδίο τότε ασκεί δυνάμεις στα ελεύθερα ηλεκτρόνια και τα επιταχύνει. Η ταχύτητα των ηλεκτρονίων θα αύξανε απεριόριστα αν δεν συνέβαιναν οι συγκρούσεις τους με τα ιόντα. Λόγω των συγκρούσεων αυτών, τα ηλεκτρόνια χάνουν κινητική ενέργεια (η οποία απορροφάται από το κρυσταλλικό πλέγμα και μετατρέπεται σε θερμότητα Joule) και τελικά αποκτούν μια σταθερή μέση ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (*ταχύτητα μεταθέσεως*). Επειδή τα ηλεκτρόνια είναι αρνητικά φορτισμένα, η κατεύθυνση κίνησής τους είναι *αντίθετη* από το $\vec{E}$. Όπως όμως θα δούμε στο Κεφ.6, η κίνηση ενός αρνητικού φορτίου σε μια κατεύθυνση ισοδυναμεί με την κίνηση ενός *θετικού* φορτίου ίσου μέτρου στην *αντίθετη* κατεύθυνση. (Για παράδειγμα, τα δύο φορτία παράγουν το ίδιο μαγνητικό πεδίο αλλά και δέχονται την ίδια δύναμη από ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.) Μπορούμε λοιπόν *συμβατικά* να θεωρήσουμε ότι τα κινούμενα φορτία είναι *θετικά*, μέτρου $+q$, και η κατεύθυνση κίνησής τους είναι *αντίθετη* από την πραγματική φορά κίνησης των ηλεκτρονίων. Έτσι, συμβατικά, το διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ της ταχύτητας των φορτίων θα θεωρείται *ομόρροπο* του πεδίου $\vec{E}$. Όπως αποδεικνύεται πειραματικά, για σχετικά μικρές τιμές τού $\vec{E}$ ισχύει ότι

$$\vec{\upsilon} = \mu \vec{E} \tag{2.1}$$

[3] Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο E τόσο για την ενέργεια όσο και για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Θα είναι όμως πάντοτε ξεκάθαρο τι ακριβώς εννοούμε.

Ο συντελεστής μ καλείται *ευκινησία* του ηλεκτρονίου για το θεωρούμενο μέταλλο. (Όπως θα δούμε αργότερα, η τιμή τού μ επηρεάζεται από τη θερμοκρασία.) Η προσανατολισμένη αυτή κίνηση των ηλεκτρονίων συνιστά ένα *ηλεκτρικό ρεύμα*.

Θεωρούμε τώρα τμήμα αγωγού σε σχήμα λεπτού σύρματος απειροστού μήκους dl και εμβαδού διατομής S. Ο όγκος του σύρματος είναι $dv=Sdl$. Το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης I:



Καλούμε dN τον αριθμό των ελεύθερων ηλεκτρονίων που διέρχονται από τη διατομή S σε χρόνο dt έτσι ώστε να καταλάβουν τον όγκο dv του σύρματος. Το (συμβατικά θετικό) φορτίο που διέρχεται από τη διατομή S σε χρόνο dt και καταλαμβάνει τον όγκο dv ισούται με $dQ= qdN$, όπου q η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου. Παρατηρούμε ότι ένα ηλεκτρόνιο διανύει το μήκος dl του σύρματος σε χρόνο dt. Άρα, η ταχύτητα μεταθέσεως των ηλεκτρονίων είναι, κατά μέτρο, $\upsilon= dl/dt$. Τέλος, η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το σύρμα είναι $I= dQ/dt$.

Η *πυκνότητα ρεύματος* στη θεωρούμενη διατομή S είναι

$$J=\frac{I}{S}=\frac{1}{S}\frac{dQ}{dt}=\frac{qdN}{Sdt}=\frac{qdNdl}{Sdldt}=q\frac{dN}{dv}\frac{dl}{dt} \qquad (2.2)$$

Η ποσότητα

$$n=\frac{dN}{dv} \qquad (2.3)$$

καλείται *ηλεκτρονική πυκνότητα* του μετάλλου και παριστά τη *συγκέντρωση* των ελεύθερων ηλεκτρονίων (πλήθος ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου) στο μέταλλο. Επίσης, λόγω της (2.1), $dl/dt = \upsilon= \mu E$, όπου υ και E τα μέτρα των αντίστοιχων διανυσμάτων. Έτσι, η (2.2) γράφεται

$$J=q\,n\,\upsilon=q\,n\,\mu\,E \qquad (2.4)$$

Το γινόμενο

$$\boxed{\sigma=q\,n\,\mu} \qquad (2.5)$$

καλείται *ειδική αγωγιμότητα* του μετάλλου. Η (2.4) τελικά γράφεται

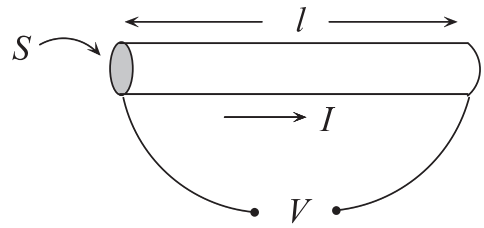
$$J=\sigma\,E \qquad (2.6)$$

ή, σε διανυσματική μορφή,

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \tag{2.7}$$

όπου $\vec{J}$ διάνυσμα μέτρου J με κατεύθυνση σύμφωνη με τη *συμβατική* φορά του ρεύματος. Η σχέση (2.7) εκφράζει τη *γενική μορφή του νόμου του Ohm*. Είναι κατά βάση μια εμπειρική σχέση που βρίσκεται ότι ισχύει για όλα τα μέταλλα, υπό την προϋπόθεση ότι η τιμή E του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι πολύ μεγάλη.

Η γενική σχέση (2.7) αποδείχθηκε για ένα απειροστό τμήμα ενός μετάλλου και, με την έννοια αυτή, είναι ανεξάρτητη από το σχήμα ή τις διαστάσεις του μετάλλου. Θεωρούμε τώρα την ειδική περίπτωση ενός μεταλλικού σύρματος μήκους l και σταθερής διατομής S, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I. Καλούμε V την τάση (διαφορά δυναμικού) στα άκρα του σύρματος:



Η πυκνότητα ρεύματος $J=I/S$ είναι σταθερή κατά μήκος του σύρματος, αφού τα I και S είναι σταθερά. Από το νόμο του *Ohm* (2.6) έπεται ότι και το E είναι σταθερό κατά μήκος του σύρματος, δηλαδή, το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο σύρμα είναι *ομογενές*. Όπως γνωρίζουμε (και όπως θα δείξουμε στο δεύτερο μέρος του βιβλίου), στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $E=V/l$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την (2.6) έχουμε:

$$I = JS = \sigma ES = \sigma \frac{V}{l} S = \frac{V}{l/\sigma S}$$

Ορίζουμε την *ειδική αντίσταση ρ του μετάλλου* και την *αντίσταση R του σύρματος* με τις σχέσεις

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad , \quad R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{\rho l}{S} \tag{2.8}$$

Βρίσκουμε έτσι την *ειδική μορφή του νόμου του Ohm*

$$\boxed{I = \frac{V}{R}} \tag{2.9}$$

Σημειώνουμε ότι η ειδική αντίσταση ρ αφορά γενικά το θεωρούμενο μέταλλο, ανεξάρτητα από το σχήμα ή τις διαστάσεις του, ενώ η αντίσταση R αφορά το συγκεκριμένο σύρμα και εξαρτάται από τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά. Προσέξτε επίσης ότι η ειδική μορφή (2.9) του νόμου του Ohm ισχύει μόνο για μεταλλικά σύρματα σταθερής διατομής. (Γιατί η διατομή του σύρματος απαιτείται να είναι σταθερή;)

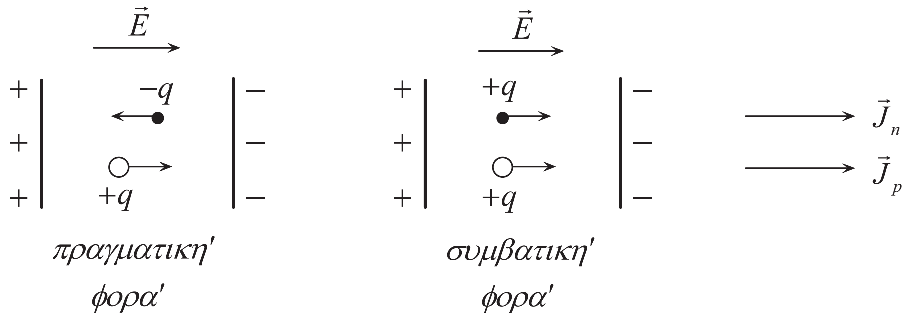
2.5 Νόμος του Ohm για τους Ημιαγωγούς

Όπως γνωρίζουμε, στους ημιαγωγούς οι ηλεκτρικοί φορείς είναι τα (ελεύθερα) ηλεκτρόνια της ζώνης αγωγιμότητας και οι οπές της ζώνης σθένους. Καλούμε n και p τις συγκεντρώσεις (πυκνότητες) ηλεκτρονίων[4] και οπών, αντίστοιχα, όπου με τον όρο *συγκέντρωση* εννοούμε, γενικά, το πλήθος ομοίων πραγμάτων (ηλεκτρονίων, οπών, ατόμων, κλπ.) ανά μονάδα όγκου. Σε *καθαρό ημιαγωγό*, χωρίς δηλαδή εξωτερικές προσμείξεις, ο αριθμός των ηλεκτρονίων είναι ίσος με τον αριθμό των οπών, αφού κάθε οπή έχει προκύψει από την αποδέσμευση ενός ηλεκτρονίου. Άρα,

$$n = p \equiv n_i \qquad (\textit{καθαρός ημιαγωγός}) \tag{2.10}$$

Η κοινή τιμή n_i των δύο πυκνοτήτων στον καθαρό ημιαγωγό καλείται *αυτογενής πυκνότητα*. Αντίθετα, όπως θα δούμε αργότερα, στην περίπτωση *ημιαγωγού προσμείξεως* ισχύει γενικά ότι $n \neq p$.

Όταν μέσα στον κρύσταλλο υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, οι κινήσεις τόσο των ηλεκτρονίων όσο και των οπών προσανατολίζονται σύμφωνα με αυτό, δημιουργώντας δύο παράλληλες πυκνότητες ρεύματος $\vec{J}_n$ και $\vec{J}_p$. Τα διανύσματα αυτά είναι *ομόρροπα* μεταξύ τους και έχουν την κατεύθυνση του πεδίου $\vec{E}$. Για να το καταλάβουμε αυτό, θεωρούμε την κίνηση ενός ηλεκτρονίου και μιας οπής μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, π.χ., στο χώρο ανάμεσα στις πλάκες ενός πυκνωτή:



Στην πραγματικότητα, η οπή κινείται σύμφωνα με το πεδίο $\vec{E}$ ενώ το ηλεκτρόνιο αντίθετα με αυτό. *Συμβατικά*, όμως, η κίνηση του ηλεκτρονίου ισοδυναμεί με κίνηση *θετικού* φορτίου στην αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή ομόρροπα προς την οπή και προς το $\vec{E}$. Έτσι, και τα δύο ρεύματα που προκύπτουν από την κίνηση των φορτίων είναι στην κατεύθυνση του $\vec{E}$.

Τα ρεύματα $\vec{J}_n$ και $\vec{J}_p$ υπακούουν χωριστά στο νόμο του Ohm:

$$\vec{J}_n = \sigma_n \vec{E}\,, \qquad \vec{J}_p = \sigma_p \vec{E} \tag{2.11}$$

όπου οι αντίστοιχες ειδικές αγωγιμότητες ορίζονται

$$\sigma_n = q\,n\,\mu_n\,, \qquad \sigma_p = q\,p\,\mu_p \tag{2.12}$$

[4] Με τον όρο «ηλεκτρόνια» θα εννοούμε στο εξής τα *ελεύθερα* ηλεκτρόνια της ζώνης αγωγιμότητας.

Τα n και p είναι, όπως προαναφέραμε, οι συγκεντρώσεις ηλεκτρονίων και οπών, α-ντίστοιχα, ενώ τα μ_n και μ_p παριστούν τις *ευκινησίες* των ηλεκτρονίων και των οπών για τον θεωρούμενο ημιαγωγό (το q είναι η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου). Όπως βρίσκεται πειραματικά, το μ_p είναι κάπως μικρότερο από το μ_n (μπορείτε να δώσετε μια φυσική εξήγηση γι' αυτό;). Το ολικό ρεύμα είναι

$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_p = (\sigma_n + \sigma_p)\,\vec{E}$$

ή

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\,\vec{E}} \tag{2.13}$$

όπου

$$\boxed{\sigma = \sigma_n + \sigma_p = q\,n\,\mu_n + q\,p\,\mu_p} \tag{2.14}$$

η *ολική ειδική αγωγιμότητα* του υλικού. Για *καθαρό* ημιαγωγό,

$$\sigma_i = q\,n_i\,(\mu_n + \mu_p) \tag{2.15}$$

όπου λάβαμε υπόψη την (2.10). Οι (2.13) και (2.14) εκφράζουν το νόμο του Ohm για έναν ημιαγωγό.

Παρατηρούμε ότι, γενικά, η ειδική αγωγιμότητα σ είναι ένα μέτρο της αγωγιμότητας ενός υλικού το οποίο υπακούει στο νόμο του Ohm. Πράγματι, όσο μεγαλύτερο είναι το σ τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του ρεύματος για δοσμένη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου. Μπορούμε τώρα να καταλάβουμε γιατί σε κανονικές συνθήκες ένα μέταλλο είναι πολύ πιο αγώγιμο από έναν καθαρό ημιαγωγό: Συγκρίνοντας τις ειδικές αγωγιμότητες (2.5) και (2.15) βλέπουμε ότι $\sigma_{μετάλλου} >> \sigma_i$. Αυτό οφείλεται στο ότι η ηλεκτρονική πυκνότητα n του μετάλλου είναι πολύ μεγαλύτερη από την αυτογενή πυκνότητα n_i του καθαρού ημιαγωγού ($n >> n_i$) λόγω του ότι το μέταλλο έχει *εξαρχής* άφθονα ελεύθερα ηλεκτρόνια ενώ ο καθαρός ημιαγωγός, υπό κανονικές συνθήκες, έχει μόνο ένα μικρό αριθμό ελεύθερων ηλεκτρονίων και οπών. Το μειονέκτημα του ημιαγωγού είναι, βέβαια, η παρουσία απαγορευμένης ζώνης, κάτι που δεν υφίσταται στην περίπτωση του μετάλλου.

2.6 Επίδραση της Θερμοκρασίας στην Αγωγιμότητα

Μια βασική διαφορά ανάμεσα στα μέταλλα και τους ημιαγωγούς είναι ο τρόπος που επηρεάζεται η αγωγιμότητά τους όταν μεταβάλλεται η θερμοκρασία. Έχει παρατηρηθεί ότι με την αύξηση της θερμοκρασίας η αντίσταση των μετάλλων αυξάνει, δηλαδή η αγωγιμότητά τους ελαττώνεται. Αντίθετα, η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση της αγωγιμότητας των ημιαγωγών. Για να κατανοήσουμε αυτά τα φαινόμενα θα πρέπει να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζονται από τη θερμοκρασία οι διάφοροι παράγοντες που υπεισέρχονται στις εκφράσεις της ειδικής αγωγιμότητας σε κάθε περίπτωση.

α) Μέταλλα

Η ειδική αγωγιμότητα ενός μετάλλου δίνεται από τη σχέση (2.5): $\sigma=qn\mu$. Η τιμή q του φορτίου του ηλεκτρονίου δεν εξαρτάται, φυσικά, από τη θερμοκρασία. Στα μέταλλα η ηλεκτρονική πυκνότητα n (αριθμός ελεύθερων ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου) είναι σταθερή, ανεξάρτητη της θερμοκρασίας, διότι το πλήθος των ελεύθερων ηλεκτρονίων του μετάλλου (ίσο με τον ολικό αριθμό των ηλεκτρονίων σθένους των ατόμων) είναι εξαρχής δεδομένο και δεν επηρεάζεται από τις μεταβολές της θερμοκρασίας. Όμως, η ευκινησία μ των ηλεκτρονίων *μειώνεται* με τη θερμοκρασία, για τον εξής λόγο: Αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση του πλάτους ταλάντωσης των ιόντων του κρυστάλλου, άρα και αύξηση της πιθανότητας σύγκρουσης των ελεύθερων ηλεκτρονίων με τα ιόντα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να δυσχεραίνεται η κίνηση των ηλεκτρονίων ανάμεσα στα ιόντα και να μειώνεται η μέση ταχύτητα κίνησής τους για δοσμένη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου. Έτσι, βάσει της (2.1), η ευκινησία μ των ηλεκτρονίων ελαττώνεται. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

αύξηση της θερμοκρασίας επιφέρει ελάττωση της αγωγιμότητας του μετάλλου.

β) Καθαροί Ημιαγωγοί

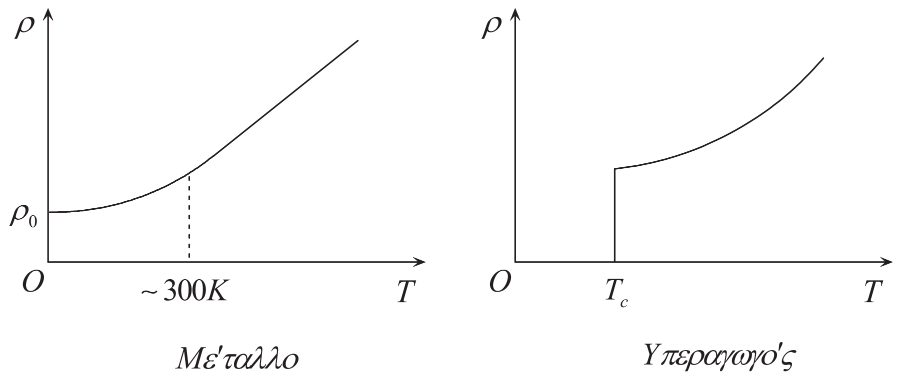
Η ειδική αγωγιμότητα δίνεται από τη σχέση (2.15): $\sigma_i=qn_i(\mu_n+\mu_p)$. Η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση του πλήθους των ζευγών ηλεκτρονίων-οπών στον κρύσταλλο (διότι όλο και περισσότεροι ομοιοπολικοί δεσμοί σπάζουν και όλο και περισσότερα ηλεκτρόνια της ζώνης σθένους διεγείρονται στη ζώνη αγωγιμότητας αφήνοντας πίσω τους οπές), με αποτέλεσμα την αύξηση της αυτογενούς πυκνότητας n_i. Οι ευκινησίες μ_n και μ_p μειώνονται κάπως αλλά όχι τόσο ώστε να ισοσκελιστεί η αύξηση του n_i. Έτσι, τελικά,

αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση της αγωγιμότητας του ημιαγωγού.

Σε αρκετά υψηλές θερμοκρασίες, μάλιστα, οι αγωγιμότητες των μετάλλων και των ημιαγωγών τείνουν να εξισωθούν! Ας μην ξεχνάμε, πάντως, ότι σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος τα μέταλλα είναι ασύγκριτα πιο αγώγιμα σε σχέση με τους ημιαγωγούς. Οι δεύτεροι, εν τούτοις, πλεονεκτούν στο ότι διαθέτουν *δύο* ειδών φορείς, ηλεκτρόνια και οπές, πράγμα που δίνει τη δυνατότητα ανάπτυξης νέων ειδών αγώγιμων υλικών και καθιστά τους ημιαγωγούς πολύ χρήσιμους στις εφαρμογές της Ηλεκτρονικής.

Σημείωση: Αγωγοί και Υπεραγωγοί

Πολλή συζήτηση έχει γίνει τις δύο τελευταίες δεκαετίες για το φαινόμενο της *υπεραγωγιμότητας*. Σε αυτό συνετέλεσαν κάποιες πρόσφατες σημαντικές ανακαλύψεις που κάνουν τα υπεραγώγιμα υλικά να φαίνονται πιο προσιτά για πρακτικές εφαρμογές. Η διαφορά ανάμεσα σε ένα κοινό και ένα υπεραγώγιμο μέταλλο φαίνεται αν συγκρίνουμε τις καμπύλες που παριστούν τη μεταβολή της ειδικής αντίστασης σαν συνάρτηση της απόλυτης θερμοκρασίας:



Είπαμε παραπάνω ότι η αντίσταση ενός μετάλλου οφείλεται στις ταλαντώσεις των ιόντων του κρυσταλλικού πλέγματος. Καθώς η θερμοκρασία T ελαττώνεται, το πλάτος ταλάντωσης γίνεται μικρότερο και η ειδική αντίσταση ρ μειώνεται. Όπως μάλιστα βρίσκεται πειραματικά, σε συνήθεις θερμοκρασίες (T~$300K$) η ειδική αντίσταση είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας. Αν αυτό ισχύει γενικά για κάθε T, θα πρέπει η αντίσταση να μηδενίζεται για $T \to 0$. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα. Ο λόγος είναι πως, εκτός από τις ταλαντώσεις των ιόντων υπάρχουν κι άλλοι παράγοντες που συνεισφέρουν στην αντίσταση του μετάλλου, όπως π.χ. κάποιες ατέλειες της κρυσταλλικής δομής. Σε χαμηλές θερμοκρασίες αυτές οι ατέλειες παίζουν σημαντικό ρόλο (σε αντίθεση με τις ταλαντώσεις των ιόντων που σχεδόν καταπαύουν), με αποτέλεσμα η ειδική αντίσταση να τείνει σε μια πεπερασμένη τιμή ρ_0 καθώς $T \to 0$.

Με τους *υπεραγωγούς* τα πράγματα είναι διαφορετικά, αφού η ειδική τους αντίσταση πέφτει απότομα στο μηδέν όταν η θερμοκρασία γίνει μικρότερη από μια *κρίσιμη θερμοκρασία* T_c χαρακτηριστική για το υλικό. (Σε θερμοκρασίες πάνω από την T_c οι υπεραγωγοί συμπεριφέρονται σαν κοινά μέταλλα.) Για τους περισσότερους υπεραγωγούς (όπως, π.χ., ο Hg ή ο Pb) η κρίσιμη θερμοκρασία είναι λίγοι βαθμοί πάνω από το απόλυτο μηδέν, πράγμα που τους καθιστά δύσκολα αξιοποιήσιμους από πλευράς εφαρμογών. Έχουν όμως τώρα βρεθεί ενώσεις που εμφανίζουν υπεραγώγιμες ιδιότητες σε πολύ υψηλότερες θερμοκρασίες, στην περιοχή των $100K$. Οι νέες αυτές ανακαλύψεις ανοίγουν καινούργιους δρόμους στις εφαρμογές των υπεραγωγών. Τέτοιες εφαρμογές περιλαμβάνουν την κατασκευή υπεραγώγιμων μαγνητών για τη δημιουργία πολύ ισχυρών μαγνητικών πεδίων, την κατασκευή μαγνητόμετρων για τη μέτρηση πολύ ασθενών μαγνητικών πεδίων (ιδιαίτερα χρήσιμα στην ιατρική έρευνα), την αποθήκευση ηλεκτρικής ενέργειας χωρίς απώλειες με τη χρήση γιγαντιαίων υπεραγώγιμων δακτυλίων, κλπ.

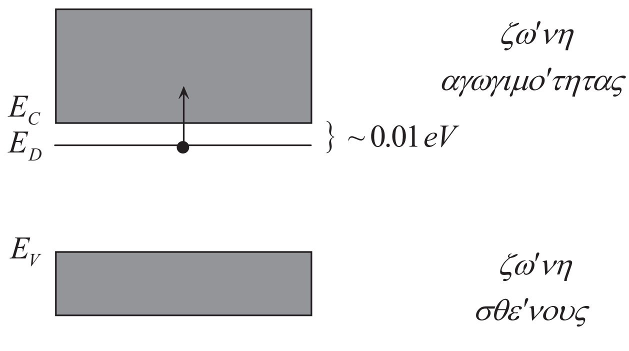
2.7 Ημιαγωγοί Προσμείξεως

Η αγωγιμότητα ενός ημιαγωγού αυξάνει σημαντικά με την προσθήκη κατάλληλων προσμείξεων. Μια πρόσμειξη ανατρέπει την ισορροπία των συγκεντρώσεων ($n=p$) ανάμεσα στα ηλεκτρόνια και τις οπές του καθαρού ημιαγωγού. Διακρίνουμε έτσι δύο τύπους ημιαγωγών προσμείξεως: *ημιαγωγούς τύπου n* όταν $n>p$, και *ημιαγωγούς τύπου p* όταν $p>n$. Λέμε ότι στους ημιαγωγούς τύπου n τα ηλεκτρόνια είναι *φορείς πλειονότητας* και οι οπές *φορείς μειονότητας*, ενώ το αντίστροφο ισχύει για τους ημιαγωγούς τύπου p.

α) Ημιαγωγός τύπου n

Φανταστείτε ότι σε κρύσταλλο καθαρού γερμανίου (Ge) ή πυριτίου (Si) αντικαθιστούμε μερικά από τα τετρασθενή άτομα με άτομα *πεντασθενούς* στοιχείου όπως ο φωσφόρος (P,15) ή το αρσενικό (As,33). Το πεντασθενές στοιχείο καλείται *δότης* διότι τα άτομά του προσφέρουν το ένα παραπάνω ηλεκτρόνιο σθένους που έχουν σε σύγκριση με τα άτομα του καθαρού ημιαγωγού, συμβάλλοντας έτσι στην αγωγιμότητα του κρυστάλλου. Τα 4 από τα 5 ηλεκτρόνια σθένους του ατόμου του δότη σχηματίζουν 4 ομοιοπολικούς δεσμούς με 4 γειτονικά άτομα Ge ή Si, ενώ το 5^{ο} ηλεκτρόνιο είναι αδέσμευτο και εύκολα απελευθερώνεται από το άτομο του δότη, με ενέργεια απόσπασης ~$0.01eV$. Έτσι, με την προσθήκη δότη πετυχαίνουμε να αυξήσουμε τον αριθμό των ελεύθερων ηλεκτρονίων του κρυστάλλου.

Ο ημιαγωγός που προκύπτει από την πρόσμειξη είναι ένα νέο κβαντικό σύστημα, και ως εκ τούτου η δομή των ενεργειακών ζωνών του αναμένουμε να διαφέρει από εκείνη του καθαρού ημιαγωγού. Πού θα «βολέψουμε» το 5^{ο} ηλεκτρόνιο σθένους του δότη *πριν* αυτό αποσπαστεί από το άτομο στο οποίο ανήκει; Όχι στη ζώνη σθένους, αφού αυτή είναι γεμάτη σε χαμηλές θερμοκρασίες. Ούτε όμως και στη ζώνη αγωγιμότητας, αφού το ηλεκτρόνιο δεν είναι ακόμα ελεύθερο. Το 5^{ο} ηλεκτρόνιο του δότη, λοιπόν, βρίσκεται σε μια *νέα* ενεργειακή στάθμη E_D η οποία τώρα εμφανίζεται μέσα στην απαγορευμένη ζώνη, πολύ κοντά στη ζώνη αγωγιμότητας. Με μικρή δόση ενέργειας (~$0.01eV$) το ηλεκτρόνιο διεγείρεται στη ζώνη αγωγιμότητας, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (το E_V παριστά την ανώτερη στάθμη της ζώνης σθένους, ενώ το E_C την κατώτερη στάθμη της ζώνης αγωγιμότητας):

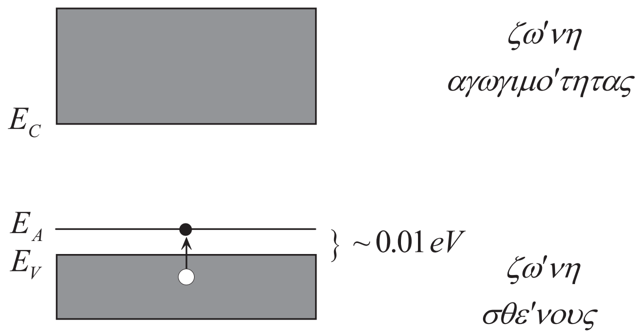


Η προσθήκη δότη σε καθαρό ημιαγωγό προκαλεί όχι μόνο αύξηση των ηλεκτρονίων στη ζώνη αγωγιμότητας αλλά και *ελάττωση των οπών* στη ζώνη σθένους. Αυτό συμβαίνει διότι το πλεόνασμα ελεύθερων ηλεκτρονίων οδηγεί σε αυξημένο αριθμό μεταπτώσεων ηλεκτρονίων από τη ζώνη αγωγιμότητας στη ζώνη σθένους, με αποτέλεσμα την κάλυψη μερικών οπών της ζώνη σθένους.

β) Ημιαγωγός τύπου p

Σε κρύσταλλο καθαρού Ge ή Si αντικαθιστούμε μερικά από τα τετρασθενή άτομα με άτομα *τρισθενούς* στοιχείου όπως το βόριο (B,5), το γάλλιο (Ga,31) ή το ίνδιο (In,49). Το τρισθενές στοιχείο καλείται *αποδέκτης* διότι τα άτομά του, έχοντας ένα ηλεκτρόνιο σθένους λιγότερο σε σύγκριση με τα άτομα του καθαρού ημιαγωγού, μπορούν να δεχθούν προσφορά ενός ηλεκτρονίου από τα άτομα του ημιαγωγού. Το άτομο του αποδέκτη σχηματίζει 3 ομοιοπολικούς δεσμούς με τα 4 γειτονικά άτομα Ge ή Si, ενώ ο 4^{ος} δεσμός είναι ατελής. Ο δεσμός αυτός μπορεί να συμπληρωθεί από ένα ηλεκτρόνιο σθένους κάποιου κοντινού ατόμου Ge ή Si, ενώ στη θέση του ηλεκτρονίου εμφανίζεται μια νέα οπή στον κρύσταλλο (η απαιτούμενη ενέργεια απόσπασης του ηλεκτρονίου από το άτομο του Ge ή του Si είναι ~0.01eV). Έτσι, με την προσθήκη αποδέκτη πετυχαίνουμε να αυξήσουμε τον αριθμό των οπών του κρυστάλλου.

Ο αποδέκτης εισάγει μια νέα, *κενή* στάθμη E_A μέσα στην απαγορευμένη ζώνη και πολύ κοντά στη ζώνη σθένους. Με μικρή δόση ενέργειας (~0.01eV) ένα ηλεκτρόνιο της ζώνης σθένους μπορεί εύκολα να διεγερθεί στη στάθμη αυτή, αφήνοντας πίσω του μια οπή:



Η προσθήκη αποδέκτη σε καθαρό ημιαγωγό προκαλεί όχι μόνο αύξηση των οπών στη ζώνη σθένους αλλά και *ελάττωση των ηλεκτρονίων* στη ζώνη αγωγιμότητας. Αυτό συμβαίνει διότι το πλεόνασμα οπών οδηγεί σε αυξημένο αριθμό επανασυνδέσεων ηλεκτρονίων-οπών με μεταπτώσεις ηλεκτρονίων από τη ζώνη αγωγιμότητας στη ζώνη σθένους, πράγμα που έχει σαν αποτέλεσμα την κάλυψη μερικών οπών στη ζώνη σθένους και την αντίστοιχη ελάττωση του αριθμού των ηλεκτρονίων στη ζώνη αγωγιμότητας.

Είναι εντυπωσιακό ότι και η ελάχιστη πρόσμειξη (π.χ., ένα άτομο δότη ή αποδέκτη ανά 10^6 άτομα καθαρού ημιαγωγού) είναι αρκετή για να αυξήσει σημαντικά (περίπου 10 φορές) την αγωγιμότητα του ημιαγωγού σε συνήθεις θερμοκρασίες.

2.8 Νόμος Δράσεως των Μαζών

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέραμε ότι μια πρόσμειξη σε καθαρό ημιαγωγό αυξάνει τη συγκέντρωση ενός φορέα (των ηλεκτρονίων ή των οπών) ενώ παράλληλα ελαττώνει τη συγκέντρωση του άλλου φορέα. (Θυμίζουμε ότι στον καθαρό ημιαγωγό οι δύο συγκεντρώσεις έχουν κοινή τιμή, ίση με την αυτογενή πυκνότητα n_i .) Αυτή η αυξομείωση δεν γίνεται με τυχαίο τρόπο αλλά υπακούει σε ένα συγκεκριμένο νόμο που ονομάζεται *νόμος δράσεως των μαζών*.

Καλούμε n και p τις συγκεντρώσεις (πυκνότητες) ηλεκτρονίων και οπών, αντίστοιχα, σε έναν ημιαγωγό προσμείξεως οποιουδήποτε τύπου. Όταν ο ημιαγωγός βρίσκεται σε καθαρή μορφή (πριν, δηλαδή, από την πρόσμειξη), $n=p=n_i$. Μετά την πρόσμειξη, όμως, $n \neq p$ (με εξαίρεση μια ειδική περίπτωση που θα μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο). Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι οι τιμές των συγκεντρώσεων n, p και n_i έχουν μετρηθεί σε συνθήκες *θερμικής ισορροπίας*, δηλαδή *σε δοσμένη, σταθερή θερμοκρασία*. Ο νόμος δράσεως των μαζών μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Σε συνθήκες θερμικής ισορροπίας, το γινόμενο np των συγκεντρώσεων η-λεκτρονίων και οπών σε δοσμένο ημιαγωγό είναι σταθερό, ανεξάρτητο από το είδος ή την ποσότητα των προσμείξεων που ο ημιαγωγός αυτός περιέχει.

Για να δώσουμε μαθηματική έκφραση στο νόμο αυτό, γράφουμε

$$(np)_{\text{τυχαία πρόσμειξη}} = (np)_{\text{καθαρός ημιαγωγός}} \quad \Rightarrow \quad np = n_i n_i \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{n\,p = n_i^2} \qquad (2.16)$$

Παρατηρούμε ότι το n_i είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας και αυξάνει με αυτή (βλ.Παρ.2.6). Έτσι, η σχέση (2.16) ισχύει *για δοσμένη, σταθερή θερμοκρασία*.

Με το νόμο δράσεως των μαζών μπορούμε εύκολα να εξηγήσουμε γιατί μια πρόσμειξη σε καθαρό ημιαγωγό αυξάνει την αγωγιμότητά του. Η ειδική αγωγιμότητα ε-νός ημιαγωγού, ανεξάρτητα αν αυτός έχει υποστεί πρόσμειξη ή όχι, δίνεται από την έκφραση (2.14):

$$\sigma = qn\mu_n + qp\mu_p$$

Επειδή τα μ_n και μ_p δεν διαφέρουν πολύ, μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση

$$\mu_n \approx \mu_p \equiv \mu$$

Τότε,

$$\sigma = q\mu\,(n+p) \qquad (2.17)$$

Παρατηρούμε ότι η ειδική αγωγιμότητα εξαρτάται από το *άθροισμα* των συ-γκεντρώσεων ηλεκτρονίων και οπών. Χρησιμοποιώντας γνωστή ταυτότητα της άλγε-βρας και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.16), έχουμε:

$$(n+p)^2 = (n-p)^2 + 4np = (n-p)^2 + 4n_i^2 \;\Rightarrow$$
$$(n+p)^2 = (n-p)^2 + \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho o'$$

Έτσι, η (2.17) δίνει

$$\sigma = q\mu\sqrt{(n-p)^2 + \sigma\tau\alpha\theta.} \qquad (2.18)$$

όπου η σταθερή ποσότητα μέσα στη ρίζα ισούται με $4n_i^2$ και, φυσικά, εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Από την (2.18) βλέπουμε ότι η ειδική αγωγιμότητα σ γίνεται *ελάχι-στη* όταν $n\text{-}p = 0 \Leftrightarrow n = p$, πράγμα που συμβαίνει όταν ο ημιαγωγός είναι *καθαρός*. Έτσι, με την παραμικρή πρόσμειξη θα έχουμε $n\text{-}p \neq 0 \Leftrightarrow n \neq p$ και το σ θα αυξηθεί, με την προϋπόθεση ότι η θερμοκρασία μένει *σταθερή*. Με την αύξηση του ποσού της πρόσμειξης αυξάνει και η διαφορά $|n\text{-}p|$, άρα αυξάνει το σ βάσει της (2.18).

Τίθεται τώρα το εξής ερώτημα: Αφού η αύξηση της πρόσμειξης αυξάνει την αγω-γιμότητα, γιατί στην πράξη οι προσμείξεις που γίνονται στους ημιαγωγούς περιορίζο-νται σε ένα ελάχιστο ποσοστό της τάξης του 0.0001% ; Ας μην ξεχνάμε εδώ ότι η χρησιμότητα των ημιαγωγών δεν συνίσταται τόσο στο βαθμό της αγωγιμότητάς τους όσο στον *τρόπο* με τον οποίο αυτή γίνεται, με τη συμβολή δηλαδή *δύο* ειδών φορέων. Υπερβολικά μεγάλη πρόσμειξη θα αύξανε μεν σημαντικά τους φορείς πλειονότητας αλλά ουσιαστικά θα εξαφάνιζε τους φορείς μειονότητας! Σημειώνουμε επίσης ότι ούτε η υπερβολικά μεγάλη αύξηση της θερμοκρασίας ενδείκνυται γιατί η αυτογενής πυκνότητα n_i τείνει να γίνει συγκρίσιμη με τη συγκέντρωση των ατόμων του δότη ή του αποδέκτη, ο ρόλος των ατόμων πρόσμειξης στην αγωγιμότητα αρχίζει να υποβαθμίζεται, και ο ημιαγωγός συμπεριφέρεται σαν να είναι καθαρός, πράγμα ανεπιθύμητο στις ηλεκτρονικές διατάξεις που βασίζονται σε ημιαγωγούς προσμείξεως.

Εφαρμογή: Θα υπολογίσουμε τις συγκεντρώσεις των φορέων *μειονότητας* σε ημιαγωγούς τύπων *n* και *p*. Δίνεται η αυτογενής πυκνότητα n_i του καθαρού ημιαγωγού καθώς και οι συγκεντρώσεις N_D και N_A των ατόμων του δότη και του αποδέκτη, αντίστοιχα. (Η θερμοκρασία θεωρείται δοσμένη και σταθερή.)

α) *Ημιαγωγός τύπου n*: Σχεδόν όλα τα άτομα του δότη είναι ιονισμένα, δηλαδή έχουν συνεισφέρει το 5^{ο} ηλεκτρόνιο σθένους τους το οποίο κινείται ως ελεύθερο ηλεκτρόνιο με ενέργειες στην περιοχή της ζώνης αγωγιμότητας. Από την άλλη μεριά, σχεδόν όλα τα ηλεκτρόνια της ζώνης αγωγιμότητας οφείλονται στα άτομα του δότη, αφού μεγάλο μέρος των ηλεκτρονίων που προϋπήρχαν στον καθαρό ημιαγωγό έχουν ήδη επανασυνδεθεί με οπές στη ζώνη σθένους. Άρα, είναι λογικό να κάνουμε την προσέγγιση $n \approx N_D$. Από το νόμο δράσεως των μαζών (2.16) βρίσκουμε τη συγκέντρωση των οπών, οι οποίες αποτελούν τους φορείς μειονότητας:

$$p = \frac{n_i^2}{N_D} \tag{2.19}$$

β) *Ημιαγωγός τύπου p*: Σχεδόν όλες οι οπές στη ζώνη σθένους οφείλονται στον αποδέκτη. Έτσι, $p \approx N_A$. Η (2.16) δίνει τη συγκέντρωση των ηλεκτρονίων, που εδώ είναι φορείς μειονότητας:

$$n = \frac{n_i^2}{N_A} \tag{2.20}$$

2.9 Μεικτές Προσμείξεις σε Ημιαγωγούς

Σε έναν ημιαγωγό προσμείξεως είναι δυνατό να συνυπάρχουν άτομα δότη με άτομα αποδέκτη. Ο σύνθετος αυτός ημιαγωγός θα συμπεριφέρεται σαν τύπου *n* ή τύπου *p*, ανάλογα με το αν οι φορείς πλειονότητας είναι τα ηλεκτρόνια ή οι οπές, αντίστοιχα. Καλούμε N_D τη συγκέντρωση (πεντασθενών) ατόμων δότη και N_A τη συγκέντρωση (τρισθενών) ατόμων αποδέκτη. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Αν $N_D=N_A$, τότε $n=p=n_i$, όπου n_i η αυτογενής πυκνότητα του καθαρού ημιαγωγού. Δηλαδή, οι δότες εξουδετερώνονται πλήρως από τους αποδέκτες και ο ημιαγωγός συμπεριφέρεται σαν να είναι *καθαρός*.

β) Αν $N_D>N_A$, τότε $n>p$ και ο ημιαγωγός είναι *τύπου n*. Φορείς πλειονότητας είναι τα ηλεκτρόνια. Αν δεν υπήρχε ο αποδέκτης, η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων θα ήταν ίση περίπου με αυτή των ατόμων του δότη (βλ. Εφαρμογή, Παρ.2.8). Τα άτομα όμως του αποδέκτη εξουδετερώνουν μέρος των ηλεκτρονίων. Υποθέτοντας ότι $N_D>>N_A$, μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση $n \approx N_D - N_A$. Από το νόμο δράσεως των μαζών (2.16) βρίσκουμε τη συγκέντρωση των οπών, που είναι οι φορείς μειονότητας:

$$p = \frac{n_i^2}{N_D - N_A} \tag{2.21}$$

γ) Αν $N_A > N_D$, τότε $p > n$ και ο ημιαγωγός είναι *τύπου p*. Η συγκέντρωση των οπών (φορέων πλειονότητας) είναι $p \approx N_A - N_D$ (υποθέτοντας ότι $N_A >> N_D$), ενώ η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων βρίσκεται με τη βοήθεια της (2.16):

$$n = \frac{n_i^2}{N_A - N_D} \tag{2.22}$$

2.10 Ρεύματα Διάχυσης στους Ημιαγωγούς

Τα ρεύματα διάχυσης διαφέρουν ως προς την αιτία της δημιουργίας τους από αυτά που μελετήσαμε ως τώρα: αποτελούν *στατιστικό* φαινόμενο και δεν σχετίζονται με την ύπαρξη ηλεκτρικού πεδίου (δεν υπακούουν, δηλαδή, στο νόμο του Ohm). Οφείλονται σε *ανομοιόμορφη κατανομή φορέων* (ηλεκτρονίων ή οπών) στον κρύσταλλο, έτσι ώστε οι συγκεντρώσεις n και p να μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο:

$$n = n(x, y, z)\ , \quad p = p(x, y, z)$$

Τούτο έχει σαν αποτέλεσμα τη μεταφορά ηλεκτρονίων ή οπών από περιοχές μεγαλύτερης συγκέντρωσης σε περιοχές μικρότερης συγκέντρωσης, έτσι ώστε η κατανομή των φορέων να γίνει τελικά ομοιόμορφη. Η κίνηση αυτή των φορέων συνιστά το *ρεύμα διάχυσης*.

Οι πυκνότητες των ρευμάτων διάχυσης $\vec{J}_p$ και $\vec{J}_n$ για τις οπές και τα ηλεκτρόνια, αντίστοιχα, δίνονται από το *νόμο του Fick*:

$$\vec{J}_p = -qD_p \vec{\nabla} p\ , \qquad \vec{J}_n = +qD_n \vec{\nabla} n \tag{2.23}$$

όπου q η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου και D_p , D_n δύο σταθερές (*σταθερές διάχυσης* για τις οπές και τα ηλεκτρόνια). Τονίζουμε ότι *η φορά τού $\vec{J}_n$ είναι συμβατική*, δηλαδή *αντίθετη* από την πραγματική φορά κίνησης των ηλεκτρονίων (για τις οπές όμως που είναι θετικά φορτισμένες, το $\vec{J}_p$ έχει τη φορά της κίνησής τους). Στην περίπτωση που η κατανομή των φορέων στο χώρο είναι ομοιόμορφη, p=*σταθερό* και n=*σταθερό*, έτσι ώστε $\vec{J}_p = 0$ και $\vec{J}_n = 0$.

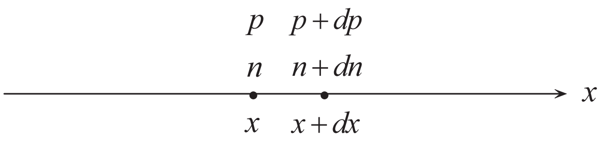
Αν τα n και p μεταβάλλονται μόνο σε μία διεύθυνση, έστω x, τότε $n = n(x)$, $p = p(x)$, και τα ρεύματα (2.23) ανάγονται στις αλγεβρικές εκφράσεις

$$J_p = -qD_p \frac{dp}{dx}\ , \qquad J_n = +qD_n \frac{dn}{dx} \tag{2.24}$$

Η εκλογή των προσήμων στις σχέσεις (2.23) και (2.24) έγινε με βάση την ακόλουθη φυσική απαίτηση:

Η πραγματική φορά κίνησης των φορέων είναι από περιοχές μεγαλύτερης πυκνότητας σε περιοχές μικρότερης πυκνότητας.

Ας ελέγξουμε λοιπόν την ορθότητα των προσήμων μας. Χάριν απλότητας, θεωρούμε ότι $n = n(x)$ και $p = p(x)$:



Θεωρούμε μια κατανομή ηλεκτρονίων και οπών κατά μήκος του άξονα x. Έστω n και p οι αντίστοιχες συγκεντρώσεις στη θέση x κάποια χρονική στιγμή. Την ίδια στιγμή, σε μια γειτονική θέση $x+dx$ οι συγκεντρώσεις είναι $n+dn$ και $p+dp$, όπου τα dn και dp παριστούν τις μεταβολές των συγκεντρώσεων από τη θέση x στη θέση $x+dx$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $dn>0$ και $dp>0$, έτσι ώστε $n+dn>n$ και $p+dp>p$. Δηλαδή, οι συγκεντρώσεις αυξάνουν προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x. Με βάση την παρατήρηση που κάναμε παραπάνω, τόσο τα ηλεκτρόνια όσο και οι οπές θα πρέπει να κινούνται προς την *αρνητική* κατεύθυνση του άξονα (προς τα *αριστερά*), δηλαδή από τη θέση μεγαλύτερης συγκέντρωσης προς τη θέση μικρότερης συγκέντρωσης. Μας το εξασφαλίζουν αυτό τα πρόσημα στις σχέσεις (2.24);

Στην περίπτωση των οπών έχουμε ότι

$$\frac{dp}{dx} > 0 \quad \overset{(2.24)}{\Rightarrow} \quad J_p < 0$$

Έτσι, βάσει της (2.24), το ρεύμα $\vec{J}_p$ έχει κατεύθυνση προς την αρνητική φορά του άξονα x (προς τα αριστερά). Επειδή οι οπές είναι θετικά φορτισμένες, η φορά κίνησής τους συμπίπτει με αυτήν του $\vec{J}_p$, είναι δηλαδή προς τα αριστερά. Αυτό συμφωνεί απόλυτα με την πρόβλεψη που κάναμε παραπάνω.

Για τα ηλεκτρόνια έχουμε ότι

$$\frac{dn}{dx} > 0 \quad \overset{(2.24)}{\Rightarrow} \quad J_n > 0$$

Βάσει της (2.24), λοιπόν, το ρεύμα $\vec{J}_n$ έχει κατεύθυνση προς την θετική φορά του άξονα x (προς τα δεξιά). Αυτή όμως είναι η *συμβατική* φορά του ρεύματος. Η *πραγματική* φορά κίνησης των (αρνητικά φορτισμένων) ηλεκτρονίων είναι αντίθετη της συμβατικής, δηλαδή προς τα αριστερά. Αυτό συμφωνεί και πάλι με την πρόβλεψη που κάναμε νωρίτερα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Να περιγραφεί η δομή των ενεργειακών ζωνών στα μέταλλα, τους μονωτές και τους ημιαγωγούς. Πώς η δομή αυτή ερμηνεύει την ηλεκτρική αγωγιμότητα των στερεών αυτών; Πώς εξηγείται η ηλεκτρική αγωγιμότητα των κρυστάλλων του νατρίου και του μαγνησίου; Πού οφείλεται η διαφορά αγωγιμότητας ανάμεσα στο διαμάντι και το γερμάνιο;

2. Πώς εξηγείτε το ότι το διαμάντι είναι διαφανές ενώ το νάτριο και το γερμάνιο είναι αδιαφανή; (Φωτόνια ορατής ακτινοβολίας: 1.5-3 eV.)

3. Θεωρούμε κρυστάλλους τριών διαφορετικών στερεών: (α) Ο κρύσταλλος *Α* απορροφά κάθε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει σε αυτόν. (β) Ο κρύσταλλος *Β* απορροφά κάθε ακτινοβολία της οποίας τα φωτόνια έχουν ενέργεια τουλάχιστον 5.9 eV. (γ) Ο κρύσταλλος *Γ* απορροφά ακτινοβολίες με ενέργεια τουλάχιστον 0.8 eV. Να γίνει ένα ποιοτικό διάγραμμα των ανώτερων ενεργειακών ζωνών για κάθε κρύσταλλο και να περιγραφούν οι ηλεκτρικές και οι οπτικές ιδιότητες των κρυστάλλων. (Φωτόνια ορατής ακτινοβολίας: 1.5-3 eV.)

4. Θεωρούμε δύο κρυστάλλους στερεών. Ο κρύσταλλος *Α* απορροφά κάθε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει σε αυτόν, ενώ ο κρύσταλλος *Β* απορροφά κάθε ακτινοβολία της οποίας τα φωτόνια έχουν ενέργεια τουλάχιστον 0.9 eV. Οι κρύσταλλοι βρίσκονται αρχικά σε ένα ψυγείο και στη συνέχεια τοποθετούνται σε ένα θερμοθάλαμο. Πώς θα μεταβληθεί η ηλεκτρική αντίσταση του κάθε κρυστάλλου; Εξηγήστε.

5. Να περιγραφούν οι φυσικές σημασίες των παρακάτω εννοιών:
α) Ζώνη αγωγιμότητας μετάλλου.
β) Ζώνη σθένους και ζώνη αγωγιμότητας ημιαγωγού.
γ) Ενεργειακό χάσμα ημιαγωγού.
δ) Οπή σε ημιαγωγό.

6. Να αποδειχθεί η γενική μορφή του νόμου του Ohm για ένα μέταλλο, καθώς και η ειδική μορφή του νόμου για ένα μεταλλικό σύρμα σταθερής διατομής.

7. Με βάση το νόμο του Ohm και τις εκφράσεις της ειδικής αγωγιμότητας, να εξηγηθεί γιατί ένα μέταλλο είναι πολύ πιο αγώγιμο από έναν καθαρό ημιαγωγό.

8. Να περιγραφεί η επίδραση της θερμοκρασίας στην αγωγιμότητα των μετάλλων και των ημιαγωγών. Ποιοι φυσικοί μηχανισμοί λαμβάνουν χώρα; Πώς επηρεάζονται τα φυσικά μεγέθη που υπεισέρχονται στις εκφράσεις της ειδικής αγωγιμότητας σε κάθε περίπτωση; Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στους κοινούς αγωγούς και τους υπεραγωγούς;

9. Να περιγραφεί ο φυσικός μηχανισμός με τον οποίο μια πρόσμειξη τύπου *n* ή τύπου *p* συμβάλλει στην αγωγιμότητα ενός ημιαγωγού. Ποιοι είναι οι φορείς μειονότητας σε κάθε περίπτωση;

10. Να διατυπωθεί ο νόμος δράσεως των μαζών. Με βάση αυτόν, να εξηγηθεί γιατί μια πρόσμειξη αυξάνει την αγωγιμότητα ενός ημιαγωγού.

11. Θεωρούμε δείγμα μοναδιαίου όγκου κρυστάλλου καθαρού γερμανίου (Ge) σε σταθερή θερμοκρασία. Το πλήθος των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας στο δείγμα είναι ίσο με α. Αντικαθιστούμε τώρα N άτομα Ge με άτομα φωσφόρου (P,15) και άλλα $10\,N$ άτομα Ge με άτομα βορίου (B,5). Ποιο θα είναι το νέο πλήθος των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας;

12. Μερικά διαμάντια αντί να είναι τελείως διαφανή έχουν ένα βαθύ μπλε χρώμα που οφείλεται σε πρόσμειξη ατόμων βορίου (B,5). Πώς μεταβάλλει η πρόσμειξη το διάγραμμα των ενεργειακών ζωνών του καθαρού διαμαντιού; Σχεδιάστε το διάγραμμα ζωνών του μπλε διαμαντιού με δεδομένο ότι $E_G \simeq 6\,eV$ και ότι τα φωτόνια της «ερυθρής» περιοχής του φάσματος του φωτός έχουν ενέργεια της τάξης των $1.7\,eV$. (Θεωρούμε προσεγγιστικά ότι το φως έχει μια «μπλε» και μια «κόκκινη» συνιστώσα.)

13. Σε τι διαφέρουν ως προς τα αίτια της δημιουργίας τους τα ρεύματα διάχυσης από εκείνα που υπακούουν στο νόμο του Ohm; Να δοθούν οι εκφράσεις των ρευμάτων διάχυσης ηλεκτρονίων και οπών και να εξηγηθεί η επιλογή των προσήμων στις εκφράσεις αυτές.

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Θεώρημα Stokes (Γενική Μορφή):

$$\int_{Χωρος} "Παραγωγος"\ Πεδιου \ = \ \int_{\substack{Οριο \\ Χωρου}} Πεδιο$$

Παραδείγματα:

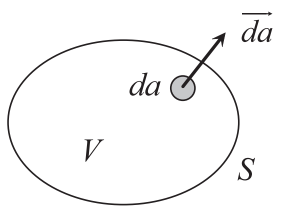
1. Θεώρημα Newton-Leibniz (ο «χώρος» είναι ευθύγραμμο τμήμα *ab*, και το όριό του τα σημεία *a* και *b*):

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = \left[f(x) \right]_a^b = f(b) - f(a)$$

Γενίκευση για επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (ο «χώρος» είναι ανοιχτή καμπύλη *ab* στον R^3, και το όριό του τα σημεία *a* και *b*):

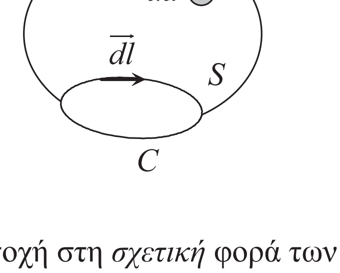
$$\int_a^b (\vec{\nabla}\Phi)\cdot\overrightarrow{dl} = \int_a^b d\Phi = \Phi(b) - \Phi(a)$$

2. Θεώρημα Gauss (ο «χώρος» είναι όγκος *V* που έχει ως όριο κλειστή επιφάνεια *S*):



$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,dv = \oint_S \vec{A}\cdot\overrightarrow{da}$$

3. Θεώρημα Stokes, *ειδική* μορφή (ο «χώρος» είναι ανοιχτή επιφάνεια *S* που περατούται σε κλειστή καμπύλη *C*):



$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\overrightarrow{da} = \oint_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}$$

(Προσοχή στη *σχετική* φορά των $\overrightarrow{dl}$ και $\overrightarrow{da}$!)

Ειδικοί Τύποι Πεδίων:

Αστρόβιλο Πεδίο $\vec{A}(\vec{r})$	**Σωληνωτό Πεδίο** $\vec{B}(\vec{r})$
$\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$
$\exists\,\Phi(\vec{r})$: $\vec{A}=\vec{\nabla}\Phi$	$\exists\,\vec{A}(\vec{r})$: $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$
$\int_a^b \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}$ *ανεξάρτητο του δρόμου που συνδέει τα σημεία a και b*	$\int_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{da}$ *εξαρτάται μόνο από το όριο (κλειστή καμπύλη) της επιφάνειας* S*, όχι από την ίδια την S*
$\oint_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}=0$ (C=κλειστή καμπύλη)	$\oint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{da}=0$ (S=κλειστή επιφάνεια)
Ανοιχτές (όχι κλειστές) δυναμικές γραμμές που ξεκινούν και καταλήγουν στις «πηγές» του πεδίου (π.χ., φορτία)	*Κλειστές* δυναμικές γραμμές (χωρίς αρχή και τέλος) - Όχι μεμονωμένες σημειακές πηγές (πόλοι)

Συντηρητικό Πεδίο Δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r})$
Έργο πάνω σε υπόθεμα: $W_{AB}=\int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}$ *ανεξάρτητο του δρόμου AB*
$W=\oint_C \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl}=0$ για *κλειστή* διαδρομή C
$\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ (*αστρόβιλο*)
$\exists\,U(\vec{r})$: $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$, $W_{AB}=U(\vec{r}_A)-U(\vec{r}_B)\equiv U_A-U_B$ (U = *δυναμική ενέργεια υποθέματος*)
$E=E_{\kappa\iota\nu}+U=\sigma\tau\alpha\theta.$ (*διατήρηση μηχανικής ενέργειας*)

ΣΤΑΤΙΚΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Το ηλεκτρικό πεδίο ($\vec{E}$) παράγεται από ηλεκτρικά φορτία και επιδρά σε *όλα* τα φορτία, ανεξάρτητα από την κίνησή τους. Το μαγνητικό πεδίο ($\vec{B}$) παράγεται από *κινούμενα* ηλεκτρικά φορτία και επιδρά μόνο σε *κινούμενα* φορτία (ή, ηλεκτρικά ρεύματα). Τα πεδία αυτά μπορεί να είναι *στατικά* (χρονικά-αμετάβλητα) ή *χρονικά-μεταβαλλόμενα*. Γενικά, ένα πεδίο $\vec{A}$ είναι στατικό αν $\partial \vec{A} / \partial t = 0$, έτσι ώστε $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$, ενώ είναι χρονικά-μεταβαλλόμενο αν έχει τη μορφή $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$.

Τα στατικά ηλεκτρικά πεδία διέπονται από το νόμο του Coulomb, ενώ τα στατικά μαγνητικά πεδία από το νόμο Biot-Savart. Οι νόμοι αυτοί οδηγούν σε ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων που μπορούν να γραφούν σε διαφορική ή σε ολοκληρωτική μορφή, ως εξής:

$$(\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = Q_{in} / \varepsilon_0$$

$$(\beta) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{da} = 0$$

$$(\gamma) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

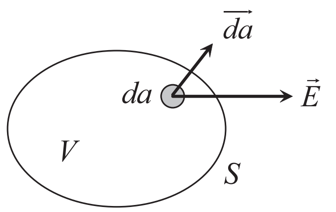
$$(\delta) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{in}$$

Οι (α) και (γ) αφορούν το *ηλεκτροστατικό* πεδίο και είναι συνέπειες του νόμου του Coulomb, ενώ οι (β) και (δ) αφορούν το *στατικό* μαγνητικό πεδίο και είναι συνέπειες του νόμου Biot-Savart. Ειδικά, σύμφωνα με την (γ), το ηλεκτρο*στατικό* πεδίο είναι *αστρόβιλο* και έχει *ανοιχτές* δυναμικές γραμμές που ξεκινούν και καταλήγουν σε ηλεκτρικά φορτία. Επί πλέον, σύμφωνα με την (β), το μαγνητικό πεδίο είναι *σωληνωτό* και οι δυναμικές του γραμμές είναι *κλειστές*, αφού δεν υπάρχουν μεμονωμένοι μαγνητικοί πόλοι από τους οποίους οι γραμμές αυτές θα μπορούσαν να ξεκινούν ή στους οποίους θα μπορούσαν να καταλήγουν.

Οι εξισώσεις αυτές δίνουν την λανθασμένη εντύπωση ότι υπάρχουν δύο πεδία, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό, που είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Αυτό όμως αληθεύει μόνο στην περίπτωση των *στατικών* πεδίων! Πράγματι, για χρονικά-μεταβαλλόμενα Η/Μ πεδία, οι μεν (α) και (β) εξακολουθούν να ισχύουν, οι (γ) και (δ), όμως, παίρνουν νέες μορφές που εμπεριέχουν ταυτόχρονα το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, έτσι ώστε η μεταβολή του ενός να επηρεάζει άμεσα το άλλο.

Νόμος του Gauss:

Αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του νόμου του Coulomb, αλλά εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση που το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι χρονικά-μεταβαλλόμενο:



$$\oint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

(όπου Q_{in} το ολικό φορτίο στο *εσωτερικό* της κλειστής επιφάνειας *S*). Με χρήση του θεωρήματος Gauss, η παραπάνω σχέση γράφεται σε ισοδύναμη διαφορική μορφή, ως εξής:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

όπου ρ = *πυκνότητα φορτίου*: $Q_{in} = \int_V \rho \, dv$.

Προσοχή: Το ίδιο το πεδίο $\vec{E}$ οφείλεται σε *όλα* τα φορτία, εσωτερικά *και* εξωτερικά ως προς την *S*, αλλά η *ροή* του πεδίου μέσα από την *S* (το κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα) εξαρτάται μόνο από τα *εσωτερικά* φορτία!

Ηλεκτρο*στατικό* Πεδίο $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ - Ηλεκτρικό Δυναμικό:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad (\textit{αστρόβιλο} \text{ πεδίο})$$

Τότε,

$$\exists V(\vec{r}): \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad (V = \textit{ηλεκτρικό δυναμικό})$$

Η διαφορά δυναμικού (τάση) ανάμεσα σε δύο σημεία ενός ηλεκτροστατικού πεδίου είναι

$$\int_a^b \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = V_a - V_b$$

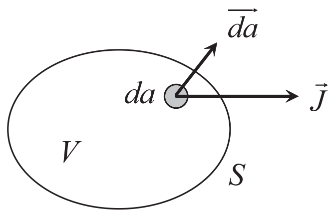
Η σχέση $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ *δεν* ισχύει στην περίπτωση ενός χρονικά-μεταβαλλόμενου Η/Μ πεδίου. Δηλαδή, το χρονικά-μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο *δεν* είναι αστρόβιλο.

Το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι *συντηρητικό*. Η δυναμική ενέργεια ενός φορτίου *q* μέσα στο πεδίο αυτό είναι

$$U(\vec{r}) = q\, V(\vec{r})$$

Πυκνότητα Ρεύματος $\vec{J}$:

Μπορεί να οριστεί με βάση τη σχέση



$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{da}$$

όπου η επιφάνεια S μπορεί να είναι ανοιχτή ή κλειστή, και όπου I είναι η ολική ένταση ρεύματος (ολικό φορτίο ανά μονάδα χρόνου) που διαπερνά την S. Η πυκνότητα ρεύματος και η πυκνότητα *κινούμενου* φορτίου συνδέονται με τη σχέση

$$\vec{J} = \rho_\kappa \vec{\upsilon}$$

(όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα κίνησης του φορτίου).

Εξίσωση Συνεχείας:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{(όπου } \rho = \text{πυκνότητα } \underline{\text{ολικού}} \text{ φορτίου)}$$

Φυσική σημασία: Εκφράζει τη *διατήρηση του φορτίου*.

Νόμος του Ohm για Αγώγιμο Υλικό:

Αποτελεί προσεγγιστικό νόμο που ισχύει υπό προϋποθέσεις (σχετικά μικρές τιμές του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$), και δεν αποτελεί ακριβή νόμο του ηλεκτρομαγνητισμού.

Γενική μορφή: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (όπου σ = *ειδική αγωγιμότητα υλικού μέσου*)

Για μεταλλικό σύρμα αντίστασης R, υπό τάση ΔV στα άκρα του,

$$I = \frac{\Delta V}{R} \qquad \text{(ειδική μορφή)}$$

Νόμος του Gauss για το Μαγνητισμό:

Έχει γενική ισχύ, ακόμα και στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ δεν είναι στατικό.

Ολοκληρωτική μορφή: $$\oint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{da} = 0$$

(όπου S κλειστή επιφάνεια). Με χρήση του θεωρήματος Gauss, βρίσκουμε την ισοδύναμη ......

Διαφορική μορφή: $$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (\textit{σωληνωτό}\ \text{πεδίο})$$

Φυσική σημασία:

1. Οι δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι *κλειστές* (δεν έχουν αρχή και τέλος).
2. Δεν υπάρχουν ελεύθεροι (μεμονωμένοι) μαγνητικοί πόλοι («μαγνητικά φορτία»).
3. Η μαγνητική ροή μέσα από *ανοιχτή* επιφάνεια S εξαρτάται μόνο από το περίγραμμα (κλειστή καμπύλη) C της επιφάνειας, και είναι ίδια για όλες τις επιφάνειες που έχουν κοινό περίγραμμα C.

Νόμος του Ampère για *Στατικό* Μαγνητικό Πεδίο:

Ολοκληρωτική μορφή: $$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{in}$$

[όπου I_{in} το ολικό ρεύμα που διέρχεται μέσα από την κλειστή καμπύλη (βρόχο) C]. Με χρήση του θεωρήματος Stokes, βρίσκουμε την ισοδύναμη ......

Διαφορική μορφή: $$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

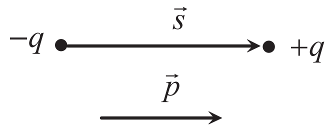
Προσοχή: Το ίδιο το πεδίο $\vec{B}$ οφείλεται σε *όλα* τα ρεύματα, εσωτερικά *και* εξωτερικά ως προς την C, αλλά το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{B}$ εξαρτάται μόνο από τα *εσωτερικά* ρεύματα!

Ο νόμος αυτός *δεν* ισχύει στη μορφή που τον γράψαμε στην περίπτωση ενός *χρονικά-μεταβαλλόμενου* Η/Μ πεδίου.

ΣΤΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΣΤΗΝ ΥΛΗ

Ηλεκτρικό Δίπολο - Ηλεκτρική Διπολική Ροπή:

Ένα *ηλεκτρικό δίπολο* αποτελείται από δύο αντίθετα φορτία $-q$ και $+q$ σε απόσταση s μεταξύ τους. Καλούμε $\vec{s}$ το διάνυσμα *από το* $-q$ *στο* $+q$. Η *ηλεκτρική διπολική ροπή* $\vec{p}$ του συστήματος ορίζεται ως εξής:

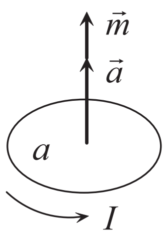


$$\vec{p} = q\vec{s}$$

Όταν ένα ηλεκτρικό δίπολο βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, το πεδίο τείνει να στρέψει το σύστημα έτσι ώστε η διπολική του ροπή $\vec{p}$ να ευθυγραμμιστεί με το $\vec{E}$.

Μαγνητικό Δίπολο - Μαγνητική Διπολική Ροπή:

Με τον όρο «μαγνητικό δίπολο» εννοούμε απλά έναν κλειστό ρευματικό βρόχο. Θεωρούμε ένα μικρό, επίπεδο βρόχο εμβαδού a, ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα I. Ορίζουμε ένα διάνυσμα $\vec{a}$, μέτρου a, κάθετο στο επίπεδο του βρόχου, με φορά συμβατή με τη φορά του ρεύματος και καθοριζόμενη σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Η *μαγνητική διπολική ροπή* $\vec{m}$ του βρόχου ορίζεται ως εξής:



$$\vec{m} = I\vec{a}$$

Όταν ένα μαγνητικό δίπολο βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, το πεδίο τείνει να στρέψει το σύστημα έτσι ώστε η διπολική του ροπή $\vec{m}$ να ευθυγραμμιστεί με το $\vec{B}$.

Διηλεκτρικά Μέσα (Μονωτές):

Όταν ένα διηλεκτρικό (μονωτικό) μέσο βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, υφίσταται *ηλεκτρική πόλωση* (δημιουργία προσανατολισμένων ηλεκτρικών διπόλων στο εσωτερικό του υλικού). Λόγω του φαινομένου αυτού, στο εσωτερικό καθώς και στην επιφάνεια του διηλεκτρικού εμφανίζεται ένα νέο είδος φορτίων που καλούνται *φορτία πόλωσης* και η πυκνότητά τους συμβολίζεται ρ_b. Σε αντίθεση με τα ελεύθερα φορτία των αγωγών, τα φορτία πόλωσης είναι *δέσμια* σε συγκεκριμένα άτομα και δεν μπορούν να μετακινηθούν μέσα στο υλικό. Αν στο εσωτερικό ή την επιφάνεια του διηλεκτρικού υπάρχουν και άλλα φορτία *που δεν οφείλονται στην πόλωση*, τούτα καλούνται *ελεύθερα φορτία* και η πυκνότητά τους συμβολίζεται ρ_f. Τα φορτία αυτά μπορεί να είναι, π.χ., ηλεκτρόνια στις πλάκες ενός πυκνωτή που είναι σε επαφή με το διηλεκτρικό, επιπρόσθετα εξωτερικά φορτία τοποθετημένα με κάποιον τρόπο μέσα στο υλικό, ιόντα Na^+ και Cl^- μέσα σε διάλυμα NaCl σε H_2O, κλπ. Η ολική πυκνότητα φορτίου στο υλικό είναι το άθροισμα $\rho = \rho_f + \rho_b$.

Στην περίπτωση ενός διηλεκτρικού, ο νόμος του Gauss μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\oint_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = Q_{f,in} \qquad <=> \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$$

όπου $\vec{D}$= *ηλεκτρική μετατόπιση* (το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται στα *ελεύθερα* φορτία μόνο). Για *γραμμικό* μέσο (στο οποίο η πόλωση είναι ανάλογη της έντασης του *ολικού* ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ που οφείλεται σε *όλα* τα φορτία), ισχύει ότι

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \text{όπου} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

(ε = *διηλεκτρικότητα του μέσου* , χ_e = *ηλεκτρική επιδεκτικότητα*). Καλούμε

$$\kappa_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e \qquad \text{(σχετική διηλεκτρικότητα ή διηλεκτρική σταθερά του μέσου)} .$$

Για όλα τα υλικά ισχύει ότι $\chi_e \geq 0,\ \varepsilon \geq \varepsilon_0,\ \kappa_e \geq 1$. Για το *κενό*, $\chi_e = 0,\ \varepsilon = \varepsilon_0,\ \kappa_e = 1$.

Μαγνητικά Μέσα (θεωρητικά, *όλα* τα υλικά):

Όταν ένα υλικό βρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο, υφίσταται *μαγνητική πόλωση* ή *μαγνήτιση* (δημιουργία προσανατολισμένων μαγνητικών διπόλων στο εσωτερικό του υλικού). Λόγω του φαινομένου αυτού, στο εσωτερικό καθώς και στην επιφάνεια του υλικού εμφανίζεται ένα νέο είδος ρευμάτων που καλούνται *ρεύματα μαγνήτισης* (πυκνότητα $\vec{J}_b$). Σε αντίθεση με τα ρεύματα ελεύθερων φορτίων που διαρρέουν τους αγωγούς, τα ρεύματα μαγνήτισης είναι *δέσμια*, με την έννοια ότι δεν συνιστούν μετακίνηση φορτίου σε μεγάλες αποστάσεις αλλά είναι αθροιστικά (μακροσκοπικά) φαινόμενα, αποτελούμενα από συνεισφορά πολλών μικροσκοπικών ρευμάτων που είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένα με άτομα του υλικού. Αν στο εσωτερικό ή την επιφάνεια του μαγνητικού μέσου υπάρχουν και άλλα ρεύματα *που δεν οφείλονται στη μαγνήτιση*, τούτα καλούνται *ελεύθερα ρεύματα* (διότι γενικά οφείλονται σε πραγματική μετακίνηση φορτίου στο χώρο) και η πυκνότητά τους συμβολίζεται $\vec{J}_f$. Τα ρεύματα αυτά μπορεί, π.χ., να ρέουν μέσα σε σύρματα που διαπερνούν το υλικό (ή μέσα στο ίδιο το υλικό εφόσον αυτό είναι αγωγός), να οφείλονται σε κίνηση ιόντων μέσα σε κάποιο υγρό, κλπ. Η ολική πυκνότητα ρεύματος στο υλικό είναι $\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b$.

Στην περίπτωση ενός μαγνητικού υλικού, ο νόμος του Ampère μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_{f,in} \quad <=> \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f$$

όπου $\vec{H}$ = *βοηθητικό πεδίο* (το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται στα *ελεύθερα* ρεύματα μόνο). Για *γραμμικό* μέσο (στο οποίο η μαγνήτιση είναι ανάλογη της έντασης του *ολικού* μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ που οφείλεται σε *όλα* τα ρεύματα), ισχύει ότι

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} \qquad \text{όπου} \qquad \mu = \mu_0(1+\chi_m)$$

(μ = *μαγνητική διαπερατότητα του μέσου* , χ_m = *μαγνητική επιδεκτικότητα*). Καλούμε

$$\kappa_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1+\chi_m \qquad (\textit{σχετική διαπερατότητα} \text{ του υλικού}) .$$

Για όλα τα υλικά ισχύει ότι $|\chi_m|<1$, έτσι ώστε $\kappa_m>0$. Ειδικά, $\chi_m>0$ και $\kappa_m>1$ για τα *παραμαγνητικά* μέσα, ενώ $\chi_m<0$ και $\kappa_m<1$ για τα *διαμαγνητικά* μέσα. Για το *κενό*, $\chi_m=0$, $\mu=\mu_0$, $\kappa_m=1$.

Εφαρμογές:

1. Η τοποθέτηση διηλεκτρικού ανάμεσα στις πλάκες ενός πυκνωτή έχει σαν αποτέλεσμα την *ελάττωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου* στο εσωτερικό του πυκνωτή, την *ελάττωση της τάσης* ανάμεσα στις πλάκες, και την *αύξηση της χωρητικότητας* του πυκνωτή.

2. Η τοποθέτηση *παραμαγνητικού* υλικού στο εσωτερικό ενός σωληνοειδούς επιφέρει *αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου*. Αντίθετα, η παρουσία *διαμαγνητικού* υλικού προκαλεί *ελάττωση* του μαγνητικού πεδίου.

ΧΡΟΝΙΚΑ-ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ Η/Μ ΠΕΔΙΑ

Ηλεκτρεγερτική «Δύναμη» Κυκλώματος:

Με τον όρο «κύκλωμα» εννοούμε έναν κλειστό βρόχο μέσα σε Η/Μ πεδίο. Ως *ηλεκτρεγερτική «δύναμη»* (ΗΕΔ) ενός κυκλώματος C τη χρονική στιγμή t, ορίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{f} \cdot \overrightarrow{dl}$$

όπου $\vec{f}$ η δύναμη ανά μονάδα φορτίου κατά μήκος του κυκλώματος τη στιγμή αυτή, και $\overrightarrow{dl}$ ένα στοιχειώδες τμήμα του κυκλώματος. Προσέξτε ότι το πρόσημο της ΗΕΔ αντιστρέφεται αν αντιστρέψουμε τη φορά διαγραφής του βρόχου.

Ειδικές περιπτώσεις:

- Για *σταθερό* κύκλωμα μέσα σε *στατικό* Η/Μ πεδίο, ισχύει ότι $\mathcal{E} = 0$.

- Για σταθερό κύκλωμα μέσα σε *χρονικά-μεταβαλλόμενο* Η/Μ πεδίο, έχουμε ότι

  $$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

  όπου $\vec{E}$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (προσέξτε ότι το χρονικά-μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο *δεν* είναι αστρόβιλο).

- Σε κύκλωμα με αντίσταση και πηγή (μπαταρία) τάσης V, η ΗΕΔ ισούται με $\mathcal{E} = V$.

- Για κινούμενο πλαίσιο C μέσα σε *στατικό* μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, η ΗΕΔ είναι

  $$\mathcal{E} = \oint_C (\vec{\upsilon} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{dl}$$

  όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του στοιχείου $\overrightarrow{dl}$ του κυκλώματος (η ταχύτητα αυτή μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος του πλαισίου αν αυτό περιστρέφεται).

Η ΗΕΔ έχει διαστάσεις ηλεκτρικού δυναμικού (ή τάσης).

Εξισώσεις του Maxwell:

1. Σε ολοκληρωτική μορφή:

$$(\alpha)\quad \oint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{da} = Q_{in}/\varepsilon_0$$

$$(\beta)\quad \oint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{da} = 0$$

$$(\gamma)\quad \oint_C \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{da}$$

$$(\delta)\quad \oint_C \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{in} + \varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{da}$$

2. Σε διαφορική μορφή [1] :

$$(\alpha)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (\gamma)\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$(\beta)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad (\delta)\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

3. Εναλλακτική διαφορική μορφή (κατάλληλη για Η/Μ πεδία μέσα στην ύλη):

$$(\alpha)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f \qquad (\gamma)\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$(\beta)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad (\delta)\quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

όπου $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$ (για γραμμικό μέσο).

Φυσική σημασία: Οι (α) και (β) εκφράζουν το νόμο του Gauss για τον Ηλεκτρισμό και το Μαγνητισμό, αντίστοιχα: η (α) αντιστοιχεί στο νόμο του Coulomb, ενώ η φυσική ερμηνεία τής (β) είναι η απουσία ελεύθερων μαγνητικών πόλων. Η (γ) αποτελεί το νόμο των Faraday-Henry (*νόμος της Η/Μ επαγωγής*), σύμφωνα με τον οποίο ένα χρονικά-μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο συνοδεύεται από ηλεκτρικό πεδίο, και η (δ) το νόμο των Ampère-Maxwell (ο οποίος είναι γενίκευση του νόμου του Ampère), σύμφωνα με τον οποίο ένα χρονικά-μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο συνοδεύεται από μαγνητικό πεδίο. Οι πυκνότητες $\rho(\vec{r},t)$ και $\vec{J}(\vec{r},t)$ *περιλαμβάνουν όλα τα φορτία και όλα τα ρεύματα αδιακρίτως* (π.χ., ελεύθερα φορτία και ρεύματα, δέσμια φορτία πόλωσης, δέσμια ρεύματα μαγνήτισης, κλπ.), ενώ τα $\rho_f(\vec{r},t)$ και $\vec{J}_f(\vec{r},t)$ παριστούν πυκνότητες *ελεύθερου* φορτίου και ρεύματος, αντίστοιχα, μέσα σε ένα υλικό. Τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ οφείλονται σε *όλους* τους φορείς (ελεύθερους *και* δέσμιους), ενώ τα πεδία $\vec{D}$ και $\vec{H}$ οφείλονται σε *ελεύθερους* φορείς μόνο.

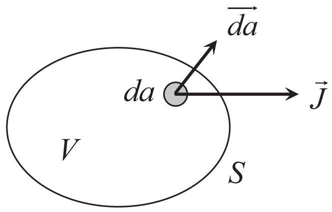
[1] Προκύπτουν από την αντίστοιχη ολοκληρωτική μορφή με χρήση των θεωρημάτων Gauss και Stokes.

Εξίσωση Συνεχείας – Διατήρηση του Φορτίου:

Άμεση συνέπεια των διαφορικών εξισώσεων του Maxwell είναι η εξίσωση συνεχείας:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

Σε ολοκληρωτική μορφή,



$$\frac{d}{d\,t}\int_V \rho\, dv = -\oint_S \vec{J}\cdot\overrightarrow{da}$$

Αυτό γράφεται:

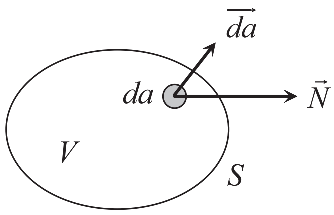
$$\frac{d}{d\,t}Q_{in}(t) = -I_{out}(t)\ , \quad \text{όπου} \quad \int_V \rho\, dv = Q_{in}(t)\ , \quad \oint_S \vec{J}\cdot\overrightarrow{da} = I_{out}(t)\ ,$$

και εκφράζει τη *διατήρηση του φορτίου*.

Διάνυσμα Poynting:

$$\vec{N}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu}\,(\vec{E}\times\vec{B})$$

Φυσική σημασία: Εκφράζει ροή ενέργειας του Η/Μ πεδίου ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας, κατά τον ίδιο τρόπο που η πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$ εκφράζει ροή ηλεκτρικού φορτίου ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας.



S = κλειστή επιφάνεια

Ολική ενέργεια ανά μονάδα χρόνου που *εξέρχεται* από την $S = \oint_S \vec{N}\cdot\overrightarrow{da}$.

Η/Μ ΚΥΜΑΤΑ - Η/Μ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ

Κύματα (Γενικά):

Γενικά, *κύμα* ονομάζεται κάθε φυσική κατάσταση που, παραγόμενη σε ένα σημείο του χώρου, διαδίδεται με πεπερασμένη ταχύτητα και γίνεται αργότερα αντιληπτή σε άλλα σημεία του χώρου (έχοντας ενδεχομένως υποστεί στο μεταξύ και κάποια αλλοίωση). Αυτό που βασικά διαδίδεται είναι η *διαταραχή* (μεταβολή) σε ένα υπάρχον πεδίο το οποίο εκφράζει μια φυσική ιδιότητα, όπως π.χ. ένα Η/Μ πεδίο, η παραμόρφωση ενός ελατηρίου, η πίεση σε ένα αέριο, η κάθετη απομάκρυνση σε μια χορδή, η συμπίεση σε ένα στερεό, κλπ. Η μαθηματική έκφραση

$$\xi = \xi(x,t) = f\,(x \pm \upsilon\, t)$$

περιγράφει μια φυσική κατάσταση που διαδίδεται χωρίς παραμόρφωση κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα (μέτρου) υ. Η έκφραση αυτή επαληθεύει την *κυματική εξίσωση*

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Ειδικά, για ένα *αρμονικό κύμα*,

$$\xi(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \alpha)$$

όπου $\omega = k\upsilon \iff \upsilon = \omega / k$. Πιο γενικά, η έκφραση

$$\xi(\vec{r},t) = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

παριστά ένα *επίπεδο αρμονικό κύμα πλάτους* A, που διαδίδεται στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{k}$ με ταχύτητα μέτρου $\upsilon=\omega/k$, όπου $k=|\vec{k}|$. Το $\vec{k}$ καλείται *κυματοδιάνυσμα*, και το ω *κυκλική συχνότητα* του κύματος. (Ο όρος «επίπεδο κύμα» σχετίζεται με την παρατήρηση ότι, για κάθε χρονική στιγμή t, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου το πεδίο ξ έχει σταθερή τιμή είναι επίπεδη επιφάνεια κάθετη στο διάνυσμα $\vec{k}$.) Σε μιγαδική μορφή, γράφουμε:

$$\xi(\vec{r},t) = A\exp\{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\} \equiv A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

(όπου $A=|A|e^{i\alpha}$ μιγαδικό πλάτος). Τα κύματα αυτής της μορφής ικανοποιούν την κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \iff \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Εξισώσεις Maxwell στο Κενό ($\rho = 0$, $\vec{J} = 0$)**:**

$$(\alpha) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad\qquad (\gamma) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\beta) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad\qquad (\delta) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Όλες οι λύσεις $(\vec{E}, \vec{B})$ του συστήματος των εξισώσεων αυτών ικανοποιούν επίσης την ......

Εξίσωση Η/Μ Κύματος στο Κενό:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

όπου $\vec{A} = \vec{E}$ ή $\vec{B}$, και $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ (*ταχύτητα διαδόσεως*)

Φυσική σημασία: Το χρονικά-μεταβαλλόμενο Η/Μ πεδίο έχει κυματική συμπεριφορά. Τούτο σημαίνει ότι, μια μεταβολή (*διαταραχή*) του Η/Μ πεδίου σε μια περιοχή του χώρου, μια δεδομένη χρονική στιγμή, δεν γίνεται ταυτόχρονα αντιληπτή και στα άλλα σημεία του χώρου αλλά διαδίδεται στο χώρο με τη μορφή κύματος που «ταξιδεύει» με ταχύτητα *c* (στο κενό). Ειδικά, το φως είναι μια Η/Μ διαταραχή που διαδίδεται σαν Η/Μ κύμα με την ταχύτητα αυτή. Όπως βρίσκεται, $c = 3 \times 10^8 \; m/s$.

Γενικά, η ταχύτητα διαδόσεως ενός Η/Μ κύματος σε ένα υλικό μέσο εξαρτάται από τις φυσικές ιδιότητες του μέσου (π.χ., αγωγιμότητα, διηλεκτρικότητα, κλπ.) και είναι πάντα μικρότερη από το *c*.

Ιδιότητες Επίπεδου Η/Μ Κύματος:

Σε ένα *επίπεδο* Η/Μ κύμα, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου το Η/Μ πεδίο έχει σταθερή τιμή είναι επίπεδη επιφάνεια κάθετη στη διεύθυνση διαδόσεως. Το κύμα αυτό έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος (*εγκάρσιο κύμα*), και ταλαντώνονται σε φάση.
2. Τα μέτρα των στιγμιαίων τιμών των $\vec{E}$ και $\vec{B}$ συνδέονται με τη σχέση $E = cB$.
3. Το διάνυσμα Poynting $\vec{N} = (1/\mu) \vec{E} \times \vec{B}$ (που εκφράζει ροή ενέργειας) είναι στην κατεύθυνση διαδόσεως του κύματος.
4. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συνεισφέρουν εξίσου στην ενέργεια του κύματος.

Πρόσπτωση και Διάδοση Η/Μ Κύματος σε Αγώγιμο Μέσο:

Το Η/Μ κύμα υφίσταται μερική *ανάκλαση* στην επιφάνεια του αγωγού, και μερική *απορρόφηση* μέχρι κάποιο βάθος *Δ* που καλείται *επιδερμικό βάθος* και εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά τόσο του κύματος (συχνότητα), όσο και του αγώγιμου υλικού. Για σχετικά χαμηλόσυχνα Η/Μ κύματα, το επιδερμικό βάθος *ελαττώνεται* με την αύξηση της συχνότητας. Έτσι, *τα πιο χαμηλόσυχνα κύματα είναι και πιο διεισδυτικά*. Επί πλέον, όσο πιο αγώγιμο είναι το υλικό, τόσο πιο μεγάλη είναι η ανακλαστική του ικανότητα, καθώς και η απορροφητικότητά του (το επιδερμικό βάθος *ελαττώνεται* με την αύξηση της αγωγιμότητας). Για «άπειρη» (πάρα πολύ μεγάλη) αγωγιμότητα, θα έχουμε ολική ανάκλαση του Η/Μ κύματος.

Τα παραπάνω φαινόμενα εξηγούν γιατί η χρήση του radar δεν είναι πρακτικά δυνατή για τον εντοπισμό υποβρυχίων που βρίσκονται σε σχετικά μεγάλο βάθος, καθώς και γιατί τα ίδια τα υποβρύχια δεν χρησιμοποιούν το radar για τον εντοπισμό αντικειμένων (η θάλασσα είναι αγωγός λόγω των ιόντων των αλάτων που περιέχει, με αποτέλεσμα να απορροφά τα Η/Μ κύματα).

Η/Μ Ακτινοβολία:

Είναι η διάδοση της ενέργειας του Η/Μ πεδίου μέσω Η/Μ κυμάτων. Παράγεται:

- από *επιταχυνόμενα* (όχι απλά κινούμενα!) *ηλεκτρικά φορτία*, ή
- από *χρονικά-μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά ρεύματα*.

Παραδείγματα:

- Ακτινοβολία παλλόμενου ηλεκτρικού ή μαγνητικού διπόλου.
- Ακτινοβολία σύγχροτρου (στους κυκλικούς επιταχυντές σωματίων).
- Ακτινοβολία επιβράδυνσης (*bremsstrahlung*) – παραγωγή ακτίνων X.

Φάσμα της Η/Μ Ακτινοβολίας:

Είναι η συνολική περιοχή συχνοτήτων την οποία καλύπτει η Η/Μ ακτινοβολία που απαντάται στη Φύση. Για πρακτικούς λόγους, το φάσμα της ακτινοβολίας υποδιαιρείται στις εξής επί μέρους περιοχές (με αυξανόμενη συχνότητα):

1. Ραδιοκύματα
2. Μικροκύματα
3. Υπέρυθρη ακτινοβολία
4. Ορατό φως
5. Υπεριώδης ακτινοβολία
6. Ακτίνες X
7. Ακτίνες γ

Συχνότητα Πλάσματος Αγώγιμου Μέσου:

Είναι η ελάχιστη συχνότητα ακτινοβολίας ω_p για την οποία ένα αγώγιμο μέσο γίνεται «διαφανές». Δηλαδή, για συχνότητες *μικρότερες* από ω_p , η ακτινοβολία υφίσταται μερική ανάκλαση στην επιφάνεια του υλικού, καθώς και απορρόφηση στο εσωτερικό του (όπως έχουμε ήδη αναφέρει). Όταν όμως η συχνότητα της ακτινοβολίας *υπερβεί* την τιμή ω_p (χαρακτηριστική για το αγώγιμο υλικό), το επιδερμικό βάθος Δ αυξάνει απεριόριστα και η ακτινοβολία διέρχεται από το υλικό χωρίς σημαντική ανάκλαση ή απορρόφηση. Για παράδειγμα, για τα περισσότερα μέταλλα η συχνότητα πλάσματος είναι στην περιοχή της υπεριώδους ακτινοβολίας. Έτσι, ενώ ένα μέταλλο είναι αδιαφανές στο ορατό φως, καθίσταται διαφανές στην υπεριώδη ακτινοβολία.

Το φαινόμενο της ανάκλασης των Η/Μ κυμάτων στις επιφάνειες αγώγιμων μέσων αξιοποιείται στις τηλεπικοινωνίες για τη διάδοση ραδιοκυμάτων AM σε μεγάλες αποστάσεις. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω ανάκλασης στην *ιονόσφαιρα*, δεδομένου ότι η συχνότητα πλάσματος της τελευταίας υπερβαίνει τις συχνότητες των AM. Αντίθετα, τα ραδιοκύματα FM, τα μικροκύματα, η υπέρυθρη ακτινοβολία, το ορατό φως, κλπ., διαπερνούν την ιονόσφαιρα με μικρές μόνο απώλειες λόγω ανάκλασης ή απορρόφησης, αφού οι συχνότητές τους ξεπερνούν την ω_p της ιονόσφαιρας. Έτσι, η διάδοση υψίσυχνων σημάτων σε πολύ μεγάλες αποστάσεις πάνω στη Γη γίνεται με τη βοήθεια τηλεπικοινωνιακών δορυφόρων.

ΤΕΛΟΣ