Συμμετρία και ολοκληρωσιμότητα στις κλασικές πεδιακές εξισώσεις

Κ. Ι. Παπαχρήστου

Περίληψη

Γίνεται σύντομη επισκόπηση των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων των ολοκληρώσιμων, μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) για κλασικά πεδία, όπως η παρουσία μετασχηματισμών Bäcklund, ζευγών Lax, και άπειρων ακολουθιών νόμων διατήρησης. Περιγράφεται μια αλγεβρική (μη-γεωμετρική) προσέγγιση στο πρόβλημα των συμμετριών των ΜΔΕ, κατάλληλη για περιπτώσεις όπου οι λύσεις των ΜΔΕ δεν είναι βαθμωτές συναρτήσεις (π.χ., εκφράζονται στη μορφή πινάκων). Προτείνεται μια μέθοδος που, σε κάποιες περιπτώσεις, μπορεί να «ενοποιήσει» τις ιδιότητες συμμετρίας και ολοκληρωσιμότητας μιας μη-γραμμικής ΜΔΕ. Η μέθοδος εφαρμόζεται στην αυτο-δυϊκή εξίσωση Yang-Mills και την εξίσωση του Ernst στη Γενική Σχετικότητα.

Abstract

A number of characteristics of integrable nonlinear partial differential equations (PDE's) for classical fields are briefly reviewed, such as Bäcklund transformations, Lax pairs, and infinite sequences of conservation laws. An algebraic (non-geometrical) approach to the symmetry problem of PDE's is described, suitable for PDE's the solutions of which are non-scalar fields (e.g., are in the form of matrices). A method is proposed which, in certain cases, may "unify" the symmetry and integrability properties of a nonlinear PDE. Application is made to the self-dual Yang-Mills equation and the Ernst equation of General Relativity.

I. Εισαγωγή

Το πρόβλημα της εύρεσης λύσεων στις μη-γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) δεν είναι καινούργιο στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, παραμένει όμως πάντα επίκαιρο. Το πρόβλημα αυτό τίθεται, κατά βάση, σε δύο επίπεδα: (α) πώς να αναγνωρίσουμε μια ολοκληρώσιμη ΜΔΕ, και (β) πώς να την επιλύσουμε. Οι ολοκληρώσιμες ΜΔΕ εμφανίζουν διάφορα κοινά χαρακτηριστικά, όπως, π.χ., παραμετρικούς μετασχηματισμούς Bäcklund, άπειρες ακολουθίες νόμων διατήρησης (τοπικών και/ή μη-τοπικών), γραμμικό σύστημα (ζεύγος Lax), κλπ. Αυτό που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι ότι οι ιδιότητες αυτές δεν είναι, γενικά, ανεξάρτητες η μία από την άλλη αλλά συχνά συνδέονται μεταξύ τους. Η επίλυση, τώρα, μη-γραμμικών ΜΔΕ είναι ένα ιδιαίτερα περίπλοκο πρόβλημα για το οποίο έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές [1-4], πολλές εκ των οποίων βασίζονται στα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Ένα άλλο ενδιαφέρον θέμα σχετικό με τις ΜΔΕ είναι οι μετασχηματισμοί συμμετρίας. Με αυτό εννοούμε μετασχηματισμούς των μεταβλητών μιας ΜΔΕ που παράγουν νέες λύσεις από παλιές. Σε αντίθεση με ένα μετασχηματισμό Bäcklund, που παράγει λύσεις μόνο για ένα σχετιζόμενο με αυτόν σύστημα ΜΔΕ, ένας μετασχηματισμός συμμετρίας δεν αναφέρεται *a priori* σε μια συγκεκριμένη ΜΔΕ. Οι συμμετρίες υπακούουν σε μια δική τους, γραμμική ΜΔΕ που εκφράζει τη συνθήκη συμμετρίας για την αρχική (μη-γραμμική) ΜΔΕ. Οι περιπτώσεις της αυτο-δυϊκής εξίσωσης Yang-Mills [5] και της εξίσωσης του Ernst [6], τώρα, μας διδάσκουν ότι μια δοσμένη μη-γραμμική ΜΔΕ είναι πιθανό να μπορεί να «γραμμικοποιηθεί» με διάφορους τρόπους, επιδεχόμενη, αντίστοιχα, διάφορες επιλογές του ζεύγους Lax. Μια ιδιαίτερα χρήσιμη επιλογή είναι εκείνη όπου το ζεύγος Lax έχει τη μορφή ενός μετασχηματισμού Bäcklund που συνδέει την αρχική, μη-γραμμική ΜΔΕ με τη (γραμμική) συνθήκη συμμετρίας της. Στην περίπτωση της εξίσωσης Yang-Mills οδηγούμαστε έτσι στην εύρεση ενός τελεστή επανάληψης (recursion operator) που παράγει, επαγωγικά, ένα άπειρο πλήθος συμμετριών από κάθε δοσμένη συμμετρία [5,7,8]. Επιπλέον, η παραπάνω επιλογή μάς επιτρέπει να βρούμε μια απειρία νόμων διατήρησης για την εξίσωση αυτή. Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε και για την εξίσωση του Ernst, μόνο που εκεί η απειρία νόμων διατήρησης δεν συνοδεύεται από μια αντίστοιχη απειρία συμμετριών. Αντί αυτής, προκύπτει ένας απειροστός μετασχηματισμός που οδηγεί σε νέες προσεγγιστικές λύσεις για τις εξισώσεις του πεδίου βαρύτητας με αξονική συμμετρία.

Μια κατά το δυνατόν παιδαγωγική προσέγγιση των παραπάνω θεμάτων επιχειρείται στο παρόν άρθρο, το οποίο είναι οργανωμένο ως εξής: Στην Ενότητα ΙΙ εκτίθενται σε συντομία τα βασικά χαρακτηριστικά των ολοκληρώσιμων ΜΔΕ (μετασχηματισμοί Bäcklund, ζεύγος Lax, απειρίες νόμων διατήρησης). Στην ενότητα ΙΙΙ εξετάζεται το πρόβλημα των συμμετριών των ΜΔΕ, στα πλαίσια ενός καθαρά αλγεβρικού φορμαλισμού (σε αντίθεση με τις συνήθεις διαφορικές γεωμετρικές προσεγγίσεις) που είναι κατάλληλος και για περιπτώσεις όπου οι λύσεις των ΜΔΕ δεν εκφράζονται στη μορφή βαθμωτών συναρτήσεων (π.χ., έχουν τη μορφή πινάκων). Στην ενότητα IV, οι εξισώσεις Yang-Mills και Ernst χρησιμοποιούνται σαν πρωταρχικά μοντέλα για την περιγραφή της μεθόδου «γραμμικοποίησης» μιας μη-γραμμικής ΜΔΕ με την επιλογή ενός ζεύγους Lax που, με κάποιον τρόπο, συνδέει τη ΜΔΕ με τη συνθήκη συμμετρίας της. Η μέθοδος οδηγεί στην εύρεση νέων συμμετριών και νόμων διατήρησης για τα δύο αυτά μη-γραμμικά συστήματα.

II. Χαρακτηριστικά ολοκληρώσιμων ΜΔΕ

Οι ολοκληρώσιμες, μη-γραμμικές ΜΔΕ εμφανίζουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά [1-4], μερικά εκ των οποίων παραθέτουμε στη συνέχεια. Για απλούστευση της παρουσίασης, θα περιοριστούμε σε συναρτήσεις δύο μεταβλητών x, t. Για ευκολία, θα γράφουμε $u=u(x,t)$, $v=v(x,t)$, κλπ. (δηλαδή, τα u, v, κλπ., θα παριστάνουν ταυτόχρονα τις εξαρτημένες μεταβλητές και τις αντίστοιχες συναρτήσεις). Στην ενότητα αυτή, για τις μερικές παραγώγους θα χρησιμοποιούμε τους εξής εναλλακτικούς συμβολισμούς:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \partial_x u = u_x \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \partial_t u = u_t$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \partial_x{}^2 u = u_{xx} \ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \partial_t{}^2 u = u_{tt} \ , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} = \partial_x \partial_t u = u_{xt}$$

κλπ. Γενικά, ένας δείκτης στο κάτω δεξιό μέρος του συμβόλου μιας συνάρτησης θα δηλώνει μερική παραγώγιση ως προς την υποδεικνυόμενη μεταβλητή. Έτσι, π.χ., για μια συνάρτηση $F(x,t,u,u_x,u_t,\ldots) \equiv F\,[u]$, γράφουμε: $F_x \equiv \partial_x F=\partial F/\partial x$, $F_t \equiv \partial_t F=\partial F/\partial t$, $F_u \equiv \partial_u F=\partial F/\partial u$, κλπ. Προσέξτε ότι, για τον υπολογισμό των F_x και F_t θα πρέπει να λάβουμε υπόψη την εξάρτηση της F από τα x και t τόσο *άμεσα* (λόγω της απευθείας παρουσίας τους στην F), όσο και *έμμεσα*, μέσω του u και των παραγώγων του. Για παράδειγμα, για $F[u] \equiv 3xtu^2$ έχουμε ότι

$$F_x = 3\,t\,u^2 + 6\,x\,t\,u\,u_x \ , \qquad F_t = 3\,x\,u^2 + 6\,x\,t\,u\,u_t$$

A. Μετασχηματισμοί Bäcklund

Η γενική ιδέα των μετασχηματισμών Bäcklund [1-3, 9] έχει ως εξής: Θεωρούμε δύο ΜΔΕ $P[u]=0$ και $Q[v]=0$, όπου οι εκφράσεις $P[u]$ και $Q[v]$ περιέχουν τα u και v, αντίστοιχα, και κάποιες από τις μερικές παραγώγους τους, ενδεχομένως κατά τρόπο μη-γραμμικό ως προς u και v. Έστω τώρα ένα σύστημα πεπλεγμένων ΜΔΕ ως προς u και v:

$$B_i\,(x,t,u,v,u_x,v_x,u_t,v_t,u_{xx},v_{xx},\cdots)=0\ ,\quad i=1,2 \tag{2.1}$$

Υποθέτουμε τα εξής:

1. Το σύστημα (2.1) είναι ολοκληρώσιμο ως προς v (οι εξισώσεις του συστήματος είναι συμβατές μεταξύ τους για επίλυση ως προς v) όταν το u επαληθεύει τη ΜΔΕ $P[u]=0$. Η λύση v, τότε, του συστήματος επαληθεύει τη ΜΔΕ $Q[v]=0$.
2. Το σύστημα (2.1) είναι ολοκληρώσιμο ως προς u αν το v ικανοποιεί τη ΜΔΕ $Q[v]=0$. Η λύση u, τότε, του συστήματος ικανοποιεί τη ΜΔΕ $P[u]=0$.

Λέμε ότι το σύστημα (2.1) αποτελεί ένα *μετασχηματισμό Bäcklund* που συνδέει λύσεις της $P[u]=0$ με λύσεις της $Q[v]=0$. Αν συμβεί να είναι $P\equiv Q$, δηλαδή, αν τα u και v ικανοποιούν *την ίδια* ΜΔΕ $P[u]=0$, τότε ο μετασχηματισμός καλείται *αυτο-Bäcklund*.

Γενική μέθοδος: Υποθέτουμε ότι ενδιαφερόμαστε για λύσεις της (γενικά μη-γραμμικής) ΜΔΕ $P[u]=0$. Υποθέτουμε επίσης ότι διαθέτουμε ένα μετασχηματισμό Bäcklund που συνδέει τις λύσεις u αυτής της εξίσωσης με τις λύσεις v της ΜΔΕ $Q[v]=0$ (αν $P\equiv Q$, ο μετασχηματισμός συνδέει λύσεις u και v της ίδιας ΜΔΕ). Θεωρούμε μια γνωστή λύση $v=v_0(x,t)$ της $Q[v]=0$, και γράφουμε το μετασχηματισμό ως εξής:

$$B_i\left(x,t,u,v_0,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v_0}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v_0}{\partial t},\cdots\right)=0\ ,\quad i=1,2 \tag{2.2}$$

Δοθέντος ότι $Q[v_0]=0$, το σύστημα (2.2) είναι ολοκληρώσιμο ως προς u και η λύση του ικανοποιεί τη ΜΔΕ $P[u]=0$. Έτσι, βρίσκουμε μια λύση $u(x,t)$ της $P[u]=0$ χωρίς να λύσουμε την ίδια την εξίσωση, ολοκληρώνοντας το μετασχηματισμό (2.2) ως προς u. Φυσικά, η χρήση της μεθόδου έχει νόημα όταν (α) γνωρίζουμε εξαρχής μια λύση $v_0(x,t)$ της $Q[v]=0$, και (β) η ολοκλήρωση του συστήματος (2.2) ως προς u είναι απλούστερη από την ολοκλήρωση της ίδιας της ΜΔΕ $P[u]=0$. Αν ο μετασχηματισμός (2.2) είναι αυτο-Bäcklund, τότε, ξεκινώντας από μια γνωστή λύση $v_0(x,t)$ της $P[u]=0$ και ολοκληρώνοντας το σύστημα (2.2), βρίσκουμε μια άλλη λύση $u(x,t)$ της ίδιας εξίσωσης.

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα. Για συντομία, οι μετασχηματισμοί Bäcklund θα αναφέρονται ως «ΜΒ»:

1. Σχέσεις Cauchy-Riemann

Οι γνωστές από τη Μιγαδική Ανάλυση σχέσεις Cauchy-Riemann,

$$u_x=v_y\quad(\alpha)\qquad u_y=-v_x\quad(\beta) \tag{2.3}$$

(εδώ η μεταβλητή t έχει μετονομαστεί y) αποτελούν έναν αυτο-ΜΒ για τη (γραμμική) εξίσωση του Laplace,

$$P[w]\equiv w_{xx}+w_{yy}=0 \tag{2.4}$$

Πράγματι: Για να είναι επιλύσιμες οι (2.3) ως προς u για δοσμένο $v(x,y)$, θα πρέπει καταρχήν να είναι συμβατές μεταξύ τους. Η *συνθήκη συμβατότητας* (ή *συνθήκη ολοκληρωσιμότητας*) βρίσκεται από την απαίτηση ότι $(u_x)_y=(u_y)_x$. Παραγωγίζοντας την (α) ως προς y και τη (β) ως προς x, και εξισώνοντας τις μεικτές παραγώγους τού u, απαλείφουμε τη μεταβλητή u και βρίσκουμε τη συνθήκη που πρέπει να υπακούει το $v(x,y)$:

$$P[v] \equiv v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Απαλείφοντας, όμοια, το v από το σύστημα (2.3), βρίσκουμε την αναγκαία συνθήκη για το u ώστε το σύστημα να είναι ολοκληρώσιμο ως προς v για δοσμένο u:

$$P[u] \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Δηλαδή, η ολοκληρωσιμότητα του συστήματος (2.3) ως προς μία μεταβλητή απαιτεί ότι η άλλη μεταβλητή ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace (2.4).

Έστω, τώρα, $v_0(x,y)$ μια γνωστή λύση της εξίσωσης του Laplace. Αντικαθιστώντας $v=v_0$ στο σύστημα (2.3), μπορούμε να το ολοκληρώσουμε ως προς u. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε (απαλείφοντας το v_0 από το σύστημα) ότι η συνάρτηση u που θα βρούμε ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace (2.4). Για παράδειγμα, η επιλογή $v_0(x,y)=xy$ μας οδηγεί σε μια νέα λύση, $u(x,y)=(x^2-y^2)/2+C$.

2. Εξίσωση του Liouville

Η εξίσωση αυτή γράφεται

$$P[u] \equiv u_{xt} - e^u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{xt} = e^u \tag{2.5}$$

Η απευθείας επίλυσή της είναι πολύ δύσκολη λόγω της μη-γραμμικότητάς της. Μπορεί όμως να επιλυθεί ευκολότερα με χρήση ενός ΜΒ. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε μια βοηθητική συνάρτηση $v(x,t)$, καθώς και τη ΜΔΕ

$$Q[v] \equiv v_{xt} = 0 \tag{2.6}$$

Θεωρούμε, επίσης, το σύστημα των ΜΔΕ πρώτης τάξης,

$$u_x + v_x = \sqrt{2}\; e^{(u-v)/2} \quad (\alpha) \qquad u_t - v_t = \sqrt{2}\; e^{(u+v)/2} \quad (\beta) \tag{2.7}$$

Παραγωγίζοντας την (α) ως προς t και τη (β) ως προς x, απαλείφοντας τα (u_t-v_t) και (u_x+v_x) στα δεξιά μέλη με τη βοήθεια των (α) και (β), και προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη, βρίσκουμε ότι τα u και v ικανοποιούν, αντίστοιχα, τις ΜΔΕ (2.5) και (2.6). Άρα, το σύστημα (2.7) αποτελεί ένα ΜΒ που συνδέει λύσεις των (2.5) και (2.6).

Ξεκινώντας με την τετριμμένη λύση $v=0$ της (2.6), και ολοκληρώνοντας το σύστημα

$$u_x = \sqrt{2}\; e^{u/2} \;, \qquad u_t = \sqrt{2}\; e^{u/2}$$

βρίσκουμε μια λύση τής (2.5):

$$u(x,t) = -2\ln\left(C - \frac{x+t}{\sqrt{2}} \right)$$

3. Εξίσωση sine-Gordon

Η *εξίσωση sine-Gordon* βρίσκει εφαρμογή σε διάφορες περιοχές της Φυσικής, όπως στη μελέτη των κρυσταλλικών στερεών, στη διάδοση ελαστικών κυμάτων, στο Μαγνητισμό, σε μοντέλα στοιχειωδών σωματίων, κλπ. Η εξίσωση αυτή (που το όνομά της αποτελεί λογοπαικτικό παραλληλισμό με την αντίστοιχη γραμμική εξίσωση Klein-Gordon) γράφεται

$$u_{xt} = \sin u \tag{2.8}$$

Το παρακάτω σύστημα αποτελεί έναν αυτο-ΜΒ για την (2.8):

$$\frac{1}{2}(u+v)_x = a \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \ , \qquad \frac{1}{2}(u-v)_t = \frac{1}{a}\sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{2.9}$$

όπου a ($\neq 0$) μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. (Λόγω της παρουσίας τού a, λέμε ότι το σύστημα (2.9) είναι ένας *παραμετρικός* ΜΒ.) Όταν το u είναι λύση τής (2.8), ο ΜΒ (2.9) είναι ολοκληρώσιμος ως προς v, το οποίο επίσης ικανοποιεί την (2.8): $v_{xt} = \sin v$, και αντίστροφα.

Ξεκινώντας με την τετριμμένη λύση $v=0$ της $v_{xt} = \sin v$, και ολοκληρώνοντας το σύστημα

$$u_x = 2a \sin\frac{u}{2} \ , \qquad u_t = \frac{2}{a}\sin\frac{u}{2}$$

βρίσκουμε μια νέα λύση τής (2.8):

$$u(x,t) = 4\arctan\left\{C\exp\left(ax + \frac{t}{a}\right)\right\}$$

B. Ζεύγος Lax

Γενική ιδέα: Έστω μια μη-γραμμική ΜΔΕ $F[u]=0$, όπου $u=u(x,t)$. Θεωρούμε ένα ζεύγος *γραμμικών* ΜΔΕ ως προς μια νέα μεταβλητή ψ, στις οποίες το u υπεισέρχεται σαν ένα είδος παραμετρικής συνάρτησης που καθορίζεται εκ των προτέρων, χωρίς όμως προς το παρόν να σχετίζεται με τις λύσεις της ΜΔΕ $F[u]=0$:

$$L_i(\psi\,;u) = 0 \ , \quad i = 1,2 \tag{2.10}$$

Για να έχει λύση το σύστημα (2.10) ως προς ψ, θα πρέπει οι δύο εξισώσεις που το αποτελούν να είναι συμβατές μεταξύ τους. Η συμβατότητα μπορεί να ρυθμιστεί με κατάλληλη επιλογή της παραμετρικής συνάρτησης $u(x,t)$. Έστω τώρα ότι ισχύει το εξής: Το γραμμικό σύστημα (2.10) είναι ολοκληρώσιμο ως προς ψ αν και μόνο αν το u είναι λύση της μη-γραμμικής ΜΔΕ $F[u]=0$. Λέμε τότε ότι το σύστημα (2.10) αποτελεί ένα *ζεύγος Lax* για τη ΜΔΕ $F[u]=0$. Η κατασκευή του ζεύγους Lax αποτελεί το σημείο εκκίνησης μιας βασικής μεθόδου ολοκλήρωσης μη-γραμμικών ΜΔΕ που ονομάζεται *αντίστροφη σκέδαση* (inverse scattering method).

Ας δούμε μερικά παραδείγματα ζευγών Lax για μη-γραμμικές ΜΔΕ:

1. Εξίσωση Korteweg-de Vries

Η *εξίσωση Korteweg-de Vries* (KdV) περιγράφει τη διάδοση μιας μορφής μη-γραμμικών κυμάτων με «σωματιδιακά» χαρακτηριστικά. Τα κύματα αυτά αναφέρονται ως *solitons* [1-4]. Μια συνήθης γραφή της εξίσωσης είναι

$$F[u] \equiv u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.11}$$

Το ζεύγος Lax για την (2.11) γράφεται

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi \quad (\alpha) \qquad \psi_t = 2(u+2\lambda)\psi_x - u_x\psi \quad (\beta) \tag{2.12}$$

όπου λ μια αυθαίρετη σταθερή παράμετρος. Για να είναι το σύστημα (2.12) ολοκληρώσιμο ως προς ψ, οι εξισώσεις (α) και (β) θα πρέπει να είναι συμβατές μεταξύ τους για κάθε τιμή τού λ. Έτσι, το $(\psi_{xx})_t$ από την (α) θα πρέπει να συμφωνεί με το $(\psi_t)_{xx}$ από τη (β). Η *συνθήκη συμβατότητας* (ή *συνθήκη ολοκληρωσιμότητας*), λοιπόν, είναι $(\psi_{xx})_t=(\psi_t)_{xx}$. Παραγωγίζοντας, αντίστοιχα, τις (α) και (β), και χρησιμοποιώντας τις ίδιες σχέσεις για να απαλείψουμε, όπου χρειάζεται, τα ψ_{xx} και ψ_t, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})\psi \equiv F[u]\psi = 0$$

Άρα, για να έχει το σύστημα (2.12) μη-τετριμμένη λύση $\psi \neq 0$, θα πρέπει να ισχύει ότι $F[u]=0$, δηλαδή, το u θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση KdV (2.11).

2. Μη-γραμμικό μοντέλο *σ*

Η βασική εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί σαν αναγωγή, στις δύο διαστάσεις, της πιο σύνθετης αυτο-δυϊκής εξίσωσης Yang-Mills, την οποία θα συναντήσουμε αργότερα. Γράφεται στη μορφή

$$F[g] \equiv \partial_t(g^{-1}g_x) + \partial_x(g^{-1}g_t) = 0 \tag{2.13}$$

όπου, γενικά, υποθέτουμε ότι το $g=g(x,t)$ παρίσταται σαν αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας αυθαίρετης τάξης, του οποίου τα στοιχεία είναι μιγαδικά. (Τεχνικά, λέμε ότι το g παίρνει τιμές στην ομάδα $GL(n,C)$, όπου n η τάξη του πίνακα.) Το ζεύγος Lax για την (2.13) γράφεται

$$\psi_t = \frac{\lambda}{1-\lambda}\, g^{-1}g_t\psi \quad (\alpha) \qquad \psi_x = -\frac{\lambda}{1+\lambda}\, g^{-1}g_x\psi \quad (\beta) \tag{2.14}$$

όπου ψ ένας μιγαδικός πίνακας τάξης n, και λ μια αυθαίρετη σταθερή μιγαδική παράμετρος. Η συμβατότητα των (α) και (β) απαιτεί ότι $(\psi_t)_x=(\psi_x)_t$. Παραγωγίζοντας, αντίστοιχα, τις (α) και (β), χρησιμοποιώντας τις ίδιες σχέσεις για να απαλείψουμε, όπου χρειάζεται, τα ψ_x και ψ_t, και απαλείφοντας στο τέλος τον κοινό παράγοντα ψ (για $\psi \neq 0$), καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\partial_t(g^{-1}g_x) + \partial_x(g^{-1}g_t) - \lambda\left\{\partial_t(g^{-1}g_x) - \partial_x(g^{-1}g_t) + [g^{-1}g_t, g^{-1}g_x]\right\} = 0$$

όπου, γενικά, $[A, B] \equiv AB-BA$ είναι ο *μεταθέτης* δύο πινάκων A και B. Η ποσότητα μέσα στις αγκύλες είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν [βλ. Παράρτημα, σχέση (6.6)]. Έτσι, για να έχει το σύστημα (2.14) μη-τετριμμένη λύση ως προς ψ, θα πρέπει το g να ικανοποιεί τη ΜΔΕ (2.13).

3. Το ζεύγος Lax ως λύση του προβλήματος

Σε μερικές περιπτώσεις, η εύρεση ενός ζεύγους Lax για ένα πρόβλημα ισοδυναμεί με την αυτόματη λύση του προβλήματος. Για παράδειγμα, έστω ότι αναζητούμε δύο συναρτήσεις $X(x,t)$ και $T(x,t)$, με τιμές στο $GL(n,C)$, που ικανοποιούν τη ΜΔΕ

$$X_t - T_x + [X,T] = 0 \tag{2.15}$$

Έστω ψ συνάρτηση με τιμές στο $GL(n,C)$. Δοκιμάζουμε το γραμμικό σύστημα ως προς ψ,

$$\psi_x = X\psi \quad (\alpha) \qquad \psi_t = T\psi \quad (\beta) \tag{2.16}$$

Παραγωγίζοντας την (α) ως προς t και τη (β) ως προς x, χρησιμοποιώντας τις (α) και (β) για να απαλείψουμε τις παραγώγους τού ψ, και εφαρμόζοντας τη συνθήκη συμβατότητας $(\psi_x)_t = (\psi_t)_x$, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\left(X_t - T_x + [X,T]\right)\psi = 0$$

Για να έχει, λοιπόν, το σύστημα (2.16) μη-τετριμμένη λύση ως προς ψ , θα πρέπει τα X και T να ικανοποιούν τη ΜΔΕ (2.15). Προσέξτε τώρα ότι το σύστημα (2.16), αν και θέτει περιορισμούς στα X και T για να είναι ολοκληρώσιμο ως προς ψ, δεν θέτει κανέναν περιορισμό στο ίδιο το ψ : το ψ μπορεί να είναι αυθαίρετο (κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τα προηγούμενα παραδείγματα). Επιπλέον, για κάθε εκλογή τού ψ, το σύστημα (2.16) μπορεί να επιλυθεί, αντίστροφα, ως προς τα X και T:

$$X = \psi_x \psi^{-1} , \qquad T = \psi_t \psi^{-1} \tag{2.17}$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (6.6) στο Παράρτημα, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι τα X και T στην (2.17) ικανοποιούν τη ΜΔΕ (2.15), για *αυθαίρετη* εκλογή τού ψ.

Ένα ισοδύναμο πρόβλημα περιγράφεται με την εξής εναλλακτική μορφή των παραπάνω εξισώσεων:

$$X_t - T_x + [T,X] = 0 \tag{2.15΄}$$

$$\psi_x = \psi X \quad (\alpha) \qquad \psi_t = \psi T \quad (\beta) \tag{2.16΄}$$

$$X = \psi^{-1}\psi_x , \qquad T = \psi^{-1}\psi_t \tag{2.17΄}$$

Γ. Νόμοι διατήρησης

Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα από τη δυναμική των ρευστών. Θεωρούμε ένα (γενικά συμπιεστό) ρευστό που κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα x. Υποθέτουμε ότι όλες οι τοπικές ιδιότητες του ρευστού είναι συναρτήσεις της θέσης x και του χρόνου t. Έστω $\rho(x,t)$ η γραμμική πυκνότητα του ρευστού, και έστω $u(x,t)$ η ταχύτητα κίνησής του. Η διατήρηση της μάζας του ρευστού εκφράζεται με την *εξίσωση συνεχείας*,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \tag{2.18}$$

Τώρα, στο άπειρο δεν υπάρχει ρευστό, οπότε μπορούμε να γράψουμε την *οριακή συνθήκη*

$$\rho \to 0 \quad \text{και} \quad \rho u \to 0 \quad \text{καθώς} \quad x \to \pm\infty \tag{2.19}$$

Ολοκληρώνοντας την (2.18) ως προς x από $-\infty$ έως $+\infty$, έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\,dx \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,t)\,dx=-[\rho u]_{-\infty}^{+\infty}=0-0=0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την οριακή συνθήκη (2.19). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,t)\,dx = \text{σταθερό, ανεξάρτητο του } t \qquad (2.20)$$

Το ολοκλήρωμα στην (2.20) παριστά την ολική μάζα του ρευστού. Έτσι, η (2.20) εκφράζει τη διατήρηση της μάζας του συστήματος στο χρόνο. Σχέσεις όπως η (2.18) ή, ισοδύναμα, η (2.20), ονομάζονται *νόμοι διατήρησης*.

Θεωρούμε τώρα μια ΜΔΕ $F[u]=0$ σε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές x, t. Η έκφραση $F[u]$ (όπως και κάθε έκφραση αυτής της μορφής) περιέχει, γενικά, τη συνάρτηση u και/ή διάφορες μερικές παραγώγους της (σε κάποιες περιπτώσεις, μπορεί να περιέχει απευθείας και τα x, t). Ένας *νόμος διατήρησης* για την $F[u]=0$ είναι μια εξίσωση συνεχείας που ισχύει *υπό την προϋπόθεση ότι το u είναι λύση της* $F[u]=0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}P[u]+\frac{\partial}{\partial x}Q[u]=0 \quad \text{όταν} \quad F[u]=0 \qquad (2.21)$$

(Χρησιμοποιούμε επίσης και τις πιο σύντομες γραφές $\partial_t P[u]+\partial_x Q[u]=0$ και $P_t+Q_x=0$.) Προσέξτε ότι οι *πυκνότητες* P και Q είναι συναρτήσεις των x και t μέσω του u και των μερικών παραγώγων του (είναι όμως δυνατό τα x, t να περιέχονται και απευθείας στα P και Q).

Από φυσική άποψη, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το u και όλες οι παράγωγοί του τείνουν στο μηδέν καθώς $x\to\pm\infty$. Το ίδιο απαιτούμε να ισχύει και για τις πυκνότητες $P[u]$ και $Q[u]$. Έτσι, θεωρούμε ως δεδομένες τις *οριακές συνθήκες*

$$P[u]\to 0 \quad \text{και} \quad Q[u]\to 0 \quad \text{καθώς} \quad x\to\pm\infty \qquad (2.22)$$

Με την παρατήρηση αυτή, ολοκληρώνουμε την (2.21) ως προς x από $-\infty$ έως $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial P}{\partial t}\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}P\,dx=-[Q]_{-\infty}^{+\infty}=0-0=0$$

Έχουμε έτσι ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}P[u]\,dx = \text{σταθερό, ανεξάρτητο του } t \qquad (2.23)$$

Λέμε ότι το ολοκλήρωμα στην (2.23) είναι μια *σταθερά της κίνησης* για το φυσικό πρόβλημα που εκφράζει η ΜΔΕ $F[u]=0$. Τονίζουμε ότι η (2.23) δεν ισχύει ταυτοτικά για οποιαδήποτε συνάρτηση $u(x,t)$, αλλά *μόνο για τις λύσεις u της ΜΔΕ* $F[u]=0$.

Ένας νόμος διατήρησης της μορφής (2.21) λέγεται *τετριμμένος* αν δεν δίνει κάποια χρήσιμη πληροφορία σχετικά με τις λύσεις της ΜΔΕ $F[u]=0$, αν μας λέει κάτι που ήδη γνωρίζουμε. Αυτό συμβαίνει στις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Οι πυκνότητες $P\,[u]$ και $Q\,[u]$ μηδενίζονται για τις λύσεις u της ΜΔΕ $F\,[u]=0$. Η (2.21), τότε, ανάγεται σε μια τετριμμένη ισότητα $0+0=0$ όταν $F[u]=0$.
2. Η (2.21) ισχύει ταυτοτικά για κάθε u, ανεξάρτητα αν αυτό επαληθεύει ή όχι τη ΜΔΕ $F[u]=0$. Για παράδειγμα, $\partial_t(u_x)+\partial_x(-u_t)\equiv 0$.
3. Ο νόμος διατήρησης (2.21) είναι παράγωγος ενός ήδη γνωστού νόμου, ή γραμμικός συνδυασμός (με *σταθερούς* συντελεστές) γνωστών νόμων διατήρησης.
4. Η πυκνότητα $P\,[u]$ είναι παράγωγος ως προς x μιας συνάρτησης $R\,[u]$, τέτοιας ώστε $R\to 0$ όταν $x\to\pm\infty$. Στην περίπτωση αυτή, το ολοκλήρωμα της $P\,[u]$ στην (2.23) ισούται με $R(+\infty)-R(-\infty)=0-0=0$, και η σταθερά της κίνησης μηδενίζεται.

Οι νόμοι διατήρησης στις ΜΔΕ (ιδιαίτερα στις μη-γραμμικές) έχουν σημασία ανάλογη με αυτή των σταθερών της κίνησης στα μηχανικά συστήματα. Όπως γνωρίζουμε από την Κλασική Μηχανική [10], η εύρεση όσο το δυνατόν περισσότερων σταθερών αποτελεί σημαντικό βήμα για τον προσδιορισμό της λύσης του προβλήματος, αφού έτσι περιορίζεται (τουλάχιστον σε κάποιο βαθμό) η αναγκαιότητα της απευθείας ολοκλήρωσης των εξισώσεων. Επειδή μια ΜΔΕ μπορεί να θεωρηθεί ως σύστημα άπειρων διαστάσεων, η ολοκληρωσιμότητά της τυπικά συνδέεται με την ύπαρξη άπειρου πλήθους νόμων διατήρησης [1-3]. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι, συχνά, οι νόμοι αυτοί σχετίζονται άμεσα με την παρουσία ζεύγους Lax και/ή μετασχηματισμού Bäcklund. Έτσι, αν μη τι άλλο, η ύπαρξη απειρίας νόμων διατήρησης αποτελεί ένδειξη ολοκληρωσιμότητας για μια μη-γραμμική ΜΔΕ.

Ας δούμε τώρα παραδείγματα νόμων διατήρησης για μη-γραμμικές ΜΔΕ :

1. Εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV)

Θυμίζουμε ότι η εξίσωση KdV γράφεται

$$F\,[u]\equiv u_t-6u\,u_x+u_{xxx}=0 \tag{2.24}$$

προσθέτοντας εδώ και την οριακή συνθήκη ότι το u και όλες οι μερικές παράγωγοί του τείνουν στο μηδέν όταν $x\to\pm\infty$. Καταρχήν, η ίδια η εξίσωση γράφεται στη μορφή νόμου διατήρησης:

$$u_t+(u_{xx}-3u^2)_x \equiv \partial_t u+\partial_x(u_{xx}-3u^2)=0$$

με $P[u]\equiv u$ και $Q[u]\equiv u_{xx}-3u^2$. Άρα, βάσει της (2.23),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = \text{σταθερό}$$

Ένας δεύτερος νόμος διατήρησης βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε την (2.24) επί u. Το αποτέλεσμα είναι

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t+\left(u\,u_{xx}-\frac{1}{2}u_x^{\,2}-2u^3\right)_x=0 \quad \text{όταν} \quad F\,[u]=0$$

έτσι ώστε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,dx = \text{σταθερό}$$

Ένας τρίτος νόμος διατήρησης βρίσκεται αν πάρουμε το συνδυασμό $3u^2F\,[u]+u_x\partial_x F\,[u]$, με αποτέλεσμα ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(u^3+\frac{1}{2}u_x^{\,2})\,dx = \text{σταθερό}$$

Όπως αποδεικνύεται [1-3], η εξίσωση KdV διαθέτει ένα άπειρο πλήθος ανεξάρτητων νόμων διατήρησης. Γενικά, η παρουσία μιας απειρίας τέτοιων νόμων σε μια μη-γραμμική ΜΔΕ υποδηλώνει ότι είναι πιθανό η εξίσωση αυτή να είναι ολοκληρώσιμη με τη μέθοδο της *αντίστροφης σκέδασης* (inverse scattering), με χρήση ενός κατάλληλου γραμμικού ζεύγους Lax. Τούτο είναι σίγουρα αληθές για την KdV.

2. Εξίσωση sine-Gordon

Η εξίσωση γράφεται

$$F\,[u] \equiv u_{xt} - \sin u = 0 \qquad (2.25)$$

με την οριακή συνθήκη ότι το u και οι παράγωγοί του τείνουν στο μηδέν όταν $x \to \pm\infty$. Και η εξίσωση αυτή διαθέτει ένα άπειρο πλήθος νόμων διατήρησης. Ας δούμε μερικούς:

$$(1-\cos u)_t - (\frac{1}{2}u_t^{\,2})_x = 0 \quad \text{όταν} \quad F\,[u]=0$$

$$(\frac{1}{2}u_x^{\,2})_t - (1-\cos u)_x = 0 \quad \text{όταν} \quad F\,[u]=0$$

$$(\frac{1}{4}u_x^{\,4} - u_{xx}^{\,2})_t + (u_x^{\,2}\cos u)_x = 0 \quad \text{όταν} \quad F\,[u]=0$$

ΙΙΙ. Συμμετρίες

Α. Γενική ιδέα

Έστω μια ΜΔΕ $F\,[u]=0$, όπου, χάριν απλότητας, η λύση u είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών x και t: $u=u(x,t)$. Γενικά, $F\,[u] \equiv F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \ldots)$. Γεωμετρικά, λέμε ότι η F ορίζεται σε ένα *χώρο jet* (jet space) [9,11] με συντεταγμένες τα x, t, u και όλες τις αναγκαίες παραγώγους τού u. Μια λύση της ΜΔΕ, τότε, είναι μια «επιφάνεια» στο χώρο jet. Θεωρούμε ένα μετασχηματισμό $u(x,t) \to u'(x,t)$, από τη συνάρτηση u σε μια νέα συνάρτηση u'. Ο μετασχηματισμός αυτός παριστά μια *συμμετρία* της ΜΔΕ αν ικανοποιείται η εξής συνθήκη: η $u'(x,t)$ είναι λύση της $F\,[u]=0$ *όταν* η $u(x,t)$ είναι λύση της $F\,[u]=0$. Δηλαδή,

$$F\,[u'] = 0 \quad \text{όταν} \quad F\,[u]=0 \qquad (3.1)$$

Οι συμμετρίες που μας ενδιαφέρουν εδώ είναι οι *συνεχείς* συμμετρίες, αυτές δηλαδή που μπορούν να εκφραστούν με απειροστούς μετασχηματισμούς. Ένας *απειροστός μετασχηματισμός συμμετρίας* γράφεται

$$u \to u' = u + \delta u \qquad (3.2)$$

όπου το $\delta u= u' - u$ είναι απειροστή ποσότητα, με την έννοια ότι $(\delta u)^2 \approx 0$, $(\delta u)^3 \approx 0$, κλπ. Η συνθήκη συμμετρίας (3.1) γράφεται

$$F[u+\delta u] = 0 \quad \text{όταν} \quad F[u] = 0 \tag{3.3}$$

Τώρα, μια απειροστή μεταβολή δu του u επάγει μια αντίστοιχη (απειροστή) μεταβολή τού $F[u]$. Ορίζουμε

$$\delta F[u] = F[u+\delta u] - F[u] \tag{3.4}$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1. Για $F[u]=u_x$, έχουμε ότι $\delta u_x=(u+\delta u)_x - u_x = (\delta u)_x$, ενώ για $F[u]=u_t$ έχουμε $\delta u_t=(\delta u)_t$.

2. Για $F[u]=u^2$, έχουμε $\delta(u^2)=(u+\delta u)^2-u^2=2u\delta u$, αφού $(\delta u)^2\approx 0$.

Προσέξτε ότι ο απειροστός τελεστής δ αντιμετατίθεται με όλους τους τελεστές μερικής παραγώγισης. Γράφουμε

$$[\delta, \partial_x] = [\delta, \partial_t] = 0 \quad \text{όπου} \quad [\delta, \partial_x]F[u] \equiv \delta(\partial_x F[u]) - \partial_x(\delta F[u]), \ \text{κλπ.}$$

Επειδή ο τελεστής δ εκφράζει απειροστή μεταβολή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει όλες τις ιδιότητες ενός διαφορικού. Έτσι,

$$\begin{aligned} \delta F[u] &\simeq \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_t}\delta u_t + \cdots \\ &= \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x}(\delta u)_x + \frac{\partial F}{\partial u_t}(\delta u)_t + \cdots \end{aligned} \tag{3.5}$$

Επίσης, ισχύει ο *κανόνας του Leibniz*,

$$\delta\big(F[u]G[u]\big) = \big(\delta F[u]\big)G[u] + F[u]\delta G[u] \tag{3.6}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (3.4), γράφουμε την συνθήκη συμμετρίας (3.3) στη μορφή

$$\delta F[u] = 0 \quad \text{όταν} \quad F[u] = 0 \tag{3.7}$$

Η χρήση του απειροστού τελεστή δ ίσως ενοχλεί τον αναγνώστη, αφού πολλές σχέσεις στις οποίες εμφανίζεται ισχύουν μόνο προσεγγιστικά. Για το λόγο αυτό, θα περιγράψουμε τώρα μια εναλλακτική προσέγγιση που κάνει χρήση ενός πεπερασμένου τελεστή, της *παραγώγου Lie*. Ο αλγεβρικός φορμαλισμός που προτείνουμε είναι αρκετά γενικός, και μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος στην περίπτωση των ΜΔΕ που οι λύσεις τους είναι πίνακες. Για τους πιο «κλασικούς», γεωμετρικούς φορμαλισμούς, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη βιβλιογραφία [11-19].

B. Παράγωγος Lie και γραμμική συνθήκη συμμετρίας

Στην προαναφερόμενη βιβλιογραφία, οι συμμετρίες των ΜΔΕ εκφράζονται με τη βοήθεια διανυσματικών πεδίων στο χώρο jet, και τα πεδία αυτά παρίστανται στη μορφή διαφορικών τελεστών. Η πρακτική αυτή, αν και καλά καθιερωμένη εδώ και πολλά χρόνια, έχει ένα βασικό μειονέκτημα το οποίο αναδεικνύεται στην περίπτωση των ΜΔΕ που οι λύσεις τους είναι πίνακες: Πώς θα υπολογίσουμε την *αγκύλη Lie* (το μεταθέτη) δύο διαφορικών τελεστών στους οποίους κάποιες από τις μεταβλητές, καθώς και οι συντελεστές των μερικών παραγώγων ως προς τις μεταβλητές αυτές, είναι πίνακες; Το ζήτημα αυτό εκκρεμεί από την εποχή που πρωτοπαρουσιάστηκε η γεωμετρική μέθοδος εύρεσης συμμετριών των ΜΔΕ με λύσεις στη μορφή πινάκων [17]. Προέκυψε μάλιστα στην πράξη ως πρόβλημα λίγο αργότερα, όταν θελήσαμε να μελετήσουμε την άλγεβρα Lie των άπειρων συμμετριών της αυτο-δυϊκής εξίσωσης Yang-Mills [8]. Αν και βρέθηκε μια *ad hoc* λύση για το συγκεκριμένο πρόβλημα, δεν αναπτύχθηκε παράλληλα ένας γενικότερος φορμαλισμός για την αντιμετώπιση τέτοιων περιπτώσεων. Η συζήτηση που ακολουθεί αποτελεί ένα βήμα στην κατεύθυνση της κάλυψης αυτού του κενού. Θα περιοριστούμε στην έκθεση των βασικών εννοιών που αφορούν τις συμμετρίες των ΜΔΕ, χωρίς να υπεισέλθουμε στο πολύ δυσκολότερο πρόβλημα του *υπολογισμού* τέτοιων συμμετριών. (Για τις βασικές τεχνικές, βλ. [11,16-18].)

Έστω $F[u] \equiv F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \ldots)$ μια δοσμένη συνάρτηση στο χώρο jet. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η παραγώγιση τέτοιων συναρτήσεων ως προς x ή t θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη τους δύο τρόπους, άμεσο και έμμεσο, με τους οποίους η $F[u]$ μπορεί να εξαρτάται από τις μεταβλητές αυτές. Αν το u είναι μονόμετρο μέγεθος, μπορούμε να ορίσουμε τους *τελεστές ολικής παραγώγισης*,

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + \cdots \\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + \cdots \end{aligned} \tag{3.8}$$

(Προσέξτε ότι τώρα τα $\partial/\partial x$ και $\partial/\partial t$ αναφέρονται αποκλειστικά στην *άμεση* εξάρτηση της F από τα x και t, σε αντίθεση με τους συμβολισμούς που υιοθετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα!) Στην περίπτωση, όμως, που το u έχει διαστάσεις πίνακα, η (3.8) έχει μόνο συμβολική σημασία και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πραγματικούς υπολογισμούς. Θα πρέπει, λοιπόν, να ορίσουμε τα D_x και D_t με διαφορετικό τρόπο.

Ορίζουμε ένα γραμμικό τελεστή D_x που δρα στο σύνολο των συναρτήσεων $F[u]$ στο χώρο jet και έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Για μια συνάρτηση της μορφής $f(x,t)$, ισχύει ότι $D_x f = \partial f/\partial x \equiv \partial_x f$.

2. Για τη μεταβλητή u και τις παραγώγους της, ισχύει ότι $D_x u = u_x$, $D_x u_x = u_{xx}$, $D_x u_t = u_{tx}$, κλπ.

3. Ικανοποιείται ο κανόνας του Leibniz

$$D_x\left(F[u]\, G[u]\right) = \left(D_x F[u]\right) G[u] + F[u] D_x G[u] \equiv F_x G + F G_x \tag{3.9}$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε και το γραμμικό τελεστή D_t. Συχνά θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$D_x F[u] \equiv F_x \ , \qquad D_t F[u] \equiv F_t \tag{3.10}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\partial_x \partial_t = \partial_t \partial_x$ και $u_{xt} = u_{tx}$, μπορούμε να γράψουμε

$$D_x D_t = D_t D_x \quad \Leftrightarrow \quad [D_x, D_t] = 0$$

(οι ολικές παράγωγοι αντιμετατίθενται). Μπορούμε επίσης να ορίσουμε ολικές παραγώγους ανώτερης τάξης:

$$D_{xx} = D_x^{\,2}\,,\ \ D_{tt} = D_t^{\,2}\,,\ \ D_{xt} = D_{tx} = D_x D_t = D_t D_x\,,\ \ \text{κλπ.}$$

Αυτές οι παράγωγοι, όμως, *δεν* ικανοποιούν πλέον τον κανόνα του Leibniz.

Παραδείγματα:

1. Ο υπολογισμός των $D_x(A^{-1})$ και $D_t(A^{-1})$, όπου το A είναι τετραγωνικός πίνακας, γίνεται όπως για την εξίσωση (6.5) στο Παράρτημα. Το αποτέλεσμα είναι

$$(A^{-1})_x = -A^{-1}A_x A^{-1}\ , \quad (A^{-1})_t = -A^{-1}A_t A^{-1} \tag{3.11}$$

2. Κατ' αναλογία με τη σχέση (6.8) στο Παράρτημα,

$$D_x\,[A,B] = [A_x\,,B] + [A,B_x]\ , \quad D_t\,[A,B] = [A_t\,,B] + [A,B_t] \tag{3.12}$$

όπου $[A\,,B]=AB-BA$ ο μεταθέτης των πινάκων A και B.

3. Σαν ειδικό παράδειγμα, έστω $F\,[u]=x\,t\,u_x^{\,2}$, όπου το u είναι τετραγωνικός πίνακας. Τότε,

$$D_t F\,[u] = D_t\,(x\,t\,u_x\,u_x) = x\,u_x^{\,2} + x\,t\,(u_{xt}\,u_x + u_x\,u_{xt})$$

Προχωρούμε στους μετασχηματισμούς συμμετρίας για τη ΜΔΕ $F\,[u] = 0$. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός (θα τον ονομάσουμε M) παράγει μια μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων της ΜΔΕ από κάθε δοσμένη λύση $u(x,t)$. Γράφουμε:

$$M:\ u(x,t) \rightarrow \bar{u}(x,t;\alpha) \quad \text{όπου} \quad \bar{u}(x,t;0) = u(x,t) \tag{3.13}$$

Για απειροστές τιμές της παραμέτρου α, μπορούμε να γράψουμε

$$\bar{u}(x,t;\alpha) \simeq u(x,t) + \alpha Q[u] \quad \text{όπου} \quad Q[u] = \left.\frac{d\bar{u}}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{3.14}$$

Η συνάρτηση $Q\,[u] \equiv Q\,(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{tt},u_{xt},\ldots)$ στο χώρο jet καλείται *χαρακτηριστική* της συμμετρίας. Καλούμε $\delta u = \bar{u} - u$, έτσι ώστε

$$\delta u \simeq \alpha\, Q[u] \tag{3.15}$$

Ορίζουμε τώρα ένα γραμμικό τελεστή L (*παράγωγος Lie ως προς τη χαρακτηριστική Q*) που δρα στο σύνολο των συναρτήσεων $F\,[u]$ στο χώρο jet και έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Για μια συνάρτηση της μορφής $f(x,t)$ (που δεν εμπεριέχει, δηλαδή, το u), ισχύει ότι

$$L f = 0$$

2. Για $F\,[u] = u$ ισχύει ότι

$$L\,u = Q\,[u] \tag{3.16}$$

3. Ο L αντιμετατίθεται με όλους τους τελεστές ολικής παραγώγισης:

$$L(D_x F[u]) = D_x(L F[u]) \ , \qquad L(D_t F[u]) = D_t(L F[u]) \tag{3.17}$$

Γράφουμε:

$$[L, D_x] \equiv L D_x - D_x L = 0 \ , \qquad [L, D_t] \equiv L D_t - D_t L = 0$$

4. Ισχύει ο κανόνας του Leibniz:

$$L\big(F[u]\, G[u]\big) = \big(LF[u]\big) G[u] + F[u] L G[u] \tag{3.18}$$

Παραδείγματα:

1. Από τις (3.16) και (3.17), έχουμε

$$L u_x = L(D_x u) = D_x(Lu) = Q_x[u] \ , \qquad L u_t = Q_t[u] \tag{3.19}$$

2. Κατ' αναλογία με τις (3.11) και (3.12),

$$L(A^{-1}) = -A^{-1}(LA)A^{-1} \tag{3.20}$$

$$L[A, B] = [LA, B] + [A, LB] \tag{3.21}$$

όπου A, B τετραγωνικοί πίνακες και $[A, B] = AB - BA$.

3. Για το προηγούμενο ειδικό παράδειγμα $F[u] = x t u_x^2$, όπου το u είναι τετραγωνικός πίνακας, έχουμε:

$$\begin{aligned} L F[u] &= L(x t u_x^2) = x t L(u_x u_x) = x t [(L u_x) u_x + u_x L u_x] \\ &= x t [(Lu)_x u_x + u_x (Lu)_x] = x t (Q_x u_x + u_x Q_x) \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που η λύση u της ΜΔΕ είναι βαθμωτή συνάρτηση, η παράγωγος Lie ως προς τη χαρακτηριστική Q δέχεται μια κομψή αναπαράσταση στη μορφή διαφορικού τελεστή:

$$\begin{aligned} L = {} & Q[u] \frac{\partial}{\partial u} + Q_x[u] \frac{\partial}{\partial u_x} + Q_t[u] \frac{\partial}{\partial u_t} + \\ & + Q_{xx}[u] \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + Q_{tt}[u] \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + Q_{xt}[u] \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \cdots \end{aligned} \tag{3.22}$$

Τέτοιες αναπαραστάσεις έχουν μόνο συμβολική σημασία για τις ΜΔΕ που οι λύσεις τους είναι πίνακες, και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πραγματικούς υπολογισμούς. Αυτό κατέστησε αναγκαία την επέκταση [17-19] των υπαρχουσών μεθόδων εύρεσης συμμετριών των ΜΔΕ [11-16], έτσι ώστε να αντιμετωπίζονται και αυτά τα πιο σύνθετα προβλήματα.

Η συνθήκη συμμετρίας της ΜΔΕ $F[u]=0$, εκφρασμένη προηγουμένως στην προσεγγιστική μορφή (3.7), μπορεί τώρα να αναδιατυπωθεί με ακριβέστερο τρόπο με τη βοήθεια της παραγώγου Lie. Προκειμένου να αποφύγουμε την εμπλοκή στα δύσκολα μονοπάτια της Διαφορικής Γεωμετρίας (βλ., π.χ., [11,17]), θα θυσιάσουμε τη μαθηματική τελειότητα και τη γοητεία του αφηρημένου στο βωμό της επιθυμητής, για την περίσταση, απλότητας.

Παρατηρούμε ότι ο απειροστός τελεστής δ και η παράγωγος Lie L μοιράζονται κοινές ιδιότητες:

1. Είναι γραμμικοί τελεστές.
2. Αντιμετατίθενται με τους τελεστές ολικής παραγώγισης.
3. Δεν επιδρούν σε συναρτήσεις της μορφής $f(x,t)$.
4. Ικανοποιούν τον κανόνα του Leibniz.

Επίσης, από τις σχέσεις (3.15) και (3.16), $\delta u = \alpha Q[u]$ και $Lu = Q[u]$, έχουμε ότι

$$\delta u = \alpha\, Lu \tag{3.23}$$

και, κατ' επέκταση, $\delta u_x = \alpha L u_x$, $\delta u_t = \alpha L u_t$, κλπ. Τέλος, από τις (3.5) και (3.15) παίρνουμε

$$\delta F[u] = \alpha \left(\frac{\partial F}{\partial u} Q + \frac{\partial F}{\partial u_x} Q_x + \frac{\partial F}{\partial u_t} Q_t + \cdots \right) \tag{3.24}$$

για την περίπτωση που το u είναι βαθμωτή συνάρτηση, ενώ από την (3.22) έχουμε

$$L F[u] = \frac{\partial F}{\partial u} Q + \frac{\partial F}{\partial u_x} Q_x + \frac{\partial F}{\partial u_t} Q_t + \cdots \tag{3.25}$$

Είναι λοιπόν φανερό ότι, γενικά,

$$\delta F[u] = \alpha\, L F[u] \tag{3.26}$$

Από τις (3.23) και (3.26) παρατηρούμε ότι η παράγωγος Lie διατηρεί το χαρακτήρα των συναρτήσεων στις οποίες δρα. Δηλαδή, απεικονίζει βαθμωτές συναρτήσεις σε βαθμωτές συναρτήσεις, πίνακες σε πίνακες ίδιας τάξης, κλπ. (Για έναν ακριβέστερο, γεωμετρικό ορισμό της παραγώγου Lie, βλ. [11].) Η συνθήκη συμμετρίας (3.7) παίρνει τώρα τη μορφή

$$L F[u] = 0 \quad \text{όταν} \quad F[u] = 0 \tag{3.27}$$

Ο αναγνώστης μπορεί να διερωτηθεί: «Μα, αφού F=0 και ο L είναι γραμμικός τελεστής, δεν είναι αυτονόητο ότι, γενικά, LF=0 ; » Όχι! Θυμίζουμε ότι, για να υπολογίσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $x=x_0$, πρώτα βρίσκουμε τη συνάρτηση $f'(x)$ και *μετά* κάνουμε την αντικατάσταση $x=x_0$. Δεν παραγωγίζουμε εξαρχής την τιμή $f(x_0)$ της συνάρτησης $f(x)$ στο δοσμένο σημείο (πράγμα που, φυσικά, θα έδινε πάντα μηδέν!). Όμοια, στην (3.27), πρώτα υπολογίζουμε την έκφραση $LF[u]$ για *αυθαίρετο* u, και *κατόπιν* αξιώνουμε ότι η έκφραση αυτή μηδενίζεται *όταν* το u είναι λύση της ΜΔΕ $F[u] = 0$. Μια καλλίτερη γραφή τής (3.27), την οποία θα υιοθετήσουμε στη συνέχεια, είναι

$$L F[u] = 0 \quad \text{mod} \quad F[u] \tag{3.28}$$

Αν το u είναι βαθμωτή συνάρτηση, οι (3.25) και (3.28) δίνουν μια γραμμική ΜΔΕ για τη χαρακτηριστική Q της συμμετρίας:

$$\frac{\partial F}{\partial u} Q + \frac{\partial F}{\partial u_x} Q_x + \frac{\partial F}{\partial u_t} Q_t + \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} Q_{xx} + \frac{\partial F}{\partial u_{tt}} Q_{tt} + \frac{\partial F}{\partial u_{xt}} Q_{xt} + \cdots = 0 \quad \text{mod} \quad F[u] \tag{3.29}$$

Σε κάθε περίπτωση (ακόμα και όταν το u έχει, π.χ., τη μορφή πίνακα), ισχύει το εξής:

Η συνθήκη συμμετρίας (3.28) για τη ΜΔΕ $F[u]=0$ *είναι μια γραμμική ΜΔΕ για τη χαρακτηριστική* Q .

Τη γραμμική αυτή ΜΔΕ για τη συνθήκη συμμετρίας τη γράφουμε, συμβολικά,

$$S(Q\,;u)=0 \quad \mathrm{mod} \quad F[u] \tag{3.30}$$

όπου $S(Q\,;u)=L\,F[u]$.

Παράδειγμα 1: Εξίσωση sine-Gordon (s-G). Η εξίσωση γράφεται

$$F[u]\equiv u_{xt}-\sin u=0$$

Επειδή το u είναι βαθμωτή συνάρτηση, εκφράζουμε τη συνθήκη συμμετρίας (3.30) στη μορφή (3.29):

$$Q_{xt}-(\cos u)\,Q=0 \quad \mathrm{mod} \quad F[u]$$

Ας δοκιμάσουμε τη λύση $Q[u]=u_x$. Η χαρακτηριστική αυτή αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό συμμετρίας [βλ. σχέση (3.13)]

$$M:\ u(x,t)\rightarrow \bar{u}(x,t;\alpha)=u(x+\alpha,\ t) \tag{3.31}$$

που σημαίνει ότι, αν η $u(x,t)$ είναι λύση της s-G, τότε και η $\bar{u}(x,t)=u(x+\alpha,\ t)$ επίσης είναι λύση. Έχουμε:

$$Q_{xt}-(\cos u)\,Q=(u_x)_{xt}-(\cos u)\,u_x=(u_{xt}-\sin u)_x=D_xF[u]=0 \quad \mathrm{mod} \quad F[u]$$

Όμοια, η χαρακτηριστική $Q[u]=u_t$ αντιστοιχεί στη συμμετρία

$$M:\ u(x,t)\rightarrow \bar{u}(x,t;\alpha)=u(x,\ t+\alpha) \tag{3.32}$$

που σημαίνει ότι, αν η $u(x,t)$ είναι λύση της s-G, τότε και η $\bar{u}(x,t)=u(x,\ t+\alpha)$ επίσης είναι λύση. Οι συμμετρίες (3.31) και (3.32) αντανακλούν το γεγονός ότι η εξίσωση s-G δεν περιέχει απευθείας τις μεταβλητές x και t. (Φυσικά, η s-G έχει και άλλες συμμετρίες που δεν αναφέρονται εδώ. Βλ., π.χ., [11].)

Παράδειγμα 2: Εξίσωση της θερμότητας. Η εξίσωση αυτή γράφεται

$$F[u]\equiv u_t-u_{xx}=0$$

Η συνθήκη συμμετρίας (3.29) είναι

$$Q_t-Q_{xx}=0 \quad \mathrm{mod} \quad F[u]$$

Όπως είναι εύκολο να δείξουμε, ισχύουν και εδώ οι συμμετρίες (3.31) και (3.32). Ας δοκιμάσουμε τώρα τη λύση $Q[u]=u$. Έχουμε:

$$Q_t-Q_{xx}=u_t-u_{xx}=F[u]=0 \quad \mathrm{mod} \quad F[u]$$

Η συμμετρία αυτή αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό

$$M: \; u(x,t) \to \bar{u}(x,t;\alpha) = e^{\alpha} u(x,t) \tag{3.33}$$

και είναι συνέπεια της γραμμικότητας της εξίσωσης της θερμότητας.

Παράδειγμα 3: Εξίσωση του Burgers. Μια γραφή της είναι

$$F[u] \equiv u_t - u_{xx} - u_x^2 = 0$$

Η συνθήκη συμμετρίας (3.29) γράφεται

$$Q_t - Q_{xx} - 2u_x Q_x = 0 \quad \text{mod} \quad F[u]$$

Δοκιμάζοντας $Q = u_x$ και $Q = u_t$, επαληθεύουμε τις συμμετρίες (3.31) και (3.32):

$$Q_t - Q_{xx} - 2u_x Q_x = u_{xt} - u_{xxx} - 2u_x u_{xx} = D_x F[u] = 0 \quad \text{mod} \quad F[u]$$
$$Q_t - Q_{xx} - 2u_x Q_x = u_{tt} - u_{xxt} - 2u_x u_{xt} = D_t F[u] = 0 \quad \text{mod} \quad F[u]$$

Μια άλλη συμμετρία είναι η $Q[u]=1$, που αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό

$$M: \; u(x,t) \to \bar{u}(x,t;\alpha) = u(x,t) + \alpha \tag{3.34}$$

και είναι συνέπεια του ότι το u υπεισέρχεται στο $F[u]$ μόνο μέσω των παραγώγων του.

Παράδειγμα 4: Εξίσωση κύματος. Η εξίσωση γράφεται

$$F[u] \equiv u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (c = \text{σταθ.})$$

με συνθήκη συμμετρίας

$$Q_{tt} - c^2 Q_{xx} = 0 \quad \text{mod} \quad F[u]$$

Η λύση $Q[u] = x u_x + t u_t$ αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό συμμετρίας

$$M: \; u(x,t) \to \bar{u}(x,t;\alpha) = u(e^{\alpha}x, e^{\alpha}t) \tag{3.35}$$

που εκφράζει το αναλλοίωτο της εξίσωσης κύματος κάτω από μια «αλλαγή κλίμακας» των x και t. [Ο αναγνώστης ας επαληθεύσει την (3.35), καθώς και τις συμμετρίες (3.31)-(3.34).]

Είναι αξιοσημείωτο ότι κάθε μία από τις παραπάνω ΜΔΕ δέχεται ένα άπειρο πλήθος μετασχηματισμών συμμετρίας [11]. Μια δυναμική μέθοδος για την εύρεση άπειρων συμμετριών είναι η αναζήτηση ενός *τελεστή επανάληψης* (recursion operator) ο οποίος, κάθε φορά που δρα πάνω σε μια χαρακτηριστική, παράγει μια νέα χαρακτηριστική για μια νέα συμμετρία. Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό στη συνέχεια, κατά τη συζήτηση της αυτο-δυϊκής εξίσωσης Yang-Mills.

Γ. Άλγεβρα Lie των συμμετριών μιας ΜΔΕ

1. Εισαγωγή

Οι συμμετρίες μιας ΜΔΕ $F[u]=0$ είναι, κατά κάποιον τρόπο, μια κλειστή «κοινωνία». Συγκεκριμένα, αποτελούν διανυσματικό χώρο με ένα επιπρόσθετο, αντισυμμετρικό εσωτερικό «γινόμενο» που καλείται *αγκύλη του Lie* (Lie bracket). Συνθέτουν, έτσι, μια *άλγεβρα Lie* (Lie algebra). Αν το u είναι βαθμωτή συνάρτηση, η αγκύλη του Lie δεν είναι τίποτ' άλλο από το μεταθέτη τελεστών της μορφής (3.22). Τι γίνεται όμως αν το u είναι, π.χ., πίνακας ; Στην περίπτωση αυτή, οι τελεστές (3.22) έχουν μόνο συμβολική σημασία, και οι μεταθέτες τους δεν ορίζονται με το συνήθη τρόπο. Πρέπει λοιπόν να γενικεύσουμε τον ορισμό της αγκύλης του Lie, έτσι ώστε να καταστεί δυνατό να μελετήσουμε την αλγεβρική δομή Lie ενός σημαντικού αριθμού κλασικών πεδιακών εξισώσεων που εκφράζονται στη μορφή πινάκων. (Ενδεικτικά αναφέρουμε το μη-γραμμικό μοντέλο σ (2.13), τις εξισώσεις Yang-Mills, την εξίσωση του Ernst στη Γενική Σχετικότητα, κλπ.)

2. Η αγκύλη του Lie

Έστω $\delta_1 u = \alpha Q_1[u]$ και $\delta_2 u = \alpha Q_2[u]$ δύο ανεξάρτητες συμμετρίες της ΜΔΕ $F[u]=0$. Οι παράγωγοι Lie που αντιστοιχούν στις χαρακτηριστικές Q_1 και Q_2 είναι L_1 και L_2 , όπου

$$L_1 u = Q_1[u] \ , \qquad L_2 u = Q_2[u] \tag{3.36}$$

Η *αγκύλη του Lie* των L_1 και L_2 συμβολίζεται $[L_1, L_2]$ και ορίζεται ως ο τελεστής εκείνος που δρα σε συναρτήσεις $F[u]$ στο χώρο jet, ως ακολούθως:

$$[L_1, L_2]\, F[u] \equiv L_1(L_2 F[u]) - L_2(L_1 F[u]) \tag{3.37}$$

Πρόταση: Η αγκύλη του Lie είναι παράγωγος Lie για τη χαρακτηριστική

$$Q_{1,2}[u] = L_1(Q_2[u]) - L_2(Q_1[u]) \tag{3.38}$$

Απόδειξη:

1. Ο τελεστής $[L_1, L_2]$ είναι γραμμικός, όπως προκύπτει από τον ορισμό (3.37) και τη γραμμικότητα των L_1 και L_2 .

2. Θέτοντας $F[u]=u$ στην (3.37), και λαμβάνοντας υπόψη την (3.36), έχουμε:

$$[L_1, L_2]\, u = L_1(L_2 u) - L_2(L_1 u) = L_1(Q_2[u]) - L_2(Q_1[u]) \equiv Q_{1,2}[u]$$

3. Ο τελεστής $[L_1, L_2]$ αντιμετατίθεται με τους τελεστές ολικής παραγώγισης, όπως προκύπτει από την (3.37) και την αντιμεταθετικότητα των L_1, L_2 με τις ολικές παραγώγους.

4. Ο τελεστής $[L_1, L_2]$ ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz . Αυτό μπορούμε να το δείξουμε από τον ορισμό (3.37) και το γεγονός ότι καθένας εκ των L_1 και L_2 υπακούει στον κανόνα του Leibniz . Παραλείποντας τις ενδιάμεσες πράξεις, δίνουμε το τελικό συμπέρασμα της απόδειξης :

$$[L_1, L_2](F[u]\,G[u]) = L_1\{L_2(F\,G)\} - L_2\{L_1(F\,G)\} = ([L_1, L_2]F)\,G + F\,[L_1, L_2]\,G$$

Στην περίπτωση που το u είναι βαθμωτή συνάρτηση, η αγκύλη του Lie μπορεί να αναπαρασταθεί σαν διαφορικός τελεστής της μορφής (3.22) με $Q = Q_{1,2}$ και, όπως μπορούμε να δείξουμε, ισούται με το μεταθέτη των διαφορικών τελεστών L_1 και L_2: Έστω

$$L_1 = Q_1[u]\frac{\partial}{\partial u} + (Q_1)_x\frac{\partial}{\partial u_x} + (Q_1)_t\frac{\partial}{\partial u_t} + \cdots$$

$$L_2 = Q_2[u]\frac{\partial}{\partial u} + (Q_2)_x\frac{\partial}{\partial u_x} + (Q_2)_t\frac{\partial}{\partial u_t} + \cdots$$

Τότε,

$$[L_1, L_2] = L_1L_2 - L_2L_1 = Q_{1,2}[u]\frac{\partial}{\partial u} + (Q_{1,2})_x\frac{\partial}{\partial u_x} + (Q_{1,2})_t\frac{\partial}{\partial u_t} + \cdots \qquad (3.39)$$

όπου

$$Q_{1,2}[u] = [L_1, L_2]\,u = L_1(L_2u) - L_2(L_1u) = L_1(Q_2[u]) - L_2(Q_1[u]) \qquad (3.40)$$

3. Η άλγεβρα Lie των συμμετριών

Έστω $\mathcal{L}$ το σύνολο όλων των παραγώγων Lie που εκφράζουν συμμετρίες της ΜΔΕ $F[u]=0$. Σύμφωνα με την (3.28),

$$LF[u] = 0 \quad \mathrm{mod} \quad F[u] \ , \quad \forall L \in \mathcal{L} \qquad (3.41)$$

Αν $Q[u] = L\,u$ είναι η χαρακτηριστική μιας συμμετρίας L, η Q είναι λύση της γραμμικής ΜΔΕ (3.30), ενώ ο αντίστοιχος απειροστός μετασχηματισμός συμμετρίας είναι

$$u' = u + \delta u \quad \text{όπου} \quad \delta u \simeq \alpha L u = \alpha Q[u] \qquad (3.42)$$

Το παρακάτω θεώρημα, το οποίο θα δώσουμε χωρίς απόδειξη, έχει κεντρική σημασία για τη θεωρία των συμμετριών των ΜΔΕ:

Πρόταση:

1. Αν $L \in \mathcal{L}$ με χαρακτηριστική $Q[u]$, τότε και $\lambda L \in \mathcal{L}$ με χαρακτηριστική $\lambda Q[u]$, όπου λ μια σταθερά (πραγματική ή μιγαδική, ανάλογα με τις φυσικές συνθήκες του προβλήματος).

2. Αν $L_1 \in \mathcal{L}$ και $L_2 \in \mathcal{L}$ με χαρακτηριστικές $Q_1[u]$ και $Q_2[u]$, αντίστοιχα, τότε και $(L_1 + L_2) \in \mathcal{L}$ με χαρακτηριστική $Q_1[u] + Q_2[u]$.

3. Αν $L_1 \in \mathcal{L}$ και $L_2 \in \mathcal{L}$ με χαρακτηριστικές $Q_1[u]$ και $Q_2[u]$, αντίστοιχα, τότε και $[L_1, L_2] \in \mathcal{L}$ με χαρακτηριστική $L_1(Q_2[u]) - L_2(Q_1[u])$.

Οι ιδιότητες (1) και (2) δηλώνουν ότι το σύνολο $\mathcal{L}$ είναι διανυσματικός χώρος. Η ιδιότητα (3) δηλώνει, επιπλέον, ότι ο χώρος αυτός είναι μια *άλγεβρα Lie*. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

> *το σύνολο $\mathcal{L}$ όλων των τελεστών συμμετρίας μιας ΜΔΕ $F[u]=0$ αποτελεί άλγεβρα Lie με εσωτερικό «γινόμενο» την αγκύλη του Lie,* $[L_1, L_2] = L_1L_2 - L_2L_1$.

Το «γινόμενο» $[L_1, L_2]$ της άλγεβρας Lie έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) $\quad [L_1, aL_2+bL_3] = a\,[L_1, L_2] + b\,[L_1, L_3]\ , \quad [aL_1+bL_2, L_3] = a\,[L_1, L_3] + b\,[L_2, L_3]$.

(*β*) $[L_1, L_2] = -[L_2, L_1]$ (*αντισυμμετρία*). Πόρισμα: $[L, L] = 0$.

(*γ*)
$$\left[L_1,\left[L_2,L_3\right]\right]+\left[L_2,\left[L_3,L_1\right]\right]+\left[L_3,\left[L_1,L_2\right]\right]=0$$
$$\left[\left[L_1,L_2\right],L_3\right]+\left[\left[L_2,L_3\right],L_1\right]+\left[\left[L_3,L_1\right],L_2\right]=0$$
(*ταυτότητα του Jacobi*) .

Ένα υποσύνολο $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ λέγεται *υποάλγεβρα Lie* της $\mathcal{L}$ αν και το $\mathcal{L}'$ καθαυτό είναι μια άλγεβρα Lie. Έτσι, θα πρέπει $[L_1, L_2] \in \mathcal{L}'$, $\forall\, L_1, L_2 \in \mathcal{L}'$. Συχνά, μια ΜΔΕ έχει μια άλγεβρα συμμετρίας Lie άπειρων διαστάσεων (με την έννοια ότι, ως διανυσματικός χώρος, η $\mathcal{L}$ έχει άπειρες διαστάσεις), η οποία εμπεριέχει υποάλγεβρες συμμετρίας πεπερασμένων διαστάσεων.

Έστω τώρα ότι μια δοσμένη ΜΔΕ έχει μια άλγεβρα συμμετρίας $\mathcal{L}$ (η οποία μπορεί να είναι υποάλγεβρα μιας άλγεβρας Lie άπειρων διαστάσεων). Ως διανυσματικός χώρος, η $\mathcal{L}$ έχει κάποια πεπερασμένη διάσταση $\dim \mathcal{L} = n$, ίση με το μέγιστο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων τελεστών συμμετρίας που μπορεί να εμπεριέχει. Έστω $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\} \equiv \{L_k\}$ μια βάση τής $\mathcal{L}$, και έστω L_i , L_j δύο οποιαδήποτε στοιχεία της βάσης αυτής. Επειδή $[L_i, L_j] \in \mathcal{L}$, το $[L_i, L_j]$ θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης, με σταθερούς συντελεστές. Γράφουμε:

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k L_k \tag{3.43}$$

Οι σταθερές c_{ij}^k ονομάζονται *δομικές σταθερές* (structure constants) της άλγεβρας Lie $\mathcal{L}$ *για τη δοσμένη βάση* $\{L_k\}$. Λόγω της αντισυμμετρικής ιδιότητας της αγκύλης του Lie, ισχύει ότι $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$. Ειδικά, $c_{ij}^k = 0$ για $i=j$.

Η τελεστική σχέση (3.43) μπορεί να γραφεί σε ισοδύναμη, αλγεβρική μορφή αν αφήσουμε τους τελεστές στα δύο μέλη να επιδράσουν στη μεταβλητή u και λάβουμε υπόψη ότι, γενικά, $L\,u = Q\,[u]$ (όπου Q η χαρακτηριστική της συμμετρίας L). Έχουμε:

$$[L_i, L_j]\,u = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k L_k\right) u \;\Rightarrow\; L_i(L_j u) - L_j(L_i u) = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k (L_k u) \;\Rightarrow$$

$$L_i(Q_j[u]) - L_j(Q_i[u]) = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k\, Q_k[u] \tag{3.44}$$

Παράδειγμα: Εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV). Μια από τις μορφές που μπορεί να πάρει η εξίσωση (λίγο διαφορετική από αυτή που είδαμε νωρίτερα) είναι

$$F[u] \equiv u_t + u\,u_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.45}$$

Η συνθήκη συμμετρίας (3.30) γράφεται

$$S\,(Q\,;u) \equiv Q_t + Q\,u_x + u\,Q_x + Q_{xxx} = 0 \quad \text{mod} \quad F[u] \tag{3.46}$$

όπου $S(Q\,;u)=LF[u]$. Η ΜΔΕ (3.45) δέχεται μια άλγεβρα συμμετρίας Lie άπειρων διαστάσεων [11]. Εν τούτοις, η άλγεβρα αυτή έχει μια πεπερασμένη υποάλγεβρα $\mathcal{L}$ τεσσάρων διαστάσεων. Ένας τελεστής συμμετρίας (παράγωγος Lie) L καθορίζεται από την αντίστοιχη χαρακτηριστική $Q[u]=L\,u$. Έτσι, μια βάση $\{L_1,\cdots,L_4\}$ της $\mathcal{L}$ αντιστοιχεί σε μια τετράδα ανεξάρτητων χαρακτηριστικών $\{Q_1,\cdots,Q_4\}$. Μια τέτοια βάση χαρακτηριστικών είναι η εξής:

$$Q_1[u]=u_x\ ,\quad Q_2[u]=u_t\ ,\quad Q_3[u]=tu_x-1\ ,\quad Q_4[u]=xu_x+3tu_t+2u$$

Οι $Q_1,\cdots,Q_4$ επαληθεύουν την (3.46), αφού, όπως μπορούμε να δείξουμε,

$$S(Q_1\,;u)=D_xF[u]\,,\quad S(Q_2\,;u)=D_tF[u]\,,\quad S(Q_3\,;u)=tD_xF[u]\,,$$
$$S(Q_4\,;u)=(5+xD_x+3tD_t)F[u]$$

Ας δούμε τώρα δύο παραδείγματα υπολογισμού των δομικών σταθερών για την $\mathcal{L}$ με εφαρμογή της σχέσης (3.44). Θυμίζουμε ότι η παράγωγος Lie υπακούει στον κανόνα του Leibniz, αντιμετατίθεται με τους τελεστές ολικής παραγώγισης, δεν επιδρά σε συναρτήσεις που δεν εμπεριέχουν το u ή τις παραγώγους του, και ισχύει ότι $L_i u=Q_i[u]$ (i=1,2,3,4). Έχουμε:

$$\begin{aligned} L_1Q_2-L_2Q_1 &= L_1u_t-L_2u_x=(L_1u)_t-(L_2u)_x=(Q_1)_t-(Q_2)_x=(u_x)_t-(u_t)_x=0 \\ &\equiv \sum_{k=1}^{4} c_{12}^k Q_k \end{aligned}$$

Επειδή τα Q_k είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θα πρέπει $c_{12}^k=0$, $k=1,2,3,4$. Επίσης,

$$\begin{aligned} L_2Q_3-L_3Q_2 &= L_2(tu_x-1)-L_3u_t=t(L_2u)_x-(L_3u)_t=t(Q_2)_x-(Q_3)_t \\ &= tu_{tx}-(u_x+tu_{xt})=-u_x=-Q_1 \equiv \sum_{k=1}^{4} c_{23}^k Q_k \end{aligned}$$

Άρα, θα πρέπει $c_{23}^1=-1$, $c_{23}^2=c_{23}^3=c_{23}^4=0$.

4. Σημείωση: Συμμετρίες Noether

Ορισμένες ΜΔΕ (όπως, π.χ., η KdV και η sine-Gordon) μπορεί να εξαχθούν από κάποια *συνάρτηση Lagrange* (Lagrangian) με βάση την «αρχή της ελάχιστης δράσης», σε αναλογία με τα μηχανικά συστήματα [10]. Οι ΜΔΕ αυτές, δηλαδή, προκύπτουν ως εξισώσεις Euler-Lagrange από τη συνθήκη ελαχιστοποίησης ενός κατάλληλου ολοκληρώματος «δράσης». Κάθε μετασχηματισμός που αφήνει το ολοκλήρωμα αυτό αναλλοίωτο είναι και μετασχηματισμός συμμετρίας για την αντίστοιχη ΜΔΕ (το αντίστροφο, όμως, *δεν* ισχύει απαραίτητα). Σύμφωνα με το *θεώρημα της Noether* [10,11], κάθε συνεχής συμμετρία του ολοκληρώματος δράσης συνοδεύεται από έναν αντίστοιχο νόμο διατήρησης για τη ΜΔΕ. Πολλές ολοκληρώσιμες ΜΔΕ διαθέτουν ένα άπειρο πλήθος τέτοιων συμμετριών και αντίστοιχων νόμων διατήρησης [11]. Αυτές οι ιδιότητες, μάλιστα, συχνά συνυπάρχουν με άλλα χαρακτηριστικά ολοκληρωσιμότητας, όπως μετασχηματισμοί Bäcklund και ζεύγη Lax [1-3].

IV. Εφαρμογές

A. Αυτο-δυϊκή εξίσωση Yang-Mills

Οι εξισώσεις Yang-Mills αποτελούν γενίκευση των εξισώσεων του Maxwell. Περιγράφουν τη δυναμική των πεδίων που ευθύνονται για τις διάφορες μορφές αλληλεπιδράσεων, και ανάγονται στις εξισώσεις του Maxwell στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Επίσης, σχετίζονται άμεσα και με τις εξισώσεις του Einstein για το πεδίο βαρύτητας.

Ο χώρος στον οποίο πρωταρχικά ορίζονται τα πεδία Yang-Mills είναι, φυσικά, ο *ψευτο-ευκλείδειος* χωροχρόνος της Σχετικότητας. Στο χώρο αυτό, ο χρόνος ξεχωρίζει από τις άλλες «χωρικές» μεταβλητές, αφού στο Πυθαγόρειο Θεώρημα του αναλογεί αντίθετο πρόσημο. Μια πιο «δημοκρατική» αντιμετώπιση του χρόνου έχει ένα υψηλό τίμημα: τον καθιστά *φανταστικό* μέγεθος στο χωροχρόνο, ή ισοδύναμα, *πραγματικό* μέγεθος σε έναν *ευκλείδειο* χώρο. Παρά την εκ πρώτης όψεως μη-φυσικότητά της, η επιλογή ενός ευκλείδειου «χωροχρόνου» ανοίγει νέους δρόμους στη μελέτη των εξισώσεων Yang-Mills και επιτρέπει νέες μορφές λύσεων (instantons), η φυσική σημασία των οποίων αναδεικνύεται στην κβαντική εκδοχή της θεωρίας [4,20].

Μια κατηγορία λύσεων των εξισώσεων Yang-Mills σε ευκλείδειο χώρο ικανοποιούν ένα απλούστερο σύστημα εξισώσεων που ονομάζονται *αυτο-δυϊκές εξισώσεις Yang-Mills* (self-dual Yang-Mills, SDYM). Μετά από επεξεργασία, το σύστημα αυτό ανάγεται, τελικά, σε μια μοναδική ΜΔΕ για ένα πεδίο J που έχει τη μορφή μιγαδικού τετραγωνικού πίνακα, την τάξη του οποίου θα θεωρήσουμε αυθαίρετη. Το πεδίο J ορίζεται σε ένα χώρο τεσσάρων διαστάσεων με μιγαδικές συντεταγμένες $y, z, \bar{y}, \bar{z}$, οι οποίες ορίζονται ως εξής:

1. Μιγαδικοποιούμε, καταρχήν, τον αρχικό ευκλείδειο χώρο, επιτρέποντας στις συντεταγμένες του x^0, x^1, x^2, x^3 να θεωρούνται μιγαδικές.

2. Ορίζουμε τώρα νέες μιγαδικές συντεταγμένες $x^\mu \equiv y, z, \bar{y}, \bar{z}$ (μ= 1,...,4), ως εξής:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + i x^2), \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 - i x^0), \quad \bar{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - i x^2), \quad \bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 + i x^0)$$

Προσέξτε ότι τα $\bar{y}, \bar{z}$ ανάγονται στα μιγαδικά συζυγή των y, z, αντίστοιχα, όταν ο υποκείμενος ευκλείδειος χώρος είναι πραγματικός. Η μιγαδικοποίηση του χώρου αυτού εξασφαλίζει ότι οι νέες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Η *αυτο-δυϊκή εξίσωση Yang-Mills* (SDYM) γράφεται

$$F[J] \equiv (J^{-1} J_y)_{\bar{y}} + (J^{-1} J_z)_{\bar{z}} = 0 \tag{4.1}$$

όπου, ως συνήθως, οι δείκτες κάτω δεξιά υποδηλώνουν (ολικές) παραγωγίσεις ως προς τις υποδεικνυόμενες μεταβλητές. Ο τετραγωνικός πίνακας J είναι συνάρτηση των x^μ. Πέραν της αυτονόητης απαίτησης να είναι αντιστρέψιμος, υπόκειται σε επιπλέον περιορισμούς προκειμένου οι λύσεις τής (4.1) να έχουν φυσική σημασία στα πλαίσια μιας δεδομένης θεωρίας. Για τους σκοπούς της παρούσας συζήτησης, θα υποθέσουμε απλά ότι $J \in GL(N,C)$.

1. Τοπικές συμμετρίες

Έστω L ένας τελεστής συμμετρίας (παράγωγος Lie) για την (4.1). Η χαρακτηριστική Q της συμμετρίας είναι πίνακας ίδιας τάξης με τον J. Σύμφωνα με την (3.16),

$$Q\,[J\,] = L\,J \tag{4.2}$$

Ο αντίστοιχος απειροστός μετασχηματισμός είναι [βλ. (3.15)]

$$\delta J = \alpha\, Q\,[J\,] \tag{4.3}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες του τελεστή L και κάνοντας χρήση των σχέσεων (3.20) και (4.2), μπορούμε να γράψουμε τη συνθήκη συμμετρίας για την (4.1):

$$L\,F[J] = S(Q;J) \equiv (-J^{-1}QJ^{-1}J_y + J^{-1}Q_y)_{\bar{y}} + (-J^{-1}QJ^{-1}J_z + J^{-1}Q_z)_{\bar{z}} = 0$$

(mod $F\,[J]$, φυσικά, διευκρίνιση που στο εξής θα παραλείπουμε χάριν συντομίας). Η παραπάνω σχέση, που είναι μια γραμμική ΜΔΕ για τη χαρακτηριστική Q, γράφεται πιο κομψά ως εξής:

$$S\,(Q\,;J) \equiv D_{\bar{y}}\left\{J^{-1}(QJ^{-1})_y\,J\right\} + D_{\bar{z}}\left\{J^{-1}(QJ^{-1})_z\,J\right\} = 0 \tag{4.4}$$

Η γραμμική ΜΔΕ (4.4) δίνει ένα άπειρο σύνολο ανεξάρτητων χαρακτηριστικών συμμετρίας, με ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα αλγεβρική δομή Lie. Δηλαδή, η εξίσωση SDYM έχει μια άλγεβρα συμμετρίας Lie άπειρων διαστάσεων.

Καταρχήν, διακρίνουμε τις συμμετρίες σε «τοπικές» και «μη-τοπικές». Θα καλούμε μια συμμετρία *τοπική* (local) αν η χαρακτηριστική $Q\,[J\,]$ περιέχει μόνο τα x^{μ}, J και/ή τις παραγώγους πρώτης τάξης τού J (ως προς την παρουσία παραγώγων, διαφοροποιούμαστε έτσι από την ορολογία της αναφ.[19]). Μια συμμετρία θα ονομάζεται *μη-τοπική* (non-local) αν η $Q\,[J\,]$ περιέχει νέες μεταβλητές που εκφράζονται σαν *ολοκληρώματα* του J (ή, γενικότερα, ολοκληρώματα τοπικών συναρτήσεων του J), ή, αν περιέχει παραγώγους τού J δεύτερης ή ανώτερης τάξης.

Το πρόβλημα των τοπικών συμμετριών επιλύθηκε [18,19] με τη χρήση γεωμετρικής μεθόδου [17] που αναπτύχθηκε ειδικά για τις ΜΔΕ των οποίων οι λύσεις δεν είναι βαθμωτές συναρτήσεις αλλά λαμβάνουν τιμές σε διανυσματκούς χώρους ή άλγεβρες Lie. Υπάρχουν 9 ανεξάρτητες τοπικές συμμετρίες που αντιστοιχούν σε μετασχηματισμούς των συντεταγμένων x^{μ}. Οι συμμετρίες αυτές αποτελούν βάση για μια υποάλγεβρα συμμετρίας Lie της SDYM . Οι χαρακτηριστικές είναι

$$\begin{aligned}
&Q_1[J]=J_y\,,\quad Q_2[J]=J_z\,,\quad Q_3[J]=J_{\bar{y}}\,,\quad Q_4[J]=J_{\bar{z}}\\
&Q_5[J]=y\,J_y+\bar{z}\,J_{\bar{z}}\,,\quad Q_6[J]=z\,J_z+\bar{y}\,J_{\bar{y}}\,,\quad Q_7[J]=\bar{y}\,J_{\bar{y}}+\bar{z}\,J_{\bar{z}}\\
&Q_8[J]=z\,J_y-\bar{y}\,J_{\bar{z}}\,,\quad Q_9[J]=y\,J_z-\bar{z}\,J_{\bar{y}}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Παίρνοντας γραμμικούς συνδυασμούς των παραπάνω, μπορούμε να βρούμε περισσότερες χαρακτηριστικές οι οποίες, όμως, δεν είναι ανεξάρτητες, άρα δεν μπορούν να θεωρηθούν ως νέες συμμετρίες. Για παράδειγμα, $Q_5+Q_6-Q_7=y\,J_y+z\,J_z$. Υπάρχουν επίσης και 3 τοπικές συμμετρίες που αφορούν μετασχηματισμούς του ίδιου του J (δεν αντιστοιχούν, δηλαδή, σε μετασχηματισμούς των συντεταγμένων). Οι χαρακτηριστικές αυτών των «εσωτερικών» συμμετριών είναι

$$Q_{10}[J] = \varepsilon(\bar{y},\bar{z})J\,,\quad Q_{11}[J] = \Lambda(\bar{y},\bar{z})J\,,\quad Q_{12}[J] = J\,M(y,z) \tag{4.6}$$

όπου ε μια αυθαίρετη βαθμωτή συνάρτηση, και Λ , M αυθαίρετες συναρτήσεις στη μορφή τετραγωνικών πινάκων ίδιας τάξης με τον J.

2. Συμμετρίες δυναμικού (μη-τοπικές συμμετρίες)

Το 1989 οι Bluman και Kumei [13] εισήγαγαν την έννοια των *συμμετριών δυναμικού* (potential symmetries) για τις ΜΔΕ. Τον αμέσως επόμενο χρόνο [7] ανακαλύφθηκε ότι η εξίσωση SDYM έχει ένα άπειρο πλήθος τέτοιων συμμετριών που παράγονται επαγωγικά με τη βοήθεια ενός *τελεστή επανάληψης* (recursion operator). Λίγο αργότερα [8] μελετήθηκε η αλγεβρική δομή Lie των συμμετριών αυτών και βρέθηκε ότι περιέχει υποάλγεβρες άπειρων διαστάσεων, τύπων Kac-Moody και Virasoro [21]. Μια διαφορετική ομάδα ερευνητών [22] επαλήθευσε αργότερα και διεύρυνε τα αποτελέσματα αυτά με χρήση διαφορετικών μεθόδων, αποφεύγοντας όμως επιμελώς κάθε αναφορά στην προϋπάρχουσα σχετική βιβλιογραφία...

Ως *συμμετρίες δυναμικού* μιας ΜΔΕ θεωρούνται οι μη-τοπικές συμμετρίες στις οποίες η χαρακτηριστική Q εξαρτάται από το «δυναμικό» ενός νόμου διατήρησης που σχετίζεται με τη ΜΔΕ. Συχνά, η ίδια η ΜΔΕ εκφράζει νόμο διατήρησης. Αυτό ισχύει για την SDYM,

$$F[J] \equiv D_{\bar{y}}(J^{-1}J_y) + D_{\bar{z}}(J^{-1}J_z) = 0 \tag{4.7}$$

που έχει τη μορφή εξίσωσης συνεχείας. Θεωρούμε τώρα το μετασχηματισμό Bäcklund (ΜΒ)

$$J^{-1}J_y = X_{\bar{z}}\ , \quad J^{-1}J_z = -X_{\bar{y}} \tag{4.8}$$

όπου ο τετραγωνικός πίνακας X είναι συνάρτηση των x^{μ}. Η συνάρτηση X παίζει το ρόλο ενός *δυναμικού* για το νόμο διατήρησης (4.7). Για να είναι ο ΜΒ (4.8) ολοκληρώσιμος ως προς X, θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη συμβατότητας $(X_{\bar{y}})_{\bar{z}} = (X_{\bar{z}})_{\bar{y}}$. Όπως είναι εύκολο να δούμε, αυτό απαιτεί ότι το J είναι λύση της SDYM (4.7). Από την άλλη, για να είναι ο ΜΒ ολοκληρώσιμος ως προς J, θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη συμβατότητας $(J_y)_z = (J_z)_y$. Η συνθήκη αυτή γράφεται, ισοδύναμα, $(J^{-1}J_z)_y - (J^{-1}J_y)_z + [J^{-1}J_y\, ,\ J^{-1}J_z] = 0$ (βλ. σχέση (6.6) στο Παράρτημα) και οδηγεί σε μια μη-γραμμική ΜΔΕ για το δυναμικό X, την οποία θα ονομάσουμε *εξίσωση δυναμικού SDYM* (potential SDYM ή PSDYM):

$$\Phi[X] \equiv X_{y\bar{y}} + X_{z\bar{z}} - [X_{\bar{y}}\, ,\ X_{\bar{z}}] = 0 \tag{4.9}$$

Έστω L ένας τελεστής συμμετρίας για την (4.9), και έστω $\Theta[X]$ η αντίστοιχη χαρακτηριστική (ο απειροστός μετασχηματισμός συμμετρίας είναι $\delta X = \alpha\Theta[X]$). Η συνθήκη συμμετρίας γράφεται (κάνοντας χρήση της ιδιότητας (3.21) της παραγώγου Lie),

$$S(\Theta; X) \equiv \Theta_{y\bar{y}} + \Theta_{z\bar{z}} - \left([\Theta_{\bar{y}}\, ,\ X_{\bar{z}}] + [X_{\bar{y}}\, ,\ \Theta_{\bar{z}}]\right) = 0 \tag{4.10}$$

Όπως μπορεί να αποδειχθεί [7], η συνάρτηση

$$Q[J] = J\Theta[X] \tag{4.11}$$

είναι χαρακτηριστική για μια συμμετρία της SDYM (4.7). Ο απειροστός μετασχηματισμός συμμετρίας είναι

$$\delta J = \alpha Q[J] = \alpha J\Theta[X] \tag{4.12}$$

Η συμμετρία αυτή θα είναι μια γνήσια συμμετρία δυναμικού αν το $\Theta[X]$ περιέχει το X και/ή τις παραγώγους του ως προς y και z (βάσει του ΜΒ (4.8), οι παράγωγοι του X ως προς $\bar{y}$ και $\bar{z}$ ανάγονται σε εκφράσεις που περιέχουν αμιγώς το J και όχι το ίδιο το X).

Παραδείγματα:

1. Οι χαρακτηριστικές $\Theta[X]=X_y$ και $\Theta[X]=X_z$ της PSDYM δίνουν, αντίστοιχα, τις συμμετρίες δυναμικού της SDYM,

$$\delta J=\alpha\, JX_y \qquad \text{και} \qquad \delta J=\alpha\, JX_z$$

2. Η χαρακτηριστική $\Theta[X]=X+yX_y+zX_z$ δίνει τη συμμετρία δυναμικού

$$\delta J=\alpha\, J\,(X+yX_y+zX_z)$$

3. Η χαρακτηριστική $\Theta[X]=X-\bar{y}\,X_{\bar{y}}-\bar{z}\,X_{\bar{z}}$ δίνει, λαμβάνοντας υπόψη και το ΜΒ (4.8),

$$\delta J=\alpha\, J(X-\bar{y}\,X_{\bar{y}}-\bar{z}\,X_{\bar{z}})=\alpha\,(J\,X+\bar{y}J_z-\bar{z}J_y)$$

(Για μια πλήρη παράθεση των τοπικών συμμετριών της εξίσωσης PSDYM, καθώς και για μια σκιαγράφηση της μεθόδου εύρεσής τους, βλ. [8].)

Όπως αποδείχθηκε [7,8], η PSDYM δέχεται ένα άπειρο πλήθος ανεξάρτητων μετασχηματισμών συμμετρίας, οι οποίοι εκφράζουν και συμμετρίες δυναμικού για την SDYM. Το σύνολο αυτό περιέχει άπειρα υποσύνολα συμμετριών που παράγονται επαγωγικά με τη βοήθεια ενός *τελεστή επανάληψης*. Όταν ο τελεστής αυτός δρα πάνω σε μια χαρακτηριστική $\Theta[X]$, παράγει μια νέα χαρακτηριστική $\Theta'[X]$. Ο τελεστής επανάληψης για την PSDYM συνδυάζει ολοκλήρωση και παραγώγιση (integro-differential operator), και γράφεται

$$\hat{R}=D_{\bar{z}}^{-1}\hat{A}_y \qquad \text{όπου} \qquad \hat{A}_y=D_y+[X_{\bar{z}}\,,\ ] \tag{4.13}$$

Η αλγεβρική δομή Lie των συμμετριών της PSDYM παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Εντοπίζονται δύο ειδών υποάλγεβρες άπειρων διαστάσεων:

1. *Άλγεβρες Kac-Moody*: Μια τέτοια άλγεβρα έχει σαν βάση ένα σύνολο τελεστών συμμετρίας $\{L_k^{(n)}\}$, όπου $k=1,2,\ldots,p$ και $n=0,1,2,\ldots$ (προσέξτε ότι το k δέχεται ένα πεπερασμένο πλήθος τιμών, ενώ το n μπορεί να πάρει άπειρες τιμές). Οι σχέσεις αντιμετάθεσης (3.43) παίρνουν τώρα μια πιο σύνθετη μορφή:

$$[L_i^{(m)},\,L_j^{(n)}]=\sum_{k=1}^{p}c_{i\,j}^{\,k}\,L_k^{(m+n)} \tag{4.14}$$

2. *Άλγεβρες Virasoro*: Το σύνολο βάσης των τελεστών συμμετρίας είναι $\{L^{(n)}\}$, όπου $n=0,1,2,\ldots$, και οι σχέσεις αντιμετάθεσης έχουν τη μορφή

$$[L^{(m)},\,L^{(n)}]=(m-n)\,L^{(m+n)} \tag{4.15}$$

3. Ζεύγος Lax και τελεστής επανάληψης

Η εξίσωση SDYM ανήκει στην κατηγορία των μη-γραμμικών ΜΔΕ που επιδέχονται «γραμμικοποίηση» μέσω ενός ζεύγους Lax. Ένα τέτοιο γραμμικό σύστημα (πρώτο που ανακαλύφθηκε ιστορικά, βλ. [23]) είναι το εξής:

$$\Psi_{\bar{z}}=\lambda\,(\Psi_y+J^{-1}J_y\Psi)\ , \qquad \Psi_{\bar{y}}=-\lambda\,(\Psi_z+J^{-1}J_z\Psi) \tag{4.16}$$

όπου λ μια μιγαδική παράμετρος. Όπως μπορεί να δειχθεί, για να είναι το σύστημα (4.16) ολοκληρώσιμο ως προς Ψ, θα πρέπει το J να επαληθεύει την SDYM (4.1).

Στο σύστημα (4.16) τον πρωταγωνιστικό ρόλο τον έχει το πεδίο J, αφού η «δική του» ΜΔΕ είναι που προκύπτει ως συνθήκη ολοκληρωσιμότητας. Μια πιο συμμετρική προσέγγιση θα οδηγούσε σε μια ΜΔΕ και για το ίδιο το Ψ. Αλλά τότε το ζεύγος Lax θα ήταν, στην ουσία, ένας μετασχηματισμός Bäcklund (ΜΒ)! Και, ποια ΜΔΕ θα μπορούσε να αφορά το Ψ; Η απάντηση προκύπτει από τις εξής παρατηρήσεις: (*α*) Το ζεύγος Lax είναι γραμμικό ως προς Ψ. (*β*) Η συνθήκη συμμετρίας (4.4) είναι μια γραμμική ΜΔΕ ως προς τη χαρακτηριστική Q, ενώ το J παίζει το ρόλο μιας «παραμετρικής» συνάρτησης που ικανοποιεί την SDYM (4.1). Οι σκέψεις αυτές μας οδηγούν στην ιδέα να αναζητήσουμε ένα ΜΒ που να συνδέει την αρχική, μη-γραμμική ΜΔΕ (εδώ, SDYM) με τη (γραμμική) συνθήκη συμμετρίας της. Συγκεκριμένα, ζητούμε ένα ΜΒ ανάμεσα στις συναρτήσεις J και Ψ, έτσι ώστε (*α*) το σύστημα να είναι γραμμικό ως προς Ψ, (*β*) το σύστημα να είναι ολοκληρώσιμο ως προς Ψ όταν το J είναι λύση της SDYM, και (*γ*) για δοσμένη τέτοια λύση J, το Ψ να ικανοποιεί τη συνθήκη συμμετρίας (4.4) (να είναι, δηλαδή, χαρακτηριστική μιας συμμετρίας για την SDYM). Ένας τέτοιος ΜΒ (στην ουσία, ένα εναλλακτικό ζεύγος Lax για την SDYM) είναι ο ακόλουθος [5]:

$$J(J^{-1}\Psi)_{\bar z} = \lambda(\Psi J^{-1})_y J \ , \quad J(J^{-1}\Psi)_{\bar y} = -\lambda(\Psi J^{-1})_z J \tag{4.17}$$

όπου Ψ τετραγωνικός πίνακας ίδιας τάξης με τον J, και λ μια μιγαδική παράμετρος. Έστω Ψ μια λύση του συστήματος (4.17) για δοσμένα J και λ. Υποθέτοντας εξαρχής ότι $\lambda \neq 0$, δοκιμάζουμε να εκφράσουμε τη λύση αυτή στη μορφή σειράς Laurent ως προς λ:

$$\Psi(J;\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^n Q^{(n)}[J] \tag{4.18}$$

Αντικαθιστώντας την (4.18) στην (4.17) και εξισώνοντας τους συντελεστές τού λ^{n+1}, βρίσκουμε ένα ζεύγος εξισώσεων

$$J\left[J^{-1}Q^{(n+1)}\right]_{\bar z} = \left[Q^{(n)}J^{-1}\right]_y J \ , \quad J\left[J^{-1}Q^{(n+1)}\right]_{\bar y} = -\left[Q^{(n)}J^{-1}\right]_z J \tag{4.19}$$

Όπως μπορεί να επαληθευθεί, το σύστημα (4.19) είναι ένας αυτο-ΜΒ που συνδέει λύσεις $Q^{(n)}$ της συνθήκης συμμετρίας (4.4), για δοσμένη λύση J της SDYM. Ο μετασχηματισμός αυτός ισοδυναμεί με έναν αντιστρεπτό *τελεστή επανάληψης* που παράγει μια άπειρη ακολουθία συμμετριών $Q^{(n)}[J]$ ($n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$) από κάθε γνωστή συμμετρία $Q^{(0)}[J]$. Είναι αξιοσημείωτο ότι οι τελεστές επανάληψης (4.19) και (4.13) παράγουν *ισομορφικές* άλγεβρες Lie.

4. Νόμοι διατήρησης

Όπως οι συμμετρίες, έτσι και οι νόμοι διατήρησης μιας ΜΔΕ $F[u]=0$ διακρίνονται σε «τοπικούς» και «μη-τοπικούς», ανάλογα αν οι «πυκνότητες» περιέχουν μόνο το u και/ή τις παραγώγους του, ή και ολοκληρώματα του u ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές, αντίστοιχα. Η έρευνα για τοπικούς νόμους στην SDYM (4.7) υπήρξε αποθαρρυντική. Βέβαια, η ίδια η εξίσωση είναι στη μορφή τοπικού νόμου διατήρησης, το ζητούμενο όμως είναι πάντα η εύρεση ενός άπειρου πλήθους τέτοιων νόμων. Κάτι τέτοιο πράγματι ανακαλύφθηκε το 1988 με εφαρμογή απειροστών ΜΒ στην SDYM [24], όμως οι Ioannidou και Ward [25] εντόπισαν κάποια προβλήματα σε ό,τι αφορά την ανεξαρτησία των νόμων. Μια άλλη απειρία που βρέθηκε [26] δεν αντιμετωπίζει τέτοια προβλήματα, όμως η εφαρμοσιμότητα αυτών των νόμων είναι σχετικά περιορισμένη. Θα πρέπει, λοιπόν, απρόθυμα να δεχθούμε ότι η SDYM μάλλον δεν διαθέτει αξιόλογους τοπικούς νόμους διατήρησης.

Οι *μη-τοπικοί* νόμοι είναι μια άλλη ιστορία. Η ύπαρξή τους ήταν γνωστή από τις αρχές της δεκαετίας του ’80 και συνδέεται στενά με το ζεύγος Lax (4.16) (βλ., π.χ., [23]). Το 1989 μια νέα απειρία μη-τοπικών νόμων διατήρησης ανακοινώθηκε ταυτόχρονα από δύο ανεξάρτητες πηγές [27,28], ενώ και άλλες απειρίες προστέθηκαν στη λίστα αργότερα σαν αποτέλεσμα της ανακάλυψης των συμμετριών δυναμικού [7] και του νέου ζεύγους Lax (4.17) [5]. Η αναζήτηση μη-τοπικών νόμων διατήρησης και η μελέτη της σχέσης τους με το ζεύγος Lax της SDYM παραμένει επίκαιρο αντικείμενο έρευνας [29].

Ο τρόπος με τον οποίο το ζεύγος Lax (4.17) οδηγεί σε νόμους διατήρησης είναι απλός: Το ζεύγος αυτό δίνει το MB (τελεστή επανάληψης) (4.19), ο οποίος παράγει μια απειρία λύσεων $Q^{(n)}[J]$ της ΜΔΕ (4.4) από κάθε γνωστή λύση $Q^{(0)}[J]$. Η (4.4), όμως, έχει τη μορφή μιας εξίσωσης συνεχείας και εκφράζει ένα νόμο διατήρησης για την SDYM. Έτσι, παίρνουμε άπειρους τέτοιους νόμους από κάθε γνωστή συμμετρία τής SDYM.

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα μη-τοπικών νόμων διατήρησης. Η συνάρτηση X είναι το δυναμικό του νόμου διατήρησης (4.7) και ορίζεται από τις σχέσεις (4.8):

$$
\begin{aligned}
&D_{\bar{y}}\left(X_y+\frac{1}{2}[J^{-1}J_y\,,\,X]\right)+D_{\bar{z}}\left(X_z+\frac{1}{2}[J^{-1}J_z\,,\,X]\right)=0\\
&D_{\bar{y}}\left(X_{yy}+[J^{-1}J_y\,,\,X_y]\right)+D_{\bar{z}}\left(X_{yz}+[J^{-1}J_z\,,\,X_y]\right)=0\\
&D_{\bar{y}}\left(X_{yz}+[J^{-1}J_y\,,\,X_z]\right)+D_{\bar{z}}\left(X_{zz}+[J^{-1}J_z\,,\,X_z]\right)=0\\
&D_{\bar{y}}\left(2X_y+yX_{yy}+zX_{yz}+[J^{-1}J_y\,,\,X+yX_y+zX_z]\right)+\\
&\quad +D_{\bar{z}}\left(2X_z+yX_{yz}+zX_{zz}+[J^{-1}J_z\,,\,X+yX_y+zX_z]\right)=0
\end{aligned}
$$

B. Εξίσωση του Ernst

Η νέα οπτική, σύμφωνα με την οποία το ζεύγος Lax μπορεί να θεωρηθεί ως μετασχηματισμός Bäcklund ανάμεσα σε μια μη-γραμμική ΜΔΕ και τη (γραμμική) συνθήκη συμμετρίας της, ανοίγει καινούργιους δρόμους και στη Γενική Σχετικότητα. Η επίλυση των *εξισώσεων του Einstein* για το βαρυτικό πεδίο [30,31] στην πλήρη μορφή τους είναι ένα εξαιρετικά δύσκολο μη-γραμμικό πρόβλημα. Για το λόγο αυτό, αναζητούμε λύσεις με κάποιας μορφής συμμετρία η οποία να απλουστεύει τη διαδικασία της επίλυσης. Η πιο φημισμένη ακριβής λύση είναι αυτή που βρήκε ο Schwarzschild το 1916 (λίγο πριν χάσει τη ζωή του σε έναν παράλογο Παγκόσμιο Πόλεμο) για το στατικό πεδίο με σφαιρική συμμετρία. Μια άλλη ενδιαφέρουσα αναγωγή των εξισώσεων Einstein είναι η *εξίσωση του Ernst* για στατικό βαρυτικό πεδίο με αξονική συμμετρία. Τέτοιας μορφής συμμετρία σημαίνει, πρακτικά, ότι, σε κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, φ, z), το πεδίο είναι συνάρτηση μόνο των ρ και z. (Με άλλα λόγια, το πρόβλημα παραμένει αμετάβλητο αν θεωρήσουμε μια περιστροφή του φυσικού συστήματος, ή του συστήματος των συντεταγμένων μας, γύρω από τον άξονα z.)

Η εξίσωση του Ernst έχει στενή μαθηματική συγγένεια με την SDYM (για την ακρίβεια, μπορεί να εξαχθεί από την SDYM με μια μέθοδο αναγωγής, με την επιβολή κάποιων πρόσθετων συνθηκών συμμετρίας [2,32]). Η παρατήρηση αυτή μας προτρέπει να αναζητήσουμε ένα νέο ζεύγος Lax (ένα παλιότερο ανακαλύφθηκε το 1978-9 από τους Belinski και Zakharov [33]) που να συνδέει, με κάποιον τρόπο, την εξίσωση του Ernst με τη συνθήκη συμμετρίας της. Ένα τέτοιο ζεύγος πράγματι υπάρχει [6], και οδηγεί στην εύρεση μιας νέας απειρίας νόμων διατήρησης, καθώς και μιας «κρυμμένης» μη-τοπικής συμμετρίας, για την εξίσωση του Ernst. Τα αποτελέσματα αυτά γενικεύτηκαν από μια ομάδα ερευνητών στην Κίνα [34], οι οποίοι χρησιμοποίησαν τη μέθοδο των *διπλά-μιγαδικών συναρτήσεων* (double-complex function method).

Η εξίσωση του Ernst γράφεται

$$(\mathrm{Re}\,E)\,\nabla^2 E = (\nabla E)^2 \quad \text{όπου} \quad E = f + i\omega \quad \text{(δυναμικό Ernst)} \tag{4.20}$$

Το δυναμικό E έχει αξονική συμμετρία, έτσι ώστε $f=f(\rho,z)$ και $\omega=\omega(\rho,z)$. Θα γράφουμε $x^\mu \equiv \rho, z$, όπου $\mu = 1, 2$, αντίστοιχα. Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα

$$g = \frac{1}{f}\begin{bmatrix} 1 & \omega \\ \omega & f^2+\omega^2 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Παρατηρούμε ότι ο g είναι πραγματικός, συμμετρικός, και $\det g=1$. Η (4.20) μπορεί τώρα να τεθεί σε μορφή πίνακα:

$$F[g] \equiv (\rho g^{-1} g_\rho)_\rho + (\rho g^{-1} g_z)_z = 0 \tag{4.22}$$

Έστω $Q\,[g]$ η χαρακτηριστική μιας συμμετρίας τής (4.22). Ο αντίστοιχος απειροστός μετασχηματισμός συμμετρίας είναι $\delta g=\alpha Q$. Αν θέσουμε $Q=g\Phi$, μπορούμε να γράψουμε τη συνθήκη συμμετρίας στη μορφή

$$S(\Phi; g) \equiv D_\rho(\hat{A}_\rho \Phi) + D_z(\hat{A}_z \Phi) = 0 \tag{4.23}$$

όπου εισαγάγαμε τους γραμμικούς τελεστές

$$\hat{A}_\rho = \rho\left(D_\rho + [g^{-1}g_\rho\,,\ ]\right), \quad \hat{A}_z = \rho\left(D_z + [g^{-1}g_z\,,\ ]\right) \tag{4.24}$$

(παρατηρήστε την παρουσία των μεταθετών στους δύο τελεστές). Οι τοπικές συμμετρίες που προκύπτουν ως λύσεις τής (4.23) αντιστοιχούν στις χαρακτηριστικές

$$Q_1[g]=g_z\,, \quad Q_2[g]=\rho g_\rho + z g_z\,, \quad Q_3[g]=\Lambda g\,, \quad Q_4[g]=gM$$

όπου Λ και M σταθεροί πίνακες. (Οι Q_1 και Q_2 εκφράζουν αλλαγές συντεταγμένων: η Q_1 αντιπροσωπεύει το μετασχηματισμό $z'=z+\alpha$, ενώ η Q_2 το μετασχηματισμό $\rho'=\beta\rho$, $z'=\beta z$.)

Το ζεύγος Lax για την (4.22) γράφεται [6]

$$\hat{A}_\rho \Psi - 2\lambda \Psi_\lambda = \frac{1}{\lambda}\Psi_z \,, \qquad \hat{A}_z \Psi = -\frac{1}{\lambda}\Psi_\rho \tag{4.25}$$

όπου $\Psi(x^\mu,\lambda)$ μιγαδικός 2×2 πίνακας που είναι συνάρτηση των ρ, z και μιας μιγαδικής παραμέτρου λ. Θεωρούμε ότι το Ψ είναι μονότιμη και αναλυτική συνάρτηση του λ σε μια περιοχή γύρω από την αρχή $\lambda=0$ του μιγαδικού επιπέδου, με εξαίρεση το ίδιο το σημείο $\lambda=0$. Η συνθήκη συμβατότητας του γραμμικού συστήματος (4.25) είναι $[\hat{A}_\rho, \hat{A}_z]\Psi = \hat{A}_z\Psi$, και οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι το σύστημα αυτό είναι ολοκληρώσιμο ως προς Ψ όταν το g είναι λύση της εξίσωσης του Ernst (4.22).

Για δοσμένη λύση g της (4.22), αναπτύσσουμε τη λύση Ψ του ζεύγους Lax σε σειρά Laurent ως προς λ:

$$\Psi(x^\mu,\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^n \Phi^{(n)}(x^\mu) \tag{4.26}$$

όπου

$$\Phi^{(n)}(x^\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}\,\Psi(x^\mu,\lambda) \tag{4.27}$$

(το C παριστά μια θετικά προσανατολισμένη κλειστή καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο, γύρω από το σημείο λ=0). Αντικαθιστώντας την (4.26) στο ζεύγος Lax (4.25), και εξισώνοντας τους συντελεστές τού λ^n, βρίσκουμε το σύστημα των ΜΔΕ

$$(\hat{A}_\rho - 2n)\,\Phi^{(n)} = \Phi_z^{(n+1)} \quad , \qquad \hat{A}_z \Phi^{(n)} = -\,\Phi_\rho^{(n+1)} \tag{4.28}$$

(n= 0, ±1, ±2, ...) . Το σύστημα (4.28) είναι ένας μετασχηματισμός Bäcklund (ΜΒ) που συνδέει τα $\Phi^{(n)}$ και $\Phi^{(n+1)}$ για δοσμένο g. Οι συνθήκες συμβατότητας οδηγούν σε μια ΜΔΕ που πρέπει να ικανοποιείται και από τις δύο αυτές συναρτήσεις (αυτο-Bäcklund):

$$D_\rho\left[(\hat{A}_\rho - 2n)\,\Phi^{(n)}\right] + D_z\left[\hat{A}_z \Phi^{(n)}\right] = 0 \tag{4.29}$$

Η (4.29) έχει τη μορφή εξίσωσης συνεχείας και εκφράζει ένα νόμο διατήρησης για την (4.22). Ακριβέστερα, η (4.29) αντιπροσωπεύει μια άπειρη ακολουθία νόμων διατήρησης, για όλες τις ακέραιες τιμές n= 0, ±1, ±2, ... Σύμφωνα με τον ΜΒ (4.28), τα $\Phi^{(n)}$ αποτελούν τα *δυναμικά* αυτών των νόμων. Αν γνωρίζουμε ένα δυναμικό $\Phi^{(0)}$, τα υπόλοιπα βρίσκονται επαγωγικά με ολοκλήρωση του ΜΒ (4.28) στις δύο «κατευθύνσεις» (δηλαδή, για αυξανόμενο και ελαττούμενο n). Πώς όμως βρίσκουμε ένα δυναμικό $\Phi^{(0)}$;

Πρόταση: Η συνάρτηση δυναμικού

$$\Phi^{(0)}(x^\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\lambda}{\lambda}\,\Psi(x^\mu,\lambda) \tag{4.30}$$

επαληθεύει τη συνθήκη συμμετρίας (4.23) όταν το Ψ είναι λύση του ζεύγους Lax (4.25). [Ένας απλός τρόπος να το δούμε αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι ο νόμος διατήρησης (4.29) ανάγεται στη συνθήκη συμμετρίας (4.23) για n=0. Ένας άλλος τρόπος είναι να αντικαταστήσουμε την (4.30) απευθείας στην (4.23), κάνοντας χρήση και του ζεύγους Lax.]

Πόρισμα: Η συνάρτηση $Q=g\Phi^{(0)}$ είναι μια χαρακτηριστική συμμετρίας για τη ΜΔΕ (4.22).

Η παραπάνω χαρακτηριστική, όμως, δεν εξασφαλίζει ότι η νέα λύση $g'=g+\alpha Q$ (όπου α απειροστό) ικανοποιεί τη συνθήκη ότι και ο πίνακας g' (όπως ο αρχικός g) είναι πραγματικός, συμμετρικός, και $\det g'$=1. Όπως μπορεί να αποδειχθεί [6], οι απαιτήσεις αυτές ικανοποιούνται αν επιλέξουμε την πιο γενική χαρακτηριστική,

$$Q[g] = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\lambda}{\lambda}\left[g\,\Psi(x^\mu,\lambda) + \Psi^T(x^\mu,\lambda)\,g\right] \tag{4.31}$$

όπου Ψ^T ο ανάστροφος του πίνακα Ψ. Η χαρακτηριστική (4.31) αντιστοιχεί στον απειροστό μετασχηματισμό συμμετρίας $\delta g=\alpha Q[g]$, ή

$$\delta g = \frac{\alpha}{2\pi i}\int_C \frac{d\lambda}{\lambda}\left[g\,\Psi(x^\mu,\lambda) + \Psi^T(x^\mu,\lambda)\,g\right] \tag{4.32}$$

Έτσι, από κάθε λύση $\Psi(x^\mu,\lambda)$ του ζεύγους Lax (4.25) για δοσμένη λύση g της εξίσωσης του Ernst, παίρνουμε μια απειροστή «κρυμμένη» συμμετρία (4.32) για την εξίσωση αυτή.

Αντίστροφα, για κάθε γνωστή συμμετρία $Q[g]$ της ΜΔΕ (4.22), *ανεξάρτητα αν αυτή εξασφαλίζει ή όχι τις προαναφερθείσες συνθήκες για το* g' (με εξαίρεση την απαίτηση να είναι πραγματικό), μπορούμε να θέσουμε $\Phi^{(0)}=g^{-1}Q$ [που είναι λύση της συνθήκης συμμετρίας (4.23)] και να υπολογίσουμε, επαγωγικά, τα δυναμικά $\Phi^{(n)}$ για $n=\pm1, \pm2, \ldots$, με χρήση του ΜΒ (4.28). Βρίσκουμε έτσι μια άπειρη ακολουθία μη-τοπικών νόμων διατήρησης της μορφής (4.29). Για παράδειγμα, από τη χαρακτηριστική $Q=gM$ (όπου M σταθερός πίνακας) βρίσκουμε, διαδοχικά,

$$\Phi^{(1)}=[X,M] \quad \text{όπου} \quad \rho g^{-1}g_\rho = X_z \ , \quad \rho g^{-1}g_z=-X_\rho \ ,$$

$$\Phi^{(2)}=[\Omega,M]+\frac{1}{2}[X,[X,M]] \quad \text{όπου}$$

$$\rho X_\rho - 2X+\frac{1}{2}[X_z,X]=\Omega_z \ , \quad \rho X_z-\frac{1}{2}[X_\rho,X]=-\Omega_\rho \ , \quad \text{κλπ.}$$

V. Συμπεράσματα

Οι ολοκληρώσιμες ΜΔΕ έχουν πλούσιες αλγεβρικές ιδιότητες, όπως μετασχηματισμούς Bäcklund, γραμμικά ζεύγη Lax, και άπειρες ακολουθίες νόμων διατήρησης (τοπικών και/ή μη-τοπικών). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν επίσης οι συμμετρίες τους, οι οποίες συχνά αποτελούν βάσεις για άλγεβρες Lie άπειρων διαστάσεων. Μελετήσαμε μια αλγεβρική (μη-γεωμετρική) προσέγγιση στο πρόβλημα των συμμετριών, κατάλληλη και για ΜΔΕ των οποίων οι λύσεις δεν μπορούν να εκφραστούν στη μορφή βαθμωτών συναρτήσεων. Στη συνέχεια, επιχειρήσαμε την «ενοποίηση» της συμμετρίας με την ολοκληρωσιμότητα προτείνοντας μια νέα αντίληψη για το ζεύγος Lax, σύμφωνα με την οποία το γραμμικό αυτό σύστημα είναι ένα είδος μετασχηματισμού Bäcklund που συνδέει μια μη-γραμμική ΜΔΕ με τη γραμμική συνθήκη συμμετρίας της. Η προσέγγιση αυτή οδήγησε στην ανακάλυψη νέων συμμετριών και μη-τοπικών νόμων διατήρησης για δύο σημαντικές εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής, την αυτο-δυϊκή εξίσωση Yang-Mills και την εξίσωση του Ernst στη Γενική Σχετικότητα. Αν κρίνουμε από τον αριθμό των εργασιών που δημοσιεύονται τόσο σε έντυπα, όσο και σε ηλεκτρονικά επιστημονικά περιοδικά, με θέματα σχετιζόμενα με τα παραπάνω αντικείμενα (βλ., π.χ., [29,35,36]), συμπεραίνουμε ότι η ερευνητική αυτή περιοχή παραμένει ενεργή και επίκαιρη. Ελπίζω ότι η (κάπως εκτενής) αυτή εισαγωγή θα φανεί χρήσιμη σε όσους θελήσουν να μελετήσουν σε μεγαλύτερο βάθος τη βιβλιογραφία.

VI. Παράρτημα: Παραγώγιση και ολοκλήρωση πινάκων

Έστω $A(t)=[a_{ij}(t)]$ ένας τετραγωνικός πίνακας τάξης n, του οποίου τα στοιχεία είναι συναρτήσεις της μεταβλητής t. Η παράγωγος dA/dt του A είναι ο n-τάξης πίνακας με στοιχεία

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{ij}=\frac{d}{dt}a_{ij}(t) \tag{6.1}$$

Αν $B(t)$ είναι ένας άλλος τετραγωνικός πίνακας τάξης n, ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{d}{dt}(A\pm B)=\frac{dA}{dt}\pm\frac{dB}{dt} \tag{6.2}$$

$$\frac{d}{dt}(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt} \tag{6.3}$$

Όμοια, το ολοκλήρωμα του A ως προς t ορίζεται

$$\left(\int A(t)dt\right)_{ij} = \int a_{ij}(t)\, dt \tag{6.4}$$

Για την παράγωγο του A^{-1} (υποθέτοντας ότι ο A είναι αντιστρέψιμος) ισχύει ότι

$$\frac{d}{dt}(A^{-1}) = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1} \tag{6.5}$$

Πράγματι, δοθέντος ότι $A^{-1}A = 1$ (μοναδιαίος πίνακας τάξης n), έχουμε:

$$\frac{d}{dt}(A^{-1}A) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(A^{-1})}{dt}A + A^{-1}\frac{dA}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(A^{-1})}{dt}A = -A^{-1}\frac{dA}{dt}$$

Πολλαπλασιάζοντας από τα δεξιά με A^{-1}, παίρνουμε την (6.5).

Έστω τώρα ότι $A=A(x,y)$. Καλούμε A_x και A_y τις μερικές παραγώγους τού A ως προς x και y, αντίστοιχα. Ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες:

$$\begin{aligned} &\partial_x (A^{-1}A_y) - \partial_y (A^{-1}A_x) + [A^{-1}A_x, A^{-1}A_y] = 0 \\ &\partial_x (A_y A^{-1}) - \partial_y (A_x A^{-1}) - [A_x A^{-1}, A_y A^{-1}] = 0 \end{aligned} \tag{6.6}$$

όπου με $[A, B] \equiv AB-BA$ δηλώνουμε το *μεταθέτη* (commutator) δύο πινάκων. Επιπλέον,

$$A(A^{-1}A_x)_y A^{-1} = (A_y A^{-1})_x \;\Leftrightarrow\; A^{-1}(A_y A^{-1})_x A = (A^{-1}A_x)_y \tag{6.7}$$

Τέλος, όπως μπορούμε εύκολα να δείξουμε με τη βοήθεια των (6.2) και (6.3),

$$\frac{d}{dt}[A, B] = \left[\frac{dA}{dt}, B\right] + \left[A, \frac{dB}{dt}\right] \tag{6.8}$$

Αναφορές

1. M.J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM, 1981).
2. M.J. Ablowitz and P.A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge University Press, 1991).
3. P.G. Drazin and R.S. Johnson, *Solitons: An Introduction* (Cambridge University Press, 1989).
4. R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland, 1982).
5. C.J. Papachristou, J.Phys.A 24 (1991) L 1051.
6. C.J. Papachristou and B.K. Harrison, Phys. Lett. A 190 (1994) 407.
7. C.J. Papachristou, Phys. Lett. A 145 (1990) 250.
8. C.J. Papachristou, Phys. Lett. A 154 (1991) 29.
9. C. Rogers and W.F. Shadwick, *Bäcklund Transformations and Their Applications* (Academic Press, 1982).
10. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd Ed. (Addison-Wesley, 1980).

11. P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer-Verlag, 1986).
12. N.H. Ibragimov, *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics* (Reidel, 1985).
13. G.W. Bluman and S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations* (Springer-Verlag, 1989).
14. H. Stephani, *Differential Equations: Their Solution Using Symmetries* (Cambridge University Press, 1989).
15. W.-H. Steeb, *Continuous Symmetries, Lie Algebras, Differential Equations and Computer Algebra* (World Scientific, 1996).
16. B.K. Harrison and F.B. Estabrook, J. Math. Phys. 12 (1971) 653.
17. C.J. Papachristou and B.K. Harrison, Acta Appl. Math. 11 (1988) 155.
18. C.J. Papachristou and B.K. Harrison, J. Math. Phys. 28 (1987) 1261.
19. C.J. Papachristou and B.K. Harrison, J. Math. Phys. 29 (1988) 238.
20. L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2^{nd} Ed. (Cambridge University Press, 1996).
21. J. Mickelsson, *Current Algebras and Groups* (Plenum Press, 1989).
22. A.D. Popov and C.R. Preitschopf, Phys. Lett. B 374 (1996) 71.
23. L.-L. Chau, M.K. Prasad, and A. Sinha, Phys. Rev. D 24 (1981) 1574.
24. C.J. Papachristou and B.K. Harrison, Phys. Lett. A 127 (1988) 167.
25. T. Ioannidou and R.S. Ward, Phys. Lett. A 208 (1995) 209.
26. C.J. Papachristou and B.K. Harrison, Lett. Math. Phys. 17 (1989) 285.
27. A.N. Leznov and M.V. Saveliev, Acta Appl. Math. 16 (1989) 1.
28. C.J. Papachristou, Phys. Lett. A 138 (1989) 493.
29. U. Saleem, M. Hassan, and M. Siddiq, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007) 5205.
30. H.C. Ohanian and R. Ruffini, *Gravitation and Spacetime*, 2^{nd} Ed. (Norton, 1994).
31. W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological* (Oxford University Press, 2001).
32. R.S. Ward, Phil. Trans. R. Soc. A 315 (1985) 451.
33. V.A. Belinski and V.E. Zakharov, Sov. Phys. JETP 48 (1978) 985; 50 (1979) 1.
34. Y.-J. Gao, Z.-Z. Zhong, and Y.-X. Gui, Int. J. Theor. Phys. 36 (1997) 689.
35. B.K. Harrison, *The Differential Form Method for Finding Symmetries*, in *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, Vol. 1 (2005), Paper 001 (http://www.emis.de/journals/SIGMA/2005/Paper001/).
36. V. Tychynin, O. Petrova, and O. Tertyshnyk, *Nonlocal Symmetries and Generation of Solutions for Partial Differential Equations*, in *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, SIGMA 3 (2007), 019 (http://www.emis.de/journals/SIGMA/2007/019/).

Σύντομο βιογραφικό σημείωμα

Κωνσταντίνος Ι. Παπαχρήστου: Γεννήθηκε στην Αθήνα το 1957. Έλαβε το Πτυχίο Φυσικής από το Πανεπιστήμιο Αθηνών το 1981. Στη συνέχεια, απέκτησε Διδακτορικό Δίπλωμα στη Μαθηματική Φυσική από το Πανεπιστήμιο Brigham Young των Η.Π.Α. (1987), όπου και παρέμεινε την περίοδο 1987-1988 ως μεταδιδακτορικός συνεργάτης-καθηγητής και δίδαξε σειρά εξειδικευμένων σεμιναρίων για μεταπτυχιακούς φοιτητές και καθηγητές Φυσικής και Μαθηματικών. Στη Σχολή Ναυτικών Δοκίμων διδάσκει το μάθημα της Φυσικής από το 1989. Την περίοδο 1989-1997 συνεργάστηκε επίσης με το Εργαστήριο Ελευθέρων Σπουδών "Athens Institute of Technology", του οποίου υπήρξε καθηγητής Φυσικής και Μαθηματικών καθώς και Διευθυντής Σπουδών. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα και οι επιστημονικές του δημοσιεύσεις αφορούν τη μελέτη μη-γραμμικών κλασικών πεδιακών εξισώσεων.