Κ. Ι. ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ

Τομέας Φυσικών Επιστημών
Σχολή Ναυτικών Δοκίμων

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Ιδιότητες & Εφαρμογές

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2013

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Έστω 2×2 πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} .$$

Όπως γνωρίζουμε, η *ορίζουσα* του A είναι ο αριθμός

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \ . \qquad (1)$$

Έστω, τώρα, 3×3 πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} .$$

Για να βρούμε την ορίζουσά του, εργαζόμαστε ως εξής: Πρώτα, φτιάχνουμε μια «σκακιέρα» 3×3 αποτελούμενη από + (συν) και – (πλην) τοποθετημένα εναλλάξ, τόσο οριζόντια όσο και κατακόρυφα. *Προσοχή*: *Πάνω αριστερά τοποθετούμε πάντα το «συν»!*

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} .$$

Τώρα, μπορούμε να αναπτύξουμε την ορίζουσα του *Α ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη:* το αποτέλεσμα θα είναι πάντα το ίδιο! Ας πούμε ότι διαλέγουμε να αναπτύξουμε ως προς την *πρώτη γραμμή*. Το πρώτο στοιχείο είναι το a. Στη θέση που βρίσκεται το στοιχείο αυτό (πάνω αριστερά), η «σκακιέρα» έχει +, έτσι δεν αλλάζουμε το πρόσημο του a. *Διαγράφουμε, τώρα, νοερά τη γραμμή και τη στήλη όπου βρίσκεται το* a (πρώτη γραμμή, πρώτη στήλη). Αυτό που απομένει είναι ένας μικρότερος, 2×2 πίνακας, με ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} .$$

Πολλαπλασιάζουμε το a με αυτή την ορίζουσα, και κρατάμε το αποτέλεσμα στην άκρη.

Το δεύτερο στοιχείο της πρώτης γραμμής είναι το b. Στη θέση που βρίσκεται αυτό, η σκακιέρα έχει –, έτσι γράφουμε $-b$. Διαγράφουμε (νοερά) τη γραμμή (πρώτη) και τη στήλη (δεύτερη) όπου βρίσκεται το b, οπότε προκύπτει η μικρή ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} .$$

Πολλαπλασιάζουμε το $-b$ με αυτή την ορίζουσα, και κρατάμε κι αυτό το αποτέλεσμα στην άκρη.

Το τρίτο στοιχείο της πρώτης γραμμής είναι το c. Στη θέση που βρίσκεται αυτό, η σκακιέρα έχει +, έτσι δεν αλλάζουμε το πρόσημο του c. Διαγράφουμε (νοερά) τη γραμμή (πρώτη) και τη στήλη (τρίτη) όπου βρίσκεται το c, οπότε προκύπτει η μικρή ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} .$$

Πολλαπλασιάζουμε το c με αυτή την ορίζουσα, και «σώζουμε» κι αυτό το αποτέλεσμα στη μνήμη.

Προσθέτοντας, τώρα, όλα τα αποτελέσματα που περιέχει η μνήμη, βρίσκουμε την ορίζουσα του A:

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} . \tag{2}$$

Φυσικά, για να ολοκληρωθεί η δουλειά μας, πρέπει να υπολογίσουμε τις μικρές ορίζουσες σύμφωνα με τον τύπο (1), πράγμα εύκολο!

Άσκηση: Υπολογίστε και πάλι την ορίζουσα του A, τούτη τη φορά αναπτύσσοντας ως προς τη *δεύτερη στήλη*, και δείξτε ότι:

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -b\begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} - h\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} .$$

Επιβεβαιώστε (αναπτύσσοντας τις μικρές ορίζουσες) ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο όπως πριν.

Άσκηση: Με τη βοήθεια της σκακιέρας:

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}$$

(το + πάντα *πάνω αριστερά*!), και ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία, αποδείξτε τον τύπο (1) για μια ορίζουσα 2×2. (Εξ ορισμού, η ορίζουσα ενός 1×1 πίνακα [a] ισούται με το μοναδικό στοιχείο του πίνακα.)

Για έναν 4×4 πίνακα, η σκακιέρα γράφεται (με το + πάντα *πάνω αριστερά*):

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix} .$$

Η ανάπτυξη μιας 4×4 ορίζουσας οδηγεί σε μικρότερες (*ελάσσονες*) ορίζουσες 3×3, που αναπτύσσονται όπως δείξαμε πριν. Προφανώς, το πρόβλημα δυσκολεύει όλο και περισσότερο καθώς μεγαλώνει η τάξη της ορίζουσας!

Άσκηση: Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

αναπτύσσοντας ως προς μία γραμμή και, ξανά, ως προς μία στήλη. Επιλέξτε τη γραμμή και τη στήλη που θα κάνουν τους υπολογισμούς σας πιο εύκολους. (Προφανώς, φροντίζουμε να υπάρχουν *όσο το δυνατόν περισσότερα μηδενικά στοιχεία*!)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Έστω A ένας $n \times n$ (τετραγωνικός) πίνακας, και έστω $\det A$ η ορίζουσα του A.

1. Αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης της ορίζουσας είναι μηδέν, τότε $\det A=0$.

2. Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης της ορίζουσας με λ, η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ.

3. Αν πολλαπλασιάσουμε *όλα* τα στοιχεία της ορίζουσας με λ, η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ^n (όπου n η τάξη του πίνακα A). Δηλαδή,

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A .$$

4. Αν ανταλλάξουμε αμοιβαία δύο γραμμές ή δύο στήλες, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.

5. Αν δύο γραμμές ή δύο στήλες είναι όμοιες μεταξύ τους, τότε $\det A=0$. Το ίδιο ισχύει, γενικότερα, αν δύο γραμμές ή δύο στήλες είναι η μία πολλαπλάσιο της άλλης.

6. Η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει αν κάνουμε τις γραμμές στήλες και τις στήλες γραμμές. Δηλαδή,

$$\det(A^T) = \det A\ ,$$

όπου A^T ο *ανάστροφος* του A: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

7. Ορίζουσα γινομένου πινάκων:

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \,.\, \det B\ .$$

Επίσης,

$$\det(A^k) = (\det A)^k\ , \quad k=1,2,3,\ldots\ .$$

8. Ορίζουσα *αντίστροφου* πίνακα (βλ. παρακάτω):

$$\det(A^{-1}) = 1 / \det A\ .$$

9. Η ορίζουσα τόσο ενός *διαγώνιου,* όσο και ενός *τριγωνικού* πίνακα A, ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου τού A.

10. Η τιμή μιας ορίζουσας μένει αμετάβλητη αν, σε μια γραμμή ή σε μια στήλη, προσθέσουμε ένα αυθαίρετο πολλαπλάσιο οποιασδήποτε άλλης γραμμής ή στήλης, αντίστοιχα.

ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Θεωρούμε έναν 3×3 πίνακα A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \equiv [a_{ij}] \qquad (i, j = 1,2,3)\ .$$

Έστω a_{ij} τυχαίο στοιχείο τού A (το στοιχείο που ανήκει στη γραμμή i και στη στήλη j). Διαγράφοντας (νοερά) τη γραμμή και τη στήλη όπου ανήκει το a_{ij}, προκύπτει ένας μικρότερος, 2×2 πίνακας. Καλούμε D_{ij} την ορίζουσα αυτού του πίνακα.

Κατασκευάζουμε, τώρα, έναν 3×3 πίνακα M, ως εξής: Στον δοσμένο πίνακα A, αντικαθιστούμε κάθε στοιχείο a_{ij} με το στοιχείο

$$(-1)^{i+j} D_{ij}\ .$$

Δηλαδή, στη θέση τού a_{ij} βάζουμε τη μικρή ορίζουσα D_{ij} *πολλαπλασιασμένη με το πρόσημο που υπάρχει στη σκακιέρα στη θέση που βρίσκεται το* a_{ij}. Έτσι, έχουμε:

$$M = \begin{bmatrix} D_{11} & -D_{12} & D_{13} \\ -D_{21} & D_{22} & -D_{23} \\ D_{31} & -D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}.$$

Τέλος, παίρνουμε τον *ανάστροφο* M^T του M, ο οποίος καλείται *προσαρτημένος* (adjoint) του πίνακα A:

$$\text{adj}\, A = M^T = \begin{bmatrix} D_{11} & -D_{21} & D_{31} \\ -D_{12} & D_{22} & -D_{32} \\ D_{13} & -D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}.$$

Ο *αντίστροφος* A^{-1} του πίνακα A (τέτοιος ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$, όπου $\mathbf{1}$ ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας) δίνεται από τη σχέση:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ \text{adj}\, A \qquad (3)$$

Προφανώς, για να υπάρχει ο αντίστροφος (να είναι ο πίνακας A *αντιστρέψιμος*), θα πρέπει $\det A \neq 0$. Η διαδικασία που περιγράψαμε ισχύει, γενικά, για τετραγωνικό πίνακα $n \times n$, για κάθε n=2,3,4,...

Άσκηση: Για τον 2×2 πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

δείξτε ότι:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε ότι

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση: Με χρήση της σχέσης (3), δείξτε ότι

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε ότι το αποτέλεσμά σας ικανοποιεί τη σχέση: $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbf{1}$.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Η μέθοδος που θα περιγράψουμε εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε *γραμμικό* $n \times n$ σύστημα εξισώσεων (n=2,3,4,...), δηλαδή, σύστημα γραμμικών εξισώσεων με n εξισώσεις και n αγνώστους. Χάριν απλότητας, θεωρούμε ένα 2×2 σύστημα:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Σε μορφή πινάκων, αυτό γράφεται:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

όπου A ο πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, $\mathbf{x}$ η στήλη των αγνώστων και $\mathbf{b}$ η στήλη των σταθερών όρων. Στην περίπτωση που $\mathbf{b}=0 \Leftrightarrow b_1=b_2=0$, λέμε ότι το σύστημα είναι *ομογενές*.

Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν $\det A \neq 0$, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και το σύστημα έχει *μοναδική* λύση που βρίσκεται ως εξής:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} \;\Rightarrow\; (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \;\Rightarrow$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \tag{6}$$

Στην περίπτωση που $\mathbf{b}=0$ (ομογενές σύστημα), η μόνη λύση του συστήματος είναι η μηδενική: $\mathbf{x}=0 \Leftrightarrow x_1=x_2=0$.

2. Αν $\det A=0$ (ο πίνακας A *δεν* είναι αντιστρέψιμος), τότε το σύστημα είτε δεν έχει λύση (είναι *αδύνατο*), είτε έχει *άπειρες* λύσεις.

Η δυσκολία με τη λύση (6) έγκειται στην ανάγκη υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα. Ας δούμε τώρα μια εναλλακτική έκφραση για τη λύση του συστήματος, όπως αυτή προκύπτει με βάση τη *μέθοδο του Cramer* (ή *μέθοδο των οριζουσών*). Όπως πριν, καλούμε A τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων στο σύστημα (4):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Επίσης, καλούμε A_1 τον πίνακα που προκύπτει από τον A με αντικατάσταση της πρώτης στήλης, δηλαδή, της στήλης των συντελεστών a_{11} και a_{21} του x_1 , από τη στήλη των σταθερών όρων, b_1 και b_2 . Όμοια, καλούμε A_2 τον πίνακα που προκύπτει από τον

A αν αντικαταστήσουμε τη δεύτερη στήλη (αυτή των συντελεστών τού x_2) με τη στήλη των σταθερών όρων. Αναλυτικά:

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix} .$$

Τότε, η λύση του συστήματος (4) – εάν αυτή υπάρχει – γράφεται:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \quad , \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \tag{7}$$

Οι ορίζουσες των πινάκων A_1 και A_2 λέγονται *ορίζουσες Cramer*.

Άσκηση: Γράψτε την αναλυτική έκφραση της λύσης (7), για δοσμένα a_{ij} και b_i .

Άσκηση: Θεωρούμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c \\ e\,x + f\,y &= g \end{aligned}$$

(όπου θέσαμε x_1=x, x_2=y) . Δείξτε ότι η λύση του είναι:

$$x = \frac{c\,f - bg}{a\,f - be} \quad , \quad y = \frac{ag - c\,e}{a\,f - be} \ .$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι γράφαμε τις εξισώσεις του δοσμένου συστήματος με «ανάποδη» σειρά:

$$\begin{aligned} e\,x + f\,y &= g \\ a\,x + b\,y &= c \end{aligned}$$

Θα πρέπει να αναμένουμε διαφορετική λύση; Εξηγήστε με βάση τις ιδιότητες των οριζουσών.

Γενικότερα, τώρα, για ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{8}$$

η λύση γράφεται:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad , \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

όπου A ο ($n\times n$) πίνακας των συντελεστών a_{jk} των αγνώστων, και A_i ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε τη στήλη που περιέχει τους συντελεστές τού x_i, με τη στήλη των σταθερών όρων b_k.

Διερεύνηση:

1. Αν $\det A \neq 0$ (δηλαδή, αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος), τότε η λύση (9) του συστήματος (8) υπάρχει και είναι *μοναδική*.

2. Αν $\det A=0$ (ο πίνακας *A δεν* είναι αντιστρέψιμος) και *έστω και μία* από τις ορίζουσες Cramer ($\det A_k$) είναι μη-μηδενική, τότε το σύστημα (8) *δεν έχει λύση* (είναι *αδύνατον*), όπως φαίνεται από τη σχέση (9).

3. Αν $\det A=0$ και *όλες* οι ορίζουσες Cramer ($\det A_k$, $k=1,2,...,n$) είναι μηδέν, τότε το σύστημα (8) έχει *άπειρες* λύσεις.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, σε ό,τι αφορά τις εφαρμογές, παρουσιάζει η περίπτωση ενός *ομογενούς* συστήματος, όπου όλοι οι σταθεροί όροι b_k ($k=1,2,...,n$) είναι μηδέν:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ &\vdots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Σε αυτή την περίπτωση, *όλες* οι ορίζουσες Cramer ($\det A_k$, $k=1,2,...,n$) είναι μηδέν (γιατί;). Έτσι:

1. Αν η ορίζουσα των συντελεστών είναι μη-μηδενική: $\det A \neq 0$, τότε, βάσει της (9), η μοναδική λύση του συστήματος (10) είναι η *μηδενική* λύση: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

2. Αν $\det A=0$, τότε το σύστημα (10) δέχεται *άπειρες* λύσεις.

Άσκηση: Δείξτε ότι (α) ένα ομογενές γραμμικό σύστημα έχει πάντα λύση, δηλαδή, δεν είναι ποτέ αδύνατον, και (β) για να έχει ένα τέτοιο σύστημα *μη-τετριμμένη* λύση (δηλαδή, διάφορη της μηδενικής) θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων να είναι μηδέν.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -6x + 3y &= 0 \end{aligned}$$

(όπου θέσαμε $x_1=x$, $x_2=y$) . Η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων, είναι:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \ .$$

Αυτό συμβαίνει γιατί η 2η γραμμή είναι πολλαπλάσιο (επί –3) της πρώτης. Κι αυτό, με τη σειρά του, οφείλεται στο ότι οι εξισώσεις του συστήματος *δεν είναι ανεξάρτητες* μεταξύ τους (η δεύτερη είναι πολλαπλάσιο της πρώτης, έτσι δεν δίνει καμία νέα πληροφορία). Το μόνο που μπορούμε να πούμε είναι ότι $y=2x$, με *αυθαίρετο* x. Τούτο σημαίνει ότι το σύστημα έχει *άπειρες* λύσεις, μία για κάθε επιλεγμένη τιμή τού x.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Έστω δύο διανύσματα:

$$\vec{A} = A_x \hat{u}_x + A_y \hat{u}_y + A_z \hat{u}_z \equiv (A_x, A_y, A_z)$$
$$\vec{B} = B_x \hat{u}_x + B_y \hat{u}_y + B_z \hat{u}_z \equiv (B_x, B_y, B_z)$$

(όπου τα $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$, $\hat{u}_z$ είναι *μοναδιαία* διανύσματα). Όπως γνωρίζουμε από την διανυσματική ανάλυση, το *εξωτερικό γινόμενο* των $\vec{A}$ και $\vec{B}$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή ορίζουσας, ως εξής:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} .$$

Επιπλέον, αναγκαία συνθήκη ώστε τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ να είναι *παράλληλα* μεταξύ τους, είναι να ισχύει: $\vec{A} \times \vec{B} = 0$.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι τιμές των α και β, για τις οποίες τα διανύσματα $\vec{A} \equiv (1, \alpha, 3)$ και $\vec{B} \equiv (-2, -4, \beta)$ είναι παράλληλα μεταξύ τους.

Θα πρέπει:

$$\begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ 1 & \alpha & 3 \\ -2 & -4 & \beta \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{u}_x (\alpha\beta + 12) - \hat{u}_y (\beta + 6) + \hat{u}_z (-4 + 2\alpha) = 0$$

(όπου αναπτύξαμε την ορίζουσα ως προς την πρώτη σειρά, δηλαδή, τη σειρά των μοναδιαίων διανυσμάτων). Επειδή τα μοναδιαία διανύσματα είναι *γραμμικά ανεξάρτητα* μεταξύ τους (κανένα απ’ αυτά δεν μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο), ο μόνος τρόπος για να ισχύει αυτή η ισότητα είναι να μηδενίζονται και οι τρεις όροι της. Εξισώνοντας τους συντελεστές των μοναδιαίων διανυσμάτων με μηδέν, παίρνουμε ένα σύστημα *τριών* εξισώσεων με *δύο* αγνώστους:

$$2\,\alpha - 4 = 0 , \quad \beta + 6 = 0 , \quad \alpha\beta + 12 = 0 .$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις δίνουν: $\alpha=2,\ \beta=-6$. Η τρίτη εξίσωση απλά επαληθεύει αυτό το αποτέλεσμα. Δηλαδή, η τρίτη εξίσωση είναι *συμβατή* με τις άλλες δύο, δεν δίνει όμως κάποια επιπρόσθετη πληροφορία. Αυτό οφείλεται στο ότι η εξίσωση αυτή *δεν είναι ανεξάρτητη* από τις πρώτες δύο, αλλά προκύπτει άμεσα από αυτές (δείξτε το!). Προσέξτε ότι, με τις τιμές των α και β που βρήκαμε, η τρίτη γραμμή της ορίζουσας που παριστά το $\vec{A}\times\vec{B}$ γίνεται πολλαπλάσιο της δεύτερης γραμμής (επί –2), έτσι ώστε η ορίζουσα αυτομάτως μηδενίζεται.

Άσκηση: Δείξτε ότι δεν υπάρχουν τιμές των α και β, για τις οποίες τα διανύσματα $\vec{A}\equiv(1,\alpha,3)$ και $\vec{B}\equiv(-2,\beta,6)$ είναι παράλληλα μεταξύ τους.

Άσκηση: Δείξτε ότι υπάρχουν *άπειρες* τιμές των α και β, για τις οποίες τα διανύσματα $\vec{A}\equiv(1,\alpha,3)$ και $\vec{B}\equiv(-2,\beta,-6)$ είναι παράλληλα μεταξύ τους. Ποια σχέση πρέπει να συνδέει τα α και β ;

Δεκέμβριος 2013