Κ. Ι. ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

2015

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αντικείμενο της σύντομης αυτής μαθηματικής μονογραφίας είναι τα ολοκληρώσιμα διαφορικά συστήματα. Τονίζουμε εξαρχής ότι δεν πρόκειται για πλήρες σύγγραμμα που μελετά τη θεωρία ή τις μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων. Ο όρος «*ολοκληρώσιμα*» θα πρέπει εδώ να ερμηνευθεί, κατά κύριο λόγο, ως «*δυνάμενα να ολοκληρωθούν*». Έτσι, η *δυνατότητα* ολοκλήρωσης θα μας απασχολήσει εξίσου με (αν όχι περισσότερο από) τη *μέθοδο* ολοκλήρωσης.

Το βιβλίο έχει καθαρά παιδαγωγικό χαρακτήρα και το επίπεδό του είναι εισαγωγικό. Απευθύνεται κυρίως σε προχωρημένους προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς σπουδαστές θετικών επιστημών με ενδιαφέροντα στην περιοχή των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Η παρουσίαση των θεμάτων θυσιάζει τη μαθηματική αυστηρότητα προς χάριν της απλότητας που υπαγορεύει η παιδαγωγική λογική. Έτσι, πολλά θεωρήματα ή προτάσεις παρατίθενται χωρίς απόδειξη, όταν κρίνεται ότι η αναλυτική παρουσίαση της απόδειξής τους θα δυσκόλευε τη μελέτη του κειμένου χωρίς απαραίτητα να αυξήσει την παιδαγωγική του αξία. Πληρέστερες και αυστηρότερες προσεγγίσεις μπορεί να βρει ο σπουδαστής στη βιβλιογραφία που παρατίθεται στο τέλος του βιβλίου.

Τα διαφορικά συστήματα στα οποία θα εστιάσουμε την προσοχή μας εντάσσονται σε δύο κατηγορίες:

- Ολοκληρώσιμα συστήματα *συνήθων διαφορικών εξισώσεων* (ΣΔΕ) πρώτης τάξεως.
- Ολοκληρώσιμα συστήματα *μερικών διαφορικών εξισώσεων* (ΜΔΕ).

Για την επίλυση των συστημάτων ΣΔΕ, ιδιαίτερα σημαντικός, όπως θα δούμε, είναι ο ρόλος του *πρώτου ολοκληρώματος*. Στην περίπτωση των ΜΔΕ, μία έννοια στην οποία θα αναφερόμαστε συχνά είναι η *συνθήκη συμβατότητας* (ή *συνθήκη ολοκληρωσιμότητας*) του συστήματος.

Μια άλλη έκφανση της ολοκληρωσιμότητας δίνουν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων στο χώρο, καθώς και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων στο μιγαδικό επίπεδο. Θα λέμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο (όμοια, μια μιγαδική συνάρτηση) είναι *ολοκληρώσιμο,* αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμά του είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που συνδέει οποιαδήποτε δύο σημεία του χώρου (αντίστοιχα, του μιγαδικού επιπέδου). Όπως θα δούμε στα Κεφάλαια 1 και 2, η ολοκληρωσιμότητα αυτού του τύπου σχετίζεται με την ολοκληρωσιμότητα συγκεκριμένων συστημάτων ΜΔΕ. Στην περίπτωση των μιγαδικών συναρτήσεων, το ολοκληρώσιμο σύστημα ΜΔΕ είναι αυτό που καθορίζεται από τις σχέσεις Cauchy-Riemann.

Στο Κεφάλαιο 3, εισάγουμε την έννοια του πρώτου ολοκληρώματος για μία ΣΔΕ και δείχνουμε πώς αυτό μπορεί να συμβάλει στην εύρεση της λύσης της. Σαν χαρακτηριστικό παράδειγμα, χρησιμοποιούμε τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για να επιλύσουμε την εξίσωση που εκφράζει τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα σε μία διάσταση.

Η συζήτηση γενικεύεται στο Κεφάλαιο 4 για συστήματα ΣΔΕ πρώτης τάξεως, όπου αναζητούμε και πάλι τη λύση του προβλήματος με τη χρήση πρώτων ολοκληρωμάτων. Η μέθοδος βρίσκει σημαντική εφαρμογή στις ΜΔΕ πρώτης τάξεως, των οποίων τη διαδικασία επίλυσης περιγράφουμε συνοπτικά. Τέλος, μελετούμε την περίπτωση ενός γραμμικού συστήματος ΣΔΕ, η επίλυση του οποίου ανάγεται σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών.

Το Κεφάλαιο 5 εξετάζει τα συστήματα ΣΔΕ από τη γεωμετρική σκοπιά. Έννοιες της Διαφορικής Γεωμετρίας, όπως οι ολοκληρωτικές και οι φασικές καμπύλες ενός συστήματος, η παράσταση ενός διανυσματικού πεδίου ως διαφορικού τελεστή, η παράγωγος Lie μιας συνάρτησης, κλπ., εισάγονται με τον απλούστερο δυνατό τρόπο. Μελετάται η γεωμετρική σημασία των ΜΔΕ πρώτης τάξεως, πράγμα που αποκαλύπτει τη στενή σχέση τους με τα συστήματα ΣΔΕ και τα διανυσματικά πεδία.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 εκτίθενται κάποια προχωρημένα θέματα που αφορούν ολοκληρώσιμα συστήματα ΜΔΕ. Δύο έννοιες γνωστές από τη θεωρία των ολοκληρώσιμων μη-γραμμικών ΜΔΕ είναι οι λεγόμενοι *μετασχηματισμοί Bäcklund* και το *ζεύγος Lax*. Και στις δύο περιπτώσεις, μια μη-γραμμική ΜΔΕ εκφράζεται ως συνθήκη συμβατότητας ενός συστήματος ΜΔΕ. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με ένα γνωστό σύστημα ΜΔΕ σε 4 διαστάσεις: τις *εξισώσεις του Maxwell* για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Μία συνθήκη συμβατότητας για το σύστημα αυτό είναι η κυματική εξίσωση, την οποία πρέπει να υπακούουν, χωριστά, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Περιγράφεται λεπτομερώς η επίλυση του συστήματος Maxwell για την περίπτωση ενός μονοχρωματικού επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Κλείνοντας, θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον συνάδελφο και καλό φίλο **Αριστείδη Μαγουλά** για την εξαιρετική σχεδίαση ενός αριθμού σχημάτων στα Κεφάλαια 1 και 2. Αν είχα καταφέρει (όπως ανεπιτυχώς προσπάθησα) να τον συμπαρασύρω σε συμμετοχή στη συγγραφική προσπάθεια, το παρόν βιβλίο θα ήταν σίγουρα πολύ καλύτερο!

Κώστας Ι. Παπαχρήστου

Μάρτιος 2015

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

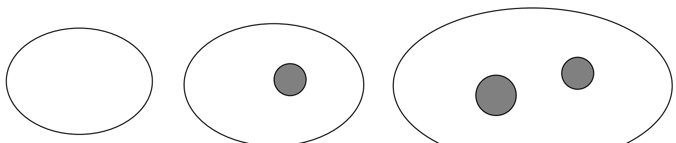
1.1 Απλά και Πολλαπλά Συνεκτικοί Χώροι

Ξεκινούμε με λίγες βασικές έννοιες από την Τοπολογία, που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια:

Μια περιοχή D στο επίπεδο λέγεται *απλά συνεκτική* αν, για κάθε κλειστή καμπύλη C στην περιοχή αυτή, κάθε σημείο του επιπέδου στο εσωτερικό τής C είναι και σημείο τής D. Εναλλακτικά, η περιοχή D είναι απλά συνεκτική, αν:

- Κάθε κλειστή καμπύλη μέσα στην D μπορεί να συρρικνωθεί ώσπου να γίνει σημείο, χωρίς ποτέ να αφήσει την περιοχή αυτή. Ή, ισοδύναμα:
- Για κάθε δύο σημεία A και B της D, υπάρχει κατ' ουσίαν ένας μόνο τρόπος για να πάμε από το A στο B, με την έννοια ότι, δύο διαφορετικοί δρόμοι από το A στο B παρίστανται με ανοικτές καμπύλες που μπορούν με ελαστική παραμόρφωση να ταυτιστούν, χωρίς ποτέ να εγκαταλείψουν την περιοχή D.

Αν υπάρχουν δύο μη-ισοδύναμοι τρόποι για να πάμε από το A στο B, η περιοχή λέγεται *διπλά συνεκτική*, ενώ αν υπάρχουν τρεις τρόποι, ονομάζεται *τριπλά συνεκτική*, κλπ.



(α) (β) (γ)

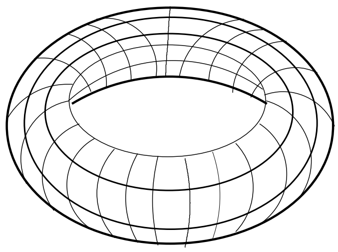
Στο σχήμα, η περιοχή (α) είναι απλά συνεκτική, η περιοχή (β) είναι διπλά συνεκτική, ενώ η περιοχή (γ) είναι τριπλά συνεκτική. Προσέξτε, για παράδειγμα, ότι μπορούμε να πάμε με δύο τρόπους από ένα σημείο τής (β) σε ένα άλλο: παρακάμπτοντας την «τρύπα» είτε από αριστερά, είτε από δεξιά. (Σημειώνουμε ότι η τρύπα μπορεί να είναι και *ένα μοναδικό σημείο* του επιπέδου, το οποίο έχει αφαιρεθεί από το επίπεδο.) Εναλλακτικά, υπάρχουν δύο είδη κλειστών καμπύλων στην περιοχή (β): αυτές που δεν κυκλώνουν την τρύπα, και αυτές που την κυκλώνουν. Με ανάλογο συλλογισμό, η τριπλή συνεκτικότητα της περιοχής (γ) οφείλεται στο ότι υπάρχουν τρεις μη-ισοδύναμοι τρόποι να πάμε από ένα σημείο της περιοχής σε ένα άλλο, ή, αντίστοιχα, τρία είδη κλειστών καμπύλων στην περιοχή: αυτές που δεν κυκλώνουν καμία τρύπα, αυτές που κυκλώνουν μία τρύπα (οποιαδήποτε!) και αυτές που κυκλώνουν δύο τρύπες.

Μια περιοχή Ω στο χώρο είναι *απλά συνεκτική* αν, για κάθε κλειστή καμπύλη C που ανήκει στην περιοχή αυτή, υπάρχει μια ανοιχτή επιφάνεια που έχει ως όριο την C και κείται εξ ολοκλήρου στην Ω. Αυτό σημαίνει ότι, κάθε κλειστή καμπύλη μέσα στην περιοχή Ω μπορεί να συρρικνωθεί ώσπου να γίνει σημείο, χωρίς ποτέ να αφήσει την περιοχή αυτή. Εναλλακτικά, η Ω είναι απλά συνεκτική αν, για κάθε δύο σημεία της, A και B, υπάρχει κατ' ουσίαν ένας μόνο τρόπος για να πάμε από το A στο B, με την έννοια ότι, δύο διαφορετικοί δρόμοι από το A στο B παρίστανται με ανοικτές καμπύλες που μπορούν με ελαστική παραμόρφωση να ταυτιστούν, χωρίς ποτέ να εγκαταλείψουν την περιοχή *Ω*. Αν υπάρχουν δύο μη-ισοδύναμοι τρόποι για να πάμε από το *A* στο *B*, η περιοχή λέγεται *διπλά συνεκτική*, κλπ.

Παραδείγματα:

1. Το εσωτερικό, το εξωτερικό, καθώς και η επιφάνεια μιας *σφαίρας*, είναι *απλά* συνεκτικές περιοχές στο χώρο. Το ίδιο ισχύει και για έναν *σφαιρικό φλοιό* (το χώρο ανάμεσα σε δύο ομόκεντρες σφαιρικές επιφάνειες).

2. Ο χώρος στο εσωτερικό ενός *torus* (ντόνατ) είναι *διπλά* συνεκτικός (γιατί;).



1.2 Τέλεια Διαφορικά και Ολοκληρωσιμότητα

Θεωρούμε το επίπεδο R^2 με συντεταγμένες (x, y). Έστω $D \subseteq R^2$ μια περιοχή του επιπέδου, και έστω $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο τής D. Η έκφραση:

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

είναι *τέλειο (ή ολικό) διαφορικό* αν υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$, παραγωγίσιμη στην περιοχή D, τέτοια ώστε:

$$du = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \tag{1}$$

Αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της $u(x, y)$: Γενικά, ισχύει ότι

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \tag{2}$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα διαφορικά dx και dy είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, καταλήγουμε στο σύστημα *μερικών διαφορικών εξισώσεων* (ΜΔΕ):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \;\; , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \tag{3}$$

Για να έχει το σύστημα (3) λύση ως προς u (για να είναι, δηλαδή, *ολοκληρώσιμο*) θα πρέπει οι δύο εξισώσεις του να είναι *συμβατές* μεταξύ τους. Η *συνθήκη συμβατότητας* ή *συνθήκη ολοκληρωσιμότητας* του συστήματος βρίσκεται ως εξής: Παραγωγίζουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y, και τη δεύτερη ως προς x. Εξισώνοντας τις μεικτές παραγώγους τού u ως προς x και y, καταλήγουμε στη ΜΔΕ:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (4)$$

Αν η (4) δεν ικανοποιείται, το σύστημα (3) [ή, ισοδύναμα, η διαφορική σχέση (1)] δεν έχει λύση ως προς u, και η έκφραση $Pdx+Qdy$ δεν είναι τέλειο διαφορικό.

Παράδειγμα: $ydx-xdy\neq du$, διότι $P=y$, $Q=-x$, και $\partial P/\partial y=1$ ενώ $\partial Q/\partial x=-1$.

Παρατήρηση: Η συνθήκη (4) είναι *αναγκαία* για την ύπαρξη λύσης u στο σύστημα (3) ή, ισοδύναμα, στη διαφορική σχέση (1). Η συνθήκη αυτή θα είναι και *ικανή* αν η περιοχή $D\subseteq R^2$ είναι *απλά συνεκτική* (στην περιοχή αυτή, εξ υποθέσεως, οι συναρτήσεις P και Q είναι παραγωγίσιμες).

Παραδείγματα:

1. Θεωρούμε τη διαφορική σχέση: $du=ydx+xdy$. Έχουμε: $P=y$, $Q=x$, έτσι ώστε $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x=1$. Επί πλέον, οι συναρτήσεις P και Q είναι παραγωγίσιμες παντού στο επίπεδο R^2, που είναι απλά συνεκτικός χώρος. Άρα, πληρούνται οι προϋποθέσεις για την ύπαρξη του u. Οι σχέσεις (3) γράφονται: $\{\partial u/\partial x=y\ ,\ \partial u/\partial y=x\}$. Η πρώτη δίνει: $u=xy+C(y)$, όπου C αυθαίρετη συνάρτηση του y. Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στη δεύτερη εξίσωση, βρίσκουμε: $C'(y)=0 \Rightarrow C=\text{σταθερό}$. Έτσι, τελικά, $u(x,y)=xy+C$.

2. Θεωρούμε τη σχέση: $du=(x+e^y)dx+(xe^y-2y)dy$. Οι συναρτήσεις $P=x+e^y$ και $Q=xe^y-2y$ είναι παραγωγίσιμες σε ολόκληρο το επίπεδο R^2, που είναι απλά συνεκτικός χώρος. Επί πλέον, $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x=e^y$. Οι σχέσεις (3) γράφονται: $\{\partial u/\partial x=x+e^y\ ,\ \partial u/\partial y=xe^y-2y\}$. Από την πρώτη, παίρνουμε: $u=(x^2/2)+xe^y+\varphi(y)$ (με αυθαίρετο φ). Αντικαθιστώντας στη δεύτερη σχέση, βρίσκουμε: $\varphi'(y)=-2y \Rightarrow \varphi(y)=-y^2+C$. Έτσι, τελικά, $u(x,y)=(x^2/2)+xe^y-y^2+C$.

Έστω, τώρα, μια περιοχή $\Omega\subseteq R^3$ του χώρου, ο οποίος έχει συντεταγμένες (x, y, z). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο $(x,y,z)\in\Omega$. Η έκφραση:

$$P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$$

είναι *τέλειο διαφορικό* αν υπάρχει συνάρτηση $u(x,y,z)$, παραγωγίσιμη στην περιοχή Ω, τέτοια ώστε:

$$du=P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz \qquad (5)$$

Ισοδύναμα, μια και $du=(\partial u/\partial x)dx+(\partial u/\partial y)dy+(\partial u/\partial z)dz$, το u θα είναι λύση του συστήματος των ΜΔΕ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y,z)\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y,z)\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=R(x,y,z) \qquad (6)$$

Οι *συνθήκες συμβατότητας (ολοκληρωσιμότητας)* του συστήματος (*αναγκαίες* συνθήκες για την ύπαρξη λύσης u) είναι:

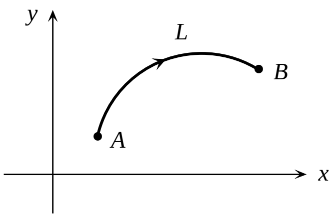
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y} \tag{7}$$

Οι συνθήκες (7) είναι και *ικανές* για την ύπαρξη λύσης, αν η περιοχή Ω, στην οποία οι συναρτήσεις P, Q, R είναι παραγωγίσιμες, είναι *απλά συνεκτική*.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη διαφορική σχέση: $du=(x+y+z)(dx+dy+dz)$, με $P=Q=R=x+y+z$. Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες (7) ικανοποιούνται, καθώς και ότι οι συναρτήσεις P, Q, R είναι παραγωγίσιμες σε όλο τον R^3, που είναι απλά συνεκτικός χώρος. Άρα, η παραπάνω διαφορική σχέση δέχεται λύση ως προς u. Οι σχέσεις (6) γράφονται: $\{\partial u/\partial x=x+y+z\ ,\ \partial u/\partial y=x+y+z\ ,\ \partial u/\partial z=x+y+z\}$. Η πρώτη σχέση δίνει: $u=(x^2/2)+xy+xz+\varphi(y,z)$ (με αυθαίρετο φ). Αντικαθιστώντας στη δεύτερη σχέση, βρίσκουμε: $\partial\varphi/\partial y=y+z \Rightarrow \varphi(y,z)=(y^2/2)+yz+\psi(z)$ (αυθαίρετο ψ). Τέλος, κάνοντας τις αναγκαίες αντικαταστάσεις στην τρίτη σχέση, έχουμε: $\psi'(z)=z \Rightarrow \psi(z)=(z^2/2)+C$. Τελικά, $u=(x^2+y^2+z^2)/2\ +xy+xz+yz+C$.

1.3 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα και Ανεξαρτησία Διαδρομής

Θεωρούμε το επίπεδο R^2 με συντεταγμένες (x, y). Έστω L μια *προσανατολισμένη καμπύλη* (*διαδρομή*) στο επίπεδο, η οποία έχει ως αρχικό σημείο το A και ως τελικό σημείο το B.



Η καμπύλη L μπορεί να περιγραφεί από παραμετρικές εξισώσεις της μορφής:

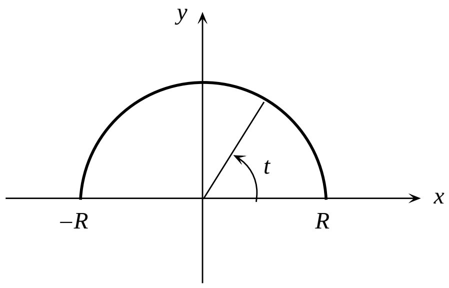
$$\{\ x=x(t)\ ,\ \ y=y(t)\ \} \tag{1}$$

Απαλείφοντας το t, καταλήγουμε σε μια σχέση (πεπλεγμένη συνάρτηση) της μορφής: $F(x, y)=0$, η οποία, σε μερικές περιπτώσεις, μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση $y=y(x)$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την παραμετρική καμπύλη:

$$\{\ x = R\cos t\ ,\quad y = R\sin t\ \}\ ,\quad 0 \le t \le \pi\ .$$

Η φορά προσανατολισμού (διαγραφής) της καμπύλης εξαρτάται από το αν το t αυξάνει («αριστερόστροφη») ή ελαττώνεται («δεξιόστροφη») μεταξύ των ορίων 0 και π.



Απαλείφοντας το t, έχουμε: $x^2+y^2-R^2=0 \Rightarrow y=(R^2-x^2)^{1/2}$.

Δοθείσης μιας επίπεδης καμπύλης L από A ως B, θεωρούμε, τώρα, *επικαμπύλιο ολοκλήρωμα* της μορφής:

$$I_L=\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy \tag{2}$$

Στην παραμετρική μορφή (1) της L, έχουμε: $dx=(dx/dt)dt=x'(t)dt$, $dy=y'(t)dt$, έτσι ώστε:

$$I_L=\int_{t_A}^{t_B}\left\{P[x(t),y(t)]\,x'(t)+Q[x(t),y(t)]\,y'(t)\right\}dt \tag{3}$$

Στη μορφή $y=y(x)$ της L, έχουμε ότι $dy=y'(x)dx$ και

$$I_L=\int_{x_A}^{x_B}\left\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]\,y'(x)\right\}dx \tag{4}$$

Γενικά, η τιμή του ολοκληρώματος I_L εξαρτάται από την καμπύλη διαδρομή L που συνδέει τα A και B.

Για κάθε διαδρομή L: $A\to B$, μπορούμε να ορίσουμε τη διαδρομή $-L$: $B\to A$, με αντίθετη κατεύθυνση. Από τη σχέση (3) βλέπουμε ότι, αν $I_L=\int_{t_A}^{t_B}(\cdots)\,dt$, τότε $I_{-L}=\int_{t_B}^{t_A}(\cdots)\,dt$. Άρα,

$$I_{-L}=-I_L \tag{5}$$

Αν τα ακραία σημεία A και B μιας διαδρομής ταυτίζονται, έχουμε μια *κλειστή* καμπύλη C και, αντίστοιχα, ένα *κλειστό* επικαμπύλιο ολοκλήρωμα I_C, για το οποίο χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\oint_C$. Ισχύει, τότε, ότι:

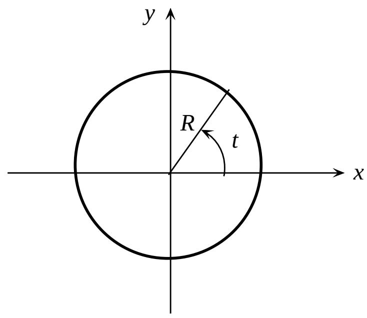
$$\oint_{-C}(\cdots)=-\oint_C(\cdots) \tag{6}$$

όπου η φορά διαγραφής τής $-C$ είναι *αντίθετη* από αυτήν της C (π.χ., αν η C είναι αριστερόστροφη στο επίπεδο, η $-C$ είναι δεξιόστροφη).

Παράδειγμα: Η παραμετρική καμπύλη:

$$\{\ x = R\cos t\ ,\quad y = R\sin t\ \}\ ,\qquad 0 \le t \le 2\pi$$

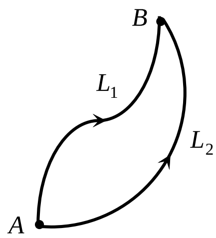
παριστά κύκλο στο επίπεδο.



Αν η *αριστερόστροφη* διαγραφή του κύκλου (όπου το t *αυξάνει* συνεχώς από 0 έως 2π) αντιστοιχεί στην καμπύλη C, τότε η *δεξιόστροφη* διαγραφή (με το t συνεχώς *ελαττούμενο* από 2π ως 0) αντιστοιχεί στην καμπύλη $-C$.

Πρόταση: Αν $\oint_C Pdx + Qdy = 0$ για *κάθε* κλειστή καμπύλη C, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_L Pdx + Qdy$ είναι *ανεξάρτητο του δρόμου* L που συνδέει οποιαδήποτε δύο σημεία A και B. Το αντίστροφο επίσης ισχύει.

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο τυχαία σημεία A και B του επιπέδου, καθώς και δύο τυχαίους δρόμους L_1 και L_2 που συνδέουν τα σημεία αυτά.



Σχηματίζουμε την κλειστή διαδρομή $C=L_1+(-L_2)$, από το A στο B μέσω της πρώτης διαδρομής, και πίσω πάλι στο A μέσω της δεύτερης διαδρομής αλλά με αντίθετη φορά. Έχουμε:

$$\oint_C Pdx + Qdy = 0 \iff \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{-L_2} Pdx + Qdy = 0 \iff$$
$$\int_{L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_2} Pdx + Qdy = 0 \iff \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy\ .$$

Θεώρημα 1: Έστω συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$, παραγωγίσιμες σε μια *απλά συνεκτική* περιοχή D του επιπέδου. Τότε, οι παρακάτω 4 προτάσεις είναι ισοδύναμες μεταξύ τους (αν ισχύει οποιαδήποτε από αυτές, τότε αυτόματα ισχύουν και οι υπόλοιπες):

(α) $\oint_C Pdx + Qdy = 0$, για κάθε κλειστή διαδρομή C μέσα στην D.

(β) Το ολοκλήρωμα $\int_L Pdx + Qdy$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης διαδρομής L που συνδέει δύο σταθερά σημεία A και B της D.

(γ) Η παράσταση $Pdx+Qdy$ είναι *τέλειο διαφορικό*. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $u(x, y)$ τέτοια ώστε:

$$du = Pdx + Qdy \quad \Leftrightarrow \quad \partial u/\partial x = P \,, \quad \partial u/\partial y = Q \,.$$

(δ) Σε κάθε σημείο τής D, ισχύει ότι:

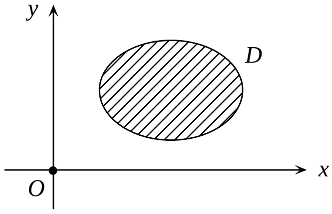
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \,.$$

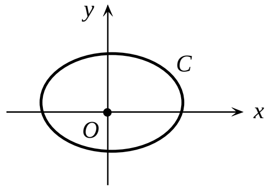
Παρατήρηση: Στην περίπτωση όπου η περιοχή D *δεν* είναι απλά συνεκτική, η συνθήκη (δ) δεν εξασφαλίζει την ισχύ των υπόλοιπων τριών συνθηκών. Εν τούτοις, οι (α), (β), (γ) εξακολουθούν να είναι ισοδύναμες μεταξύ τους, και κάθε μια συνεπάγεται και την (δ). Παρατηρούμε ότι η (δ) είναι η *συνθήκη ολοκληρωσιμότητας* για να ισχύει η (γ). (Θυμίζουμε ότι η συνθήκη αυτή είναι *αναγκαία* αλλά όχι και ικανή, στην περίπτωση όπου η περιοχή D στην οποία οι συναρτήσεις P και Q είναι παραγωγίσιμες, δεν είναι απλά συνεκτική.)

Παράδειγμα: Θεωρούμε τη διαφορική έκφραση:

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} \,.$$

Εδώ, $P= -y/(x^2+y^2)$, $Q= x/(x^2+y^2)$, και η συνθήκη (δ) ικανοποιείται (δείξτε το!). Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις P και Q είναι παραγωγίσιμες παντού στο επίπεδο, *εκτός* από την αρχή O των αξόνων, όπου $(x, y)\equiv(0,0)$. Τώρα, κάθε περιοχή D του επιπέδου, *η οποία δεν περιλαμβάνει το σημείο O* (αριστερό διάγραμμα στο παρακάτω σχήμα), είναι απλά συνεκτική (εξηγήστε γιατί!). Μια κλειστή καμπύλη C μέσα στην D, τότε, δεν θα εμπεριέχει στο εσωτερικό της το O. Για μια τέτοια καμπύλη, ισχύει ότι $\oint_C \omega = 0$ και $\omega=du$, με $u(x, y)=\arctan(y/x)$. Μια καμπύλη C, όμως, που *περικλείει* το O (δεξί διάγραμμα) δεν μπορεί να ανήκει σε απλά συνεκτική περιοχή (γιατί;). Για μια τέτοια καμπύλη, $\oint_C \omega \neq 0$.





Ας πάμε τώρα σε *επικαμπύλια ολοκληρώματα στο χώρο*. Έστω L: $\{x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ z=z(t)\}$ μια παραμετρική καμπύλη από το σημείο A ως το σημείο B του R^3. Έστω $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες στην περιοχή $\Omega\subseteq R^3$, στην οποία κείται η καμπύλη L. Θεωρούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$I_L = \int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz \tag{7}$$

ή, αναλυτικά,

$$I_L = \int_{t_A}^{t_B} dt\,\{P[x(t),y(t),z(t)]\,x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]\,y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]\,z'(t)\} \tag{8}$$

Θεώρημα 2: Αν η περιοχή Ω είναι *απλά συνεκτική*, τότε οι παρακάτω 4 προτάσεις είναι ισοδύναμες μεταξύ τους:

(α) $\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$, για κάθε κλειστή διαδρομή C μέσα στην Ω.

(β) Το ολοκλήρωμα $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης διαδρομής L που συνδέει δύο σταθερά σημεία A και B της Ω.

(γ) Η παράσταση $Pdx+Qdy+Rdz$ είναι *τέλειο διαφορικό*. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $u(x, y, z)$ τέτοια ώστε:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz \quad \Leftrightarrow \quad \partial u/\partial x = P\ ,\quad \partial u/\partial y = Q\ ,\quad \partial u/\partial z = R\ .$$

(δ) Σε κάθε σημείο τής Ω, ισχύει ότι:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}\ .$$

Παρατήρηση: Όταν η περιοχή Ω *δεν* είναι απλά συνεκτική, η συνθήκη (δ) δεν εξασφαλίζει την ισχύ των υπόλοιπων τριών συνθηκών. Εν τούτοις, οι (α), (β), (γ) εξακολουθούν να είναι ισοδύναμες μεταξύ τους, και κάθε μια συνεπάγεται και την (δ). Παρατηρούμε ότι η (δ) είναι η *συνθήκη ολοκληρωσιμότητας* για να ισχύει η (γ). (Θυμίζουμε ότι η συνθήκη αυτή είναι *αναγκαία* αλλά όχι και ικανή, στην περίπτωση όπου η περιοχή Ω στην οποία οι συναρτήσεις P, Q και R είναι παραγωγίσιμες, δεν είναι απλά συνεκτική.)

Από την (γ) προκύπτει ότι, για κάθε ανοιχτή καμπύλη L με όρια τα σταθερά σημεία A και B,

$$\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz = \int_A^B du = u(B) - u(A) \equiv u(x_B, y_B, z_B) - u(x_A, y_A, z_A) \tag{9}$$

Προσέξτε, ειδικά, ότι τούτο επαληθεύει αυτόματα την (β).

1.4 Διανυσματικά Πεδία Προερχόμενα από Δυναμικό

Έστω διανυσματικό πεδίο σε μια περιοχή $\Omega \subseteq R^3$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = P(x,y,z)\hat{u}_x + Q(x,y,z)\hat{u}_y + R(x,y,z)\hat{u}_z \tag{1}$$

όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης ενός σημείου (x, y, z) της περιοχής, και $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x, y, z, αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις P, Q, R είναι παραγωγίσιμες στην περιοχή Ω. Γράφουμε: $\vec{A} \equiv (P,Q,R)$, $\vec{r} \equiv (x,y,z)$.

Λέμε ότι το πεδίο (1) *προέρχεται από δυναμικό* αν υπάρχει συνάρτηση $u(x, y, z)$, τέτοια ώστε:

$$\vec{A} = \vec{\nabla} u \tag{2}$$

Αναλυόμενη σε συνιστώσες, η (2) γράφεται:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad R = \frac{\partial u}{\partial z} \tag{3}$$

Η συνάρτηση u καλείται *δυναμική συνάρτηση* ή *δυναμικό* του πεδίου $\vec{A}$.

Αν ισχύει η (2), τότε,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u = 0 \tag{4}$$

Δηλαδή, *ένα πεδίο προερχόμενο από δυναμικό είναι αναγκαία αστρόβιλο*. Η σχέση (4) γράφεται, σε συνιστώσες:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \tag{5}$$

Οι σχέσεις (5) είναι ακριβώς οι *συνθήκες ολοκληρωσιμότητας* για να έχει λύση το σύστημα (3) [και, συνεπώς, η διανυσματική σχέση (2)] ως προς u.

Η συνθήκη (4) είναι *αναγκαία* ώστε το πεδίο $\vec{A}$ να προέρχεται από δυναμικό. Είναι, όμως, και ικανή; Δηλαδή, ισχύει ότι ένα αστρόβιλο πεδίο προέρχεται από δυναμικό;

Πρόταση: Ένα *αστρόβιλο* πεδίο $\vec{A} \equiv (P,Q,R)$ σε μια *απλά συνεκτική* περιοχή Ω, προέρχεται από δυναμικό.

Απόδειξη: Κατά την υπόθεση, το σύστημα των ΜΔΕ (5) ικανοποιείται σε κάθε σημείο μιας απλά συνεκτικής περιοχής. Έτσι, σύμφωνα με όσα εκτέθηκαν σε προηγούμενες παραγράφους, η έκφραση $Pdx+Qdy+Rdz$ είναι τέλειο διαφορικό. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $u(x, y, z)$, τέτοια ώστε:

$$Pdx + Qdy + Rdz = du \tag{6}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ανεξαρτησία των διαφορικών *dx, dy, dz,* οδηγούμαστε έτσι στις σχέσεις (3), και τελικά στην (2).

Το Θεώρημα 2 της Παρ. 1.3 μπορεί νια διατυπωθεί στη «γλώσσα» των διανυσματικών πεδίων, ως εξής:

Θεώρημα: Έστω διανυσματικό πεδίο $\vec{A} \equiv (P, Q, R)$, όπου οι συναρτήσεις *P, Q, R* είναι παραγωγίσιμες σε μια *απλά συνεκτική* περιοχή $\Omega \subseteq R^3$. Έστω *L* μια ανοικτή καμπύλη, και *C* μια κλειστή καμπύλη, που κείνται εξ ολοκλήρου στην περιοχή *Ω*. Τότε, οι παρακάτω 4 προτάσεις είναι ισοδύναμες μεταξύ τους:

(*α*) $\oint_C \vec{A} \cdot \overrightarrow{dr} \equiv \oint_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

(*β*) Το ολοκλήρωμα $\int_L \vec{A} \cdot \overrightarrow{dr} \equiv \int_L Pdx + Qdy + Rdz$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης διαδρομής *L* που συνδέει δύο σταθερά σημεία τής *Ω*.

(*γ*) Υπάρχει συνάρτηση *u*(*x, y, z*) τέτοια ώστε, σε κάθε σημείο τής *Ω*, να ισχύει: $\vec{A} = \vec{\nabla} u$.

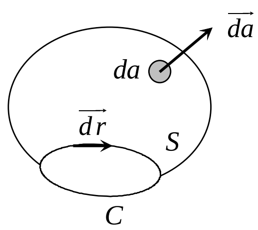
(*δ*) Σε κάθε σημείο τής *Ω*, ισχύει ότι $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ (δηλαδή, το πεδίο $\vec{A}$ είναι αστρόβιλο).

Παρατηρήσεις:

1. Από την (*γ*), έχουμε: $\vec{A} \cdot \overrightarrow{dr} = \vec{\nabla} u \cdot \overrightarrow{dr} = du$. Έτσι, αν *L* είναι μια καμπύλη διαδρομή με οριακά σημεία *b* και *c*,

$$\int_L \vec{A} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_b^c du = u(c) - u(b) \quad \text{(ανεξάρτητο της διαδρομής } b \to c\text{)} .$$

2. Έστω ότι η περιοχή *Ω*, στην οποία ισχύει η συνθήκη (*δ*), είναι απλά συνεκτική. Τότε, για κάθε κλειστή καμπύλη *C* στην *Ω*, υπάρχει ανοιχτή επιφάνεια *S* με όριο την *C*.



Από το θεώρημα του Stokes, τότε, έχουμε:

$$\oint_C \vec{A} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \overrightarrow{da} = 0 \ .$$

3. Όταν η περιοχή *Ω δεν* είναι απλά συνεκτική, η συνθήκη (*δ*) δεν εξασφαλίζει την ισχύ των υπόλοιπων τριών συνθηκών. Εν τούτοις, οι τρεις πρώτες συνθήκες εξακολουθούν να είναι ισοδύναμες μεταξύ τους, και κάθε μια συνεπάγεται και την (*δ*).

1.5 Συντηρητικά Πεδία Δυνάμεων

Στη Φυσική, ένα *στατικό* (χρονικά αμετάβλητο) πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r})$ καλείται *συντηρητικό* όταν το παραγόμενο έργο W_{AB} κατά τη μετακίνηση ενός υποθέματος από ένα σημείο A σε ένα άλλο σημείο B του πεδίου, είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που συνδέει τα δύο σημεία. Ισοδύναμα, το έργο κατά την κίνηση του υποθέματος πάνω σε μια *κλειστή* τροχιά C είναι μηδέν:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} \;\; \textit{ανεξάρτητο του δρόμου} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 0 \tag{1}$$

Έστω S μια ανοιχτή επιφάνεια μέσα στο πεδίο, η οποία έχει σαν όριο την κλειστή τροχιά C (βλ. σχήμα στην Παρ. 1.4). Από το θεώρημα του Stokes και την (1), έχουμε ότι:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \overrightarrow{da} = 0 \; .$$

Η σχέση αυτή ισχύει για *κάθε* ανοιχτή επιφάνεια που έχει σαν όριο την καμπύλη C. Άρα, θα πρέπει:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \tag{2}$$

Δηλαδή, *ένα συντηρητικό πεδίο δυνάμεων είναι αστρόβιλο*. (Η ισχύς του αντιστρόφου προϋποθέτει ότι η περιοχή του χώρου στην οποία ορίζεται το πεδίο, είναι *απλά συνεκτική*.)

Από την (1) επίσης προκύπτει (σύμφωνα με το Θεώρημα της Παρ. 1.4) ότι υπάρχει κάποια συνάρτηση τέτοια ώστε το $\vec{F}(\vec{r})$ να είναι το *grad* της συνάρτησης αυτής. Γράφουμε:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \tag{3}$$

Η συνάρτηση $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$ καλείται *δυναμική ενέργεια* του υποθέματος στο σημείο $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ του πεδίου. [Το αρνητικό πρόσημο στην (3) είναι θέμα σύμβασης και δεν έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία. Θα μπορούσαμε να το εξαλείψουμε θέτοντας $-U$ στη θέση τού U. Προσέξτε, επίσης, ότι η U είναι αυθαίρετη κατά μία προσθετική σταθερά, αφού οι U και $(U+c)$ αντιστοιχούν στην ίδια δύναμη $\vec{F}$ στην (3).]

Το έργο W_{AB} γράφεται:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_A^B (\vec{\nabla} U) \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_A^B dU \quad \Rightarrow$$

$$W_{AB} = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) \equiv U_A - U_B \tag{4}$$

Τώρα, από το *Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας*,

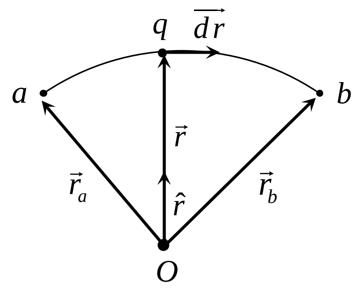
$$W_{AB} = E_{k,B} - E_{k,A} \tag{5}$$

όπου $E_k = mv^2/2$ η *κινητική ενέργεια* του υποθέματος (m και v είναι η μάζα και το μέτρο της ταχύτητάς του, αντίστοιχα). Συνδυάζοντας τις (4) και (5), έχουμε ότι:

$$E_{k,A} + U_A = E_{k,B} + U_B \qquad (6)$$

Το άθροισμα $E = E_k + U$ παριστά την *ολική μηχανική ενέργεια* του υποθέματος. Η σχέση (6), τότε, εκφράζει την *αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας*: *Σε ένα συντηρητικό πεδίο δυνάμεων, η ολική μηχανική ενέργεια ενός υποθέματος μένει σταθερή κατά την κίνηση του υποθέματος μέσα στο πεδίο.*

Παράδειγμα: Θεωρούμε το *ηλεκτροστατικό πεδίο Coulomb* που παράγεται από σημειακό φορτίο Q σταθερά τοποθετημένο στην αρχή O του συστήματος συντεταγμένων μας. Έστω q ένα δοκιμαστικό φορτίο σε σημείο του πεδίου με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = r\,\hat{r}$, όπου r η απόσταση του q από το O, και $\hat{r}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec{r}$ [στο πρόβλημα αυτό, είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε *σφαιρικές συντεταγμένες* (r, θ, φ)].



Η δύναμη που δέχεται από το πεδίο το q, στη στιγμιαία θέση $\vec{r}$, είναι:

$$\vec{F} = \frac{kqQ}{r^2}\,\hat{r}$$

(όπου k μια σταθερά που εξαρτάται από το σύστημα μονάδων). Όπως μπορεί να δειχθεί, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Δηλαδή, το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}$ είναι *αστρόβιλο*. Το πεδίο αυτό ορίζεται σε μια απλά συνεκτική περιοχή του χώρου (ολόκληρος ο χώρος, μείον το μοναδικό σημείο O όπου βρίσκεται το σημειακό φορτίο Q, στο οποίο οφείλεται το ηλεκτροστατικό πεδίο). Έτσι, το θεωρούμενο αστρόβιλο πεδίο δυνάμεων θα είναι και *συντηρητικό*. Πράγματι, ας θέσουμε: $F(r) = kqQ/r^2$, και ας γράψουμε:

$$\vec{F} = F(r)\,\hat{r} = \frac{F(r)}{r}\,\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \frac{F(r)}{r}\,\vec{r} \cdot \overrightarrow{dr} \; .$$

Αλλά,

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{dr} = \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2} d(r^2) = r\,dr \; ,$$

έτσι ώστε $\vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = F(r)\,dr$. Το παραγόμενο έργο, τότε, κατά τη μετακίνηση του q από το σημείο a στο σημείο b του πεδίου, είναι:

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_a^b F(r)\,dr = kqQ\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) \; .$$

Η έκφραση αυτή μας επιτρέπει να ορίσουμε τη δυναμική ενέργεια $U(r)$ του q στο θεωρούμενο σημείο του πεδίου, τέτοια ώστε $W_{ab}=U_a-U_b$. Όπως είναι εύκολο να δούμε,

$$U(r) = \frac{kqQ}{r} \ (+\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}) \ .$$

Παρατηρούμε ότι

$$-\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial r}\,\hat{r} = \frac{kqQ}{r^2}\,\hat{r} = \vec{F} \ .$$

Η ολική μηχανική ενέργεια του φορτίου q μένει σταθερή κατά την κίνηση του φορτίου μέσα στο πεδίο, και ισούται με:

$$E = E_k+U(r) = mv^2/2 + kqQ/r = \sigma\tau\alpha\theta.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

2.1 Αναλυτικές Συναρτήσεις

Θεωρούμε μιγαδικές συναρτήσεις της μορφής:

$$w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y) \tag{1}$$

όπου $z=x+iy \equiv (x, y)$ ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου. Έστω Δz μια μεταβολή τού z, και έστω $\Delta w=f(z+\Delta z) - f(z)$ η αντίστοιχη μεταβολή της τιμής τής $f(z)$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση (1) είναι *παραγωγίσιμη* στο σημείο z, αν μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \varepsilon(z, \Delta z) \quad \mu\varepsilon \quad \lim_{\Delta z \to 0} \varepsilon(z, \Delta z) = 0 \tag{2}$$

Η συνάρτηση, τότε,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{3}$$

καλείται *παράγωγος* της $f(z)$ στο σημείο z. Αυτονόητα, για να είναι η $f(z)$ παραγωγίσιμη στο z, θα πρέπει καταρχήν να *ορίζεται* στο σημείο αυτό. Σημειώνουμε, επίσης, ότι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα σημείο z_0, είναι αναγκαία *συνεχής* στο z_0 (το αντίστροφο *δεν* ισχύει πάντα). Δηλαδή, $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ (υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει).

Μια συνάρτηση $f(z)$ παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο μιας περιοχής G του μιγαδικού επιπέδου, λέγεται *αναλυτική* (ή *ολόμορφη*) στην περιοχή G. Κριτήριο αναλυτικότητας είναι ένα ζεύγος μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) που ονομάζονται *σχέσεις Cauchy-Riemann*.

Θεώρημα: Έστω μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ της μορφής (1), ορισμένη και συνεχής σε κάθε σημείο $z \equiv (x, y)$ μιας περιοχής G του μιγαδικού επιπέδου. Οι πραγματικές συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο της περιοχής και, επί πλέον, οι μερικές παράγωγοί τους ως προς x και y είναι συνεχείς συναρτήσεις στην G. Τότε, η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στην περιοχή G αν και μόνο αν ικανοποιείται το ακόλουθο σύστημα ΜΔΕ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

Είναι βολικό να εισαγάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \equiv \phi_x \ , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \equiv \phi_y \ , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \equiv \phi_{xx} \ , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \equiv \phi_{yy} \ , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \equiv \phi_{xy} \quad (\kappa\lambda\pi)\ .$$

Με αυτό το συμβολισμό, οι σχέσεις (4) γράφονται:

$$u_x = v_y \quad , \qquad u_y = -\, v_x \tag{4΄}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης (1) μπορεί τώρα να εκφραστεί στις ακόλουθες εναλλακτικές μορφές:

$$f\,'(z) = u_x+iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x \tag{5}$$

Παρατηρήσεις:

1. Οι σχέσεις (4) μας επιτρέπουν να βρούμε το v όταν γνωρίζουμε το u. Ας θέσουμε: $u_x=P$, $u_y=Q$, έτσι ώστε $\{v_x= -\,Q\ ,\ v_y=P\}$. Η *συνθήκη ολοκληρωσιμότητας* (*συμβατότητας*) του συστήματος για την ύπαρξη λύσης v, για δοσμένο u, είναι: $\partial P/\partial x = -\,\partial Q/\partial y \ \Rightarrow\ u_{xx}+u_{yy}= 0$. Όμοια, η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του συστήματος (4) για την ύπαρξη λύσης u, για δοσμένο v, είναι: $v_{xx}+v_{yy}= 0$. Παρατηρούμε ότι τόσο το πραγματικό, όσο και το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης, είναι *αρμονικές συναρτήσεις*, δηλαδή, ικανοποιούν τη *διαφορική εξίσωση του Laplace*:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \tag{6}$$

Αρμονικές συναρτήσεις που συνδέονται μεταξύ τους μέσω των σχέσεων (4), καλούνται *συζυγείς αρμονικές* (η μία ως προς την άλλη).

2. Έστω $z^*=x-iy$ ο *μιγαδικός συζυγής* τού $z=x+iy$. Τότε,

$$x = (z+z^*)\,/\,2 \quad , \qquad y = (z-z^*)\,/\,2i \tag{7}$$

Με χρήση των σχέσεων (7), μπορούμε να εκφράσουμε τις $u(x,y)$ και $v(x,y)$, άρα και το άθροισμα $w=u+iv$, σαν συναρτήσεις των z και z^*. Οι πραγματικές σχέσεις Cauchy-Riemann (4), τότε, γράφονται στη μορφή μιας μοναδικής μιγαδικής εξίσωσης:

$$\partial w \,/\, \partial z^* = 0 \tag{8}$$

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα ως εξής: Η αναλυτική συνάρτηση (1) είναι *κυριολεκτικά* μια συνάρτηση του $z=x+iy$, και όχι απλά μια οποιαδήποτε μιγαδική συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών x και y !

Παραδείγματα:

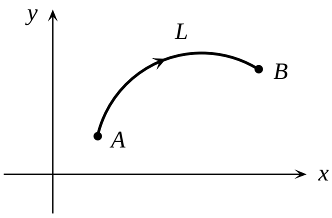
1. Ζητούμε μια αναλυτική συνάρτηση $w=u+iv$ της μορφής (1), με δεδομένο ότι $v(x,y)=xy$.

Λύση: Καταρχήν, παρατηρούμε ότι η v ικανοποιεί την ΜΔΕ (6): $v_{xx}+v_{yy}=0$ (αρμονική συνάρτηση). Έτσι, πληρούται η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας, ως προς u, του συστήματος (4). Το σύστημα αυτό γράφεται: $\{\partial u/\partial x=x\ ,\ \partial u/\partial y= -y\}$. Η πρώτη σχέση δίνει: $u=x^2/2+\varphi(y)$. Από τη δεύτερη, τότε, παίρνουμε: $\varphi'(y)= -y \ \Rightarrow\ \varphi(y)= -y^2/2+C$, έτσι ώστε $u=(x^2-y^2)/2+C$. Τελικά (θέτοντας $C=0$), έχουμε: $w=u+iv=(x^2-y^2)/2+ixy$. [*Άσκηση:* Κάνοντας χρήση των σχέσεων (7), δείξτε ότι: $w=f\,(z)= z^2/2$, επαληθεύοντας τη συνθήκη (8).]

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $w=f(z)=|z|^2$. Αυτή ορίζεται σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, και ισχύει ότι: $u(x,y)=x^2+y^2$, $v(x,y)=0$. Όπως είναι εύκολο να δούμε, οι σχέσεις Cauchy-Riemann (4) δεν ικανοποιούνται, με εξαίρεση το μοναδικό σημείο $z=0$ όπου $(x,y)\equiv(0,0)$. Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε: $w=zz^*$, έτσι ώστε $\partial w/\partial z^*=z\neq 0$ (εκτός από το μοναδικό σημείο $z=0$). Συμπεραίνουμε ότι η δοσμένη συνάρτηση δεν είναι αναλυτική στο μιγαδικό επίπεδο.

2.2 Ολοκληρώματα Μιγαδικών Συναρτήσεων

Έστω L μια προσανατολισμένη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο, του οποίου τα σημεία παρίστανται ως: $z=x+iy\equiv(x,y)$.



Τα σημεία z της L προσδιορίζονται από κάποια παραμετρική σχέση της μορφής:

$$z=\lambda(t)=x(t)+i\,y(t)\quad,\qquad \alpha\leq t\leq\beta \tag{1}$$

Καθώς το t αυξάνει από α ως β, η καμπύλη L διαγράφεται από το A προς το B, ενώ η αντίθετή της, $-L$, διαγράφεται από το B προς το A, με το t ελαττούμενο από β ως α.

Θεωρούμε, τώρα, ολοκληρώματα της μορφής: $\int_L f(z)\,dz$, όπου $f(z)$ μια μιγαδική συνάρτηση. Έχουμε: $dz=\lambda'(t)\,dt$, και

$$\int_L f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f[\lambda(t)]\lambda'(t)\,dt \tag{2}$$

Επίσης, $\int_{-L} f(z)\,dz \;=\; \int_\beta^\alpha(\cdots)\,dt \;=\; -\int_\alpha^\beta(\cdots)\,dt \quad\Rightarrow$

$$\int_{-L} f(z)\,dz \;=\; -\int_L f(z)\,dz \tag{3}$$

Για κάθε *κλειστή* καμπύλη C, θεωρούμε συμβατικά ότι είναι *θετικά* προσανατολισμένη αν διαγράφεται *αριστερόστροφα*. Τότε, η αντίθετη καμπύλη $-C$ είναι *αρνητικά* προσανατολισμένη, δηλαδή, *δεξιόστροφη*. Επί πλέον,

$$\oint_{-C} f(z)\,dz \;=\; -\oint_C f(z)\,dz \tag{4}$$

Παραδείγματα:

1. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα: $I = \oint_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{z-a}$, όπου ο κύκλος $|z-a|=\rho$ διαγράφεται (α) αριστερόστροφα, (β) δεξιόστροφα.

(α) Ο κύκλος $|z-a|=\rho$ περιγράφεται παραμετρικά με τη σχέση: $z=a+\rho e^{it}$, $0\leq t \leq 2\pi$. Τότε, $dz = (a+\rho e^{it})'dt = i\rho e^{it}\,dt$, και, ολοκληρώνοντας από 0 ως 2π (για *αριστερόστροφη* διαγραφή), έχουμε:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}dt}{\rho e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt \;\Rightarrow\; \oint_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \;.$$

(β) Για *δεξιόστροφη* διαγραφή του κύκλου $|z-a|=\rho$, γράφουμε και πάλι: $z=a+\rho e^{it}$ $(0\leq t \leq 2\pi)$. Τούτη τη φορά, ολοκληρώνουμε από 2π ως 0. Τότε, $I = i\int_{2\pi}^{0} dt = -2\pi i$. Εναλλακτικά, γράφουμε: $z=a+\rho e^{-it}$ $(0\leq t \leq 2\pi)$ και ολοκληρώνουμε από 0 ως 2π, με το ίδιο αποτέλεσμα.

2. Ζητούμε το ολοκλήρωμα: $I = \oint_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{(z-a)^2}$, όπου ο κύκλος $|z-a|=\rho$ διαγράφεται *αριστερόστροφα*. Γράφουμε: $z=a+\rho e^{it}$ $(0\leq t \leq 2\pi)$, οπότε:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}dt}{\rho^2 e^{2it}} = \frac{i}{\rho}\int_0^{2\pi} e^{-it}dt = 0 \;.$$

Γενικά, για $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, και για έναν *θετικά* προσανατολισμένο (*αριστερόστροφο*) κύκλο $|z-a|=\rho$, έχουμε ότι:

$$\oint_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{(z-a)^k} = \begin{cases} 2\pi i \,, & \alpha\nu \;\; k=1 \\ 0 \,, & \alpha\nu \;\; k\neq 1 \end{cases} \tag{5}$$

2.3 Μερικά Βασικά Θεωρήματα

Παραθέτουμε, τώρα, μερικά σημαντικά θεωρήματα που αφορούν τις αναλυτικές συναρτήσεις:

Θεώρημα 1 (Cauchy-Goursat): Έστω ότι η συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ είναι αναλυτική σε μια *απλά συνεκτική* περιοχή G του μιγαδικού επιπέδου. Τότε, για οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη C στην G, ισχύει ότι:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{1}$$

Απόδειξη: Γράφουμε: $dz = dx + i\,dy$, έτσι ώστε

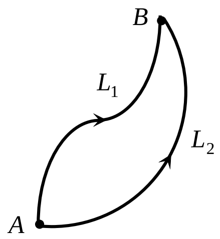
$$f(z)\,dz = (udx - vdy) + i\,(vdx + udy) \;\Rightarrow$$
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)\;.$$

Τώρα, αφού η $f(z)$ είναι αναλυτική στην *G*, θα ισχύουν οι σχέσεις Cauchy-Riemann στην περιοχή αυτή. Επί πλέον, επειδή η *G* είναι απλά συνεκτική, πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1 της Παρ. 1.3. Έτσι, έχουμε:

$$u_y = (-v)_x \;\Leftrightarrow\; \oint_C udx + (-v)dy = 0$$
$$v_y = u_x \;\Leftrightarrow\; \oint_C vdx + udy = 0$$

πράγμα που επαληθεύει την (1).

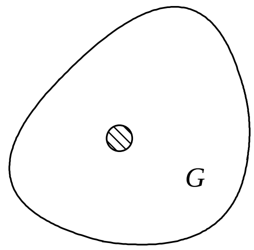
Πόρισμα: Σε μια απλά συνεκτική περιοχή *G*, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας αναλυτικής συνάρτησης $f(z)$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου που συνδέει δύο δοσμένα σημεία *A* και *B*.



Απόδειξη: Όπως στην Παρ. 1.3, θεωρούμε τον κλειστό δρόμο $C = L_1 + (-L_2)$. Από τη σχέση (1), τότε, έχουμε:

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{-L_2} f(z)\,dz = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\int_{L_1} f(z)\,dz - \int_{L_2} f(z)\,dz = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_{L_1} f(z)\,dz = \int_{L_2} f(z)\,dz\;.$$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σε μια περιοχή *G* του μιγαδικού επιπέδου, η οποία *δεν* είναι απλά συνεκτική.



(Π.χ., η περιοχή *G* του παραπάνω σχήματος είναι διπλά συνεκτική.) Έστω *C* μια κλειστή καμπύλη στην περιοχή αυτή. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(*α*) Η καμπύλη C δεν περικλείει, ούτε διέρχεται από, σημεία που δεν ανήκουν στην G. Τότε, η C οριοθετεί μια απλά συνεκτική υποπεριοχή τής G, στην οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Cauchy-Goursat. Έτσι, $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

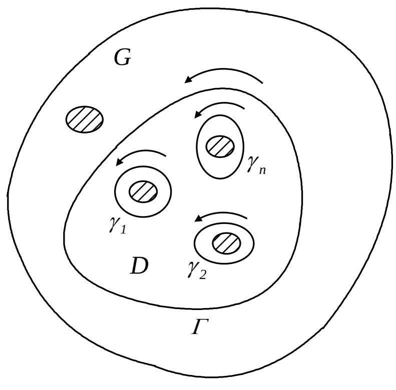
(*β*) Η καμπύλη C περικλείει, ή διέρχεται από, σημεία που δεν ανήκουν στην G. Τότε, η C δεν μπορεί να ανήκει σε κάποια απλά συνεκτική υποπεριοχή τής G, και οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1 δεν πληρούνται. Στην περίπτωση αυτή, η ισχύς της σχέσης (1) δεν είναι δεδομένη.

Παράδειγμα: Έστω G το μιγαδικό επίπεδο *χωρίς* την αρχή O των αξόνων του (το σημείο $z=0$). Η συνάρτηση $f(z)=1/z$ είναι αναλυτική στην περιοχή αυτή. Έστω C ο κύκλος $|z|=\rho$, με κέντρο το O. Τότε, όπως είδαμε στην Παρ. 2.2, $\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \ (\neq 0)$. Αντίθετα, $\oint_C \frac{dz}{z^k} = 0$ για $k \neq 1$.

Θεώρημα 2 (της σύνθετης διαδρομής): Έστω πολλαπλά (π.χ., διπλά, τριπλά,...) συνεκτική περιοχή G του μιγαδικού επιπέδου, και έστω Γ κλειστή καμπύλη μέσα στην G. Έστω $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ κλειστές καμπύλες στο εσωτερικό τής Γ (αλλά εξωτερικά η μία ως προς την άλλη) τέτοιες ώστε η περιοχή D ανάμεσα στις γ_k και την Γ να ανήκει εξ ολοκλήρου στην G. Τότε, για κάθε συνάρτηση $f(z)$ αναλυτική στην G,

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz \qquad (2)$$

όπου όλες οι καμπύλες $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, διαγράφονται *κατά την ίδια φορά* (π.χ., αριστερόστροφα).



Άσκηση: Να δειχθεί ότι:

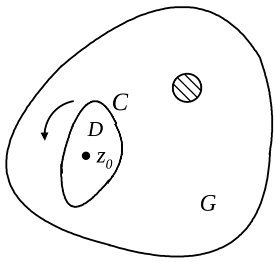
$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

όπου Γ οποιαδήποτε θετικά προσανατολισμένη, κλειστή καμπύλη που περικλείει την αρχή O ($z=0$) του μιγαδικού επιπέδου. (*Υπόδειξη:* Θεωρήστε έναν κύκλο $\gamma : |z|=\rho$, με κέντρο το O, ο οποίος κείται στο εσωτερικό της καμπύλης Γ.)

Θεώρημα 3 (ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy): Έστω συνάρτηση $f(z)$, αναλυτική σε μια περιοχή G. Έστω C κλειστή καμπύλη μέσα στην G, τέτοια ώστε το εσωτερικό D της C να ανήκει εξ ολοκλήρου στην G. Έστω σημείο $z_0 \in D$. Τότε,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} \tag{3}$$

όπου η C διαγράφεται κατά τη *θετική* φορά (δηλαδή, *αριστερόστροφα*).



Παρατηρήσεις:

1. Η τιμή του ολοκληρώματος στην (3) είναι ανεξάρτητη της επιλογής της καμπύλης C η οποία περικλείει το z_0 και ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος. (Τούτο προκύπτει από το θεώρημα της σύνθετης διαδρομής για $n=1$.)

2. Πιο γενικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \begin{cases} f(z_0)\,, & \alpha\nu \quad z_0 \in D \\ 0\,, & \alpha\nu \quad z_0 \in (G-D) \end{cases} .$$

Πράγματι: Αν $z_0 \in (G–D)$ (δηλαδή, $z_0 \notin D$), τότε η συνάρτηση $f(z)/(z–z_0)$ είναι αναλυτική παντού μέσα στην απλά συνεκτική περιοχή D, και ισχύει γι' αυτήν το θεώρημα Cauchy-Goursat.

Εφαρμογή: Θέτοντας $f(z)=1$, και θεωρώντας μια θετικά προσανατολισμένη διαδρομή C γύρω από ένα σημείο z_0, βρίσκουμε:

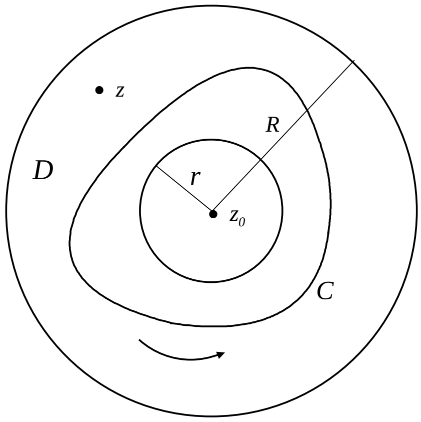
$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \ .$$

Σημείωση: Γενικότερα, για $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, έχουμε ότι:

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^k} = \begin{cases} 2\pi i\,, & \alpha\nu \quad k = 1 \\ 0\,, & \alpha\nu \quad k \neq 1 \end{cases} \tag{4}$$

όπου το σημείο z_0 βρίσκεται στο *εσωτερικό* τής C.

Θεώρημα 4 (σειρά Laurent): Έστω συνάρτηση $f\,(z)$, αναλυτική σε έναν δακτύλιο D: $r < |z-z_0| < R$, με κέντρο το z_0. Έστω C θετικά προσανατολισμένη, κλειστή διαδρομή γύρω από το z_0 και μέσα στον δακτύλιο D.



Τότε, σε κάθε σημείο $z \in D$, η $f\,(z)$ παρίσταται στη μορφή συγκλίνουσας σειράς:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n \tag{5}$$

όπου οι συντελεστές a_n δίνονται από την έκφραση:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \tag{6}$$

και όπου η τιμή του ολοκληρώματος στην (6) είναι ανεξάρτητη από την εκλογή της καμπύλης C.

Απόδειξη του τύπου των συντελεστών: Δεχόμενοι ότι ισχύει η (5), έχουμε:

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_n a_n\,(z-z_0)^{n-k-1} \;\Rightarrow$$

$$\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_n a_n \oint_C (z-z_0)^{n-k-1}\,dz \equiv \sum_n a_n\, I_{nk}\ .$$

Αλλά, βάσει της (4),

$$I_{nk} = \left\{ \begin{matrix} 2\pi i\ , & \alpha\nu \;\; n=k \\ 0\ , & \alpha\nu \;\; n \neq k \end{matrix} \right\} = 2\pi i\,\delta_{nk}\ ,$$

όπου δ_{nk} το «δέλτα του Kronecker», που παίρνει τις τιμές 1 και 0 για $n=k$ και $n \neq k$, αντίστοιχα. Έτσι,

$$\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}} = 2\pi i \sum_n a_n\,\delta_{nk} = 2\pi i\, a_k \;\Rightarrow\; a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}\ .$$

Παρατήρηση: Ο δακτύλιος D: $r < |z-z_0| < R$, μπορεί να είναι:

- η περιοχή ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους $(0 < r < R)$,
- ένας κύκλος που έχει αφαιρεθεί το κέντρο του $(r=0,\ R>0)$,
- το εξωτερικό ενός κύκλου $(r>0,\ R=\infty)$,
- ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο χωρίς το σημείο z_0 $(r=0,\ R=\infty)$.

2.4 Παράγουσα και Αόριστο Ολοκλήρωμα Αναλυτικής Συνάρτησης

Έστω z_0 και z σημεία μιας απλά συνεκτικής περιοχής G του μιγαδικού επιπέδου. Θεωρούμε το z_0 σταθερό, ενώ το z μπορεί να μεταβάλλεται. Σύμφωνα με το θεώρημα Cauchy-Goursat, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα από z_0 ως z, μιας συνάρτησης $f(z)$ αναλυτικής στην περιοχή G, εξαρτάται μόνο από τα δύο ακριανά σημεία και όχι από την καμπύλη διαδρομή που τα συνδέει. Έτσι, για ένα τέτοιο ολοκλήρωμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό: $\int_{z_0}^{z} f(z')\,dz'$ ή, χάριν απλότητας, $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$. Για μεταβλητό άνω όριο z, το ολοκλήρωμα αυτό είναι συνάρτηση του άνω ορίου του. Γράφουμε:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = I(z) \tag{1}$$

Όπως αποδεικνύεται, η $I(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση και, επί πλέον, είναι *παράγουσα* της $f(z)$: $I'(z)=f(z)$. Αναλυτικά,

$$I'(z) = \frac{d}{dz}\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = f(z) \tag{2}$$

Μια τυχαία παράγουσα $F(z)$ της $f(z)$ $[F'(z)=f(z)]$ ισούται με: $F(z)=I(z)+C$, όπου $C=F(z_0)$ μια σταθερά [προσέξτε ότι $I(z_0)=0$]. Παρατηρούμε ότι $I(z)=F(z)-F(z_0)$ $\Rightarrow$

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0) \tag{3}$$

Γενικά, για δοσμένα z_1, z_2, και για *τυχαία* παράγουσα $F(z)$ της $f(z)$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1) \tag{4}$$

Τώρα, αν επιτρέψουμε και στο κάτω όριο z_0 του ολοκληρώματος στη σχέση (1) να μεταβάλλεται, τότε η σχέση αυτή δίνει ένα *άπειρο σύνολο παραγουσών* τής $f(z)$, το οποίο καλείται *αόριστο ολοκλήρωμα* της $f(z)$ και συμβολίζεται με $\int f(z)\,dz$. Αν $F(z)$ είναι οποιαδήποτε παράγουσα της $f(z)$, η (3) παίρνει τη μορφή [με $-F(z_0)=C$]:

$$\int f(z)\,dz = \left\{ F(z)+C \;/\; F'(z)=f(z),\ C=\sigma\tau\alpha\theta. \right\}.$$

Απλουστεύοντας το συμβολισμό, γράφουμε:

$$\int f(z)\,dz = F(z) + C \tag{5}$$

όπου το δεξί μέλος παριστά ένα *άπειρο σύνολο* συναρτήσεων.

Παραδείγματα:

1. Η συνάρτηση $f(z)=z^2$ είναι αναλυτική σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, και μία παράγουσά της είναι η $F(z)=z^3/3$. Έτσι,

$$\int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + C \qquad \text{και} \qquad \int_{-1}^{i} z^2 dz = \frac{1}{3}(1-i)\ .$$

2. Η συνάρτηση $f(z)=1/z^2$ είναι παραγωγίσιμη παντού εκτός από την αρχή O του μιγαδικού επιπέδου, όπου $z=0$. Μία παράγουσά της, για $z\neq 0$, είναι η $F(z)= -1/z$. Έτσι,

$$\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C \qquad \text{και} \qquad \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}$$

(όπου η διαδρομή που συνδέει τα δύο σημεία $z_1\neq 0$ και $z_2\neq 0$ δεν διέρχεται από το O).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 Η Έννοια του Πρώτου Ολοκληρώματος

Μια *συνήθης διαφορική εξίσωση* (ΣΔΕ) συχνά επιλύεται ευκολότερα αν καταφέρουμε να βρούμε ένα *πρώτο ολοκλήρωμα*. Με πολύ απλά λόγια, τούτο είναι μια σχέση (αλγεβρική ή διαφορική) που μας λέει ότι κάποια μαθηματική ποσότητα μένει σταθερή ως συνέπεια της δοσμένης ΣΔΕ. Αυτή η ποσότητα μπορεί να εμπεριέχει την εξαρτημένη μεταβλητή y, την ανεξάρτητη μεταβλητή x, καθώς και παραγώγους $y^{(n)}(x) \equiv d^n y/dx^n$.

Στην περίπτωση που εμπεριέχονται παράγωγοι, το πρώτο ολοκλήρωμα οδηγεί σε μια ΣΔΕ *κατώτερης τάξης* από την αρχική. Έτσι, *ένα πρώτο ολοκλήρωμα χρησιμεύει για τον υποβιβασμό της τάξης μιας ΣΔΕ*. Αν η ΣΔΕ είναι *πρώτης* τάξεως, το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μια *αλγεβρική* σχέση που δίνει απευθείας τη λύση. Γενικά, *μια ΣΔΕ τάξεως n επιλύεται πλήρως αν καταφέρουμε να βρούμε n ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα*.

Στην Κλασική Μηχανική, η λύση ενός προβλήματος περνάει συχνά μέσα από την επίλυση ενός συστήματος ΣΔΕ δευτέρας τάξεως, το οποίο εκφράζει τον Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα. Με εξαίρεση κάποιες απλές περιπτώσεις, το σύστημα αυτό είναι δυσεπίλυτο, και για το λόγο αυτό αναζητούμε όσο το δυνατόν περισσότερα πρώτα ολοκληρώματα. Τούτα ονομάζονται *σταθερές της κινήσεως* και εκφράζουν *νόμους* ή *αρχές διατήρησης*, όπως, π.χ., η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, της ορμής και της στροφορμής.

3.2 Ακριβείς Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως

Έστω η ΣΔΕ: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ ($N \neq 0$), που γράφεται, πιο συμμετρικά,

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{1}$$

Η (1) ονομάζεται *ακριβής* αν υπάρχει συνάρτηση $u(x,y)$, τέτοια ώστε:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = du \tag{2}$$

(δηλαδή, η έκφραση $Mdx+Ndy$ είναι τέλειο διαφορικό). Τότε, οι (1) και (2) δίνουν: $du=0 \Rightarrow$

$$u(x,y) = C \tag{3}$$

Η (3) είναι μια αλγεβρική σχέση που συνδέει τα x και y και εμπεριέχει μια αυθαίρετη σταθερά. Άρα, μπορεί να θεωρηθεί ως η γενική λύση τής (1). Η σχέση (3) είναι ένα *πρώτο ολοκλήρωμα* της ΣΔΕ (1) και προσδιορίζει απευθείας τη λύση της.

Σύμφωνα με την (2), η συνάρτηση *u* ικανοποιεί το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) πρώτης τάξεως:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y) \tag{4}$$

Η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας του συστήματος (*αναγκαία* συνθήκη για την ύπαρξη λύσης *u*) είναι:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{5}$$

Αν η (5) ισχύει σε όλα τα σημεία μιας *απλά συνεκτικής* περιοχής D του επιπέδου xy, τότε η σχέση αυτή είναι και *ικανή*. Δηλαδή, μας εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης για το σύστημα (4), ή, ισοδύναμα, τη διαφορική σχέση (2).

Η σταθερά C στη λύση (3) προσδιορίζεται από την *αρχική συνθήκη* του προβλήματος: Αν η ειδική τιμή $x=x_0$ αντιστοιχεί στην τιμή $y=y_0$, τότε, $C=C_0=u(x_0, y_0)$. Βρίσκουμε, έτσι, την ειδική λύση: $u(x, y)=C_0$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την ΣΔΕ:

$$(x+y+1)\,dx + (x-y^2+3)\,dy = 0\ ,\quad \text{με αρχική συνθήκη: } y=1 \text{ για } x=0\ .$$

Είναι: $M=x+y+1$, $N=x-y^2+3$, και $\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$ (=1), σε όλα τα σημεία του επιπέδου xy. Το σύστημα (4) γράφεται: $\{\partial u/\partial x=x+y+1,\ \partial u/\partial y=x-y^2+3\}$. Η πρώτη εξίσωση δίνει: $u=x^2/2+xy+x+\varphi(y)$, ενώ από τη δεύτερη παίρνουμε: $\varphi'(y)= -y^2+3 \Rightarrow \varphi(y)= -y^3/3+3y+C_1$. Έτσι, $u=x^2/2-y^3/3+xy+x+3y+C_1$. Η γενική λύση (3) γράφεται: $u(x,y)=C_2$. Θέτοντας $C_2-C_1\equiv C$, έχουμε: $x^2/2-y^3/3+xy+x+3y=C$ (γενική λύση). Κάνοντας τις αντικαταστάσεις: $x=0$ και $y=1$ (όπως ορίζει η αρχική συνθήκη), βρίσκουμε: $C=8/3$ και $x^2/2-y^3/3+xy+x+3y=8/3$ (ειδική λύση).

3.3 Ολοκληρωτικός Παράγων

Έστω ότι η ΣΔΕ:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

δεν είναι ακριβής [δηλαδή, το αριστερό μέλος δεν είναι ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης $u(x,y)$]. Λέμε ότι η εξίσωση αυτή έχει *ολοκληρωτικό παράγοντα* $\mu(x,y)$ αν υπάρχει συνάρτηση $\mu(x,y)$, τέτοια ώστε η ΣΔΕ: $\mu(Mdx+Ndy)=0$ να *είναι* ακριβής, δηλαδή, η έκφραση $\mu(Mdx+Ndy)$ να είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης $u(x,y)$:

$$\mu(x, y)\,[M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy] = du \tag{2}$$

Τότε, η αρχική ΣΔΕ (1) ισοδυναμεί με την εξίσωση $du=0 \;\Rightarrow$

$$u(x, y) = C \tag{3}$$

με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση $\mu(x,y)$ δεν μηδενίζεται, εκ ταυτότητος, όταν τα x και y συνδέονται μέσω της (3). Η σχέση (3) είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα της ΣΔΕ (1) και εκφράζει τη γενική λύση της.

Παράδειγμα: Η ΣΔΕ: $ydx–xdy=0$ δεν είναι ακριβής, αφού $M=y$, $N=-x$, και $\partial M/\partial y=1$, $\partial N/\partial x=-1$. Όμως, η εξίσωση: $\frac{1}{y^2}(ydx-xdy)=0$ *είναι* ακριβής, αφού το αριστερό μέλος ισούται με $d(x/y)$. Έτσι, $d(x/y)=0 \;\Rightarrow\; y=Cx$. Η λύση είναι δεκτή, αφού ο ολοκληρωτικός παράγων $\mu=1/y^2$ δεν μηδενίζεται, εκ ταυτότητος, για $y=Cx$.

3.4 Διαφορικές Εξισώσεις Ανωτέρας Τάξεως

Στην περίπτωση μιας ΣΔΕ ανωτέρας τάξεως, ένα πρώτο ολοκλήρωμα οδηγεί σε *υποβιβασμό της τάξης* της ΣΔΕ.

Έστω μια ΣΔΕ τάξεως n:

$$F[x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}] = 0 \tag{1}$$

(όπου $y^{(n)} \equiv d^n y/dx^n$). Υποθέτουμε ότι το αριστερό μέλος τής (1) μπορεί να γραφεί ως παράγωγος κάποιας έκφρασης Φ, τάξεως $(n–1)$:

$$F[x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}] = \frac{d}{dx}\Phi[x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}] \tag{2}$$

Τότε, η (1) γράφεται: $d\Phi/dx=0 \;\Rightarrow$

$$\Phi[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}] = C \tag{3}$$

Η σχέση (3) είναι ένα *πρώτο ολοκλήρωμα* της (1) και αποτελεί μια ΣΔΕ τάξεως $(n–1)$.

Παράδειγμα: Για την ΣΔΕ δευτέρας τάξεως: $yy''+(y')^2=0$, παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος ισούται με $d(yy')/dx$. Έτσι, η δοσμένη εξίσωση δίνει: $yy'=C$ (ΣΔΕ πρώτης τάξεως) $\Rightarrow$ $y^2 = C_1 x + C_2$.

Μερικές φορές, το αριστερό μέλος τής (1) δεν είναι εξαρχής παράγωγος, αλλά μπορεί να γίνει αν πολλαπλασιαστεί με κατάλληλο *ολοκληρωτικό παράγοντα* $\mu[x, y, y', \dots, y^{(n-1)}]$:

$$\mu[x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}]\, F[x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}] = \frac{d}{dx}\Phi[x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}] \tag{4}$$

Τότε, και πάλι, $d\Phi/dx=0$, και οδηγούμαστε σε ένα πρώτο ολοκλήρωμα της μορφής (3).

Παράδειγμα: Έστω η ΣΔΕ: $yy'' - (y')^2 = 0$. Πολλαπλασιάζοντας με $\mu = 1/y^2$, το αριστερό μέλος γίνεται: $(y'/y)'$. Έτσι, η δοσμένη εξίσωση γράφεται: $(y'/y)' = 0 \Rightarrow y'/y = C$ (ΣΔΕ πρώτης τάξεως) $\Rightarrow y = C_1 e^{Cx}$.

3.5 Εφαρμογή: Νόμος του Νεύτωνα σε Μία Διάσταση

Σε αυτή την παράγραφο θα συμβολίζουμε την εξαρτημένη μεταβλητή με x, την ανεξάρτητη με t, και τις παραγώγους με $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, κλπ.

Θεωρούμε την ΣΔΕ δευτέρας τάξεως:

$$m\ddot{x} = F(x) \tag{1}$$

με αρχικές συνθήκες: $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$, όπου $v = dx/dt$. Από φυσική άποψη, η σχέση (1) εκφράζει τον *Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα* για ένα σωματίδιο μάζας m, κινούμενο με στιγμιαία ταχύτητα $v(t)$ κατά μήκος του άξονα x, κάτω από την επίδραση μας δύναμης (σωστότερα, ενός πεδίου δυνάμεων) $F(x)$. Επιλύοντας την (1), βρίσκουμε τη θέση $x = x(t)$ του σωματιδίου σαν συνάρτηση του χρόνου t.

Ορίζουμε μια βοηθητική συνάρτηση (*δυναμική ενέργεια* του σωματιδίου) $U(x)$, με τη σχέση:

$$U(x) = -\int^x F(x')\,dx' \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = -\frac{d}{dx}U(x) \tag{2}$$

(με αυθαίρετο κάτω όριο ολοκλήρωσης). Η συνάρτηση U ορίζεται πάντα σε μία διάσταση, πράγμα που δεν ισχύει σε περισσότερες διαστάσεις, αφού το αντίστοιχο ολοκλήρωμα με αυτό στην (2) θα εξαρτάται, γενικά, από το δρόμο ολοκλήρωσης και δεν θα ορίζεται μονοσήμαντα (με εξαίρεση την περίπτωση των *συντηρητικών* πεδίων, τα οποία μελετήσαμε στην Παρ. 1.5). Σημειώνουμε, επίσης, ότι η συνάρτηση U εξαρτάται από το χρόνο t *μέσω του* x, και όχι απευθείας ($\partial U/\partial t = 0$). Δηλαδή, η τιμή τής U μεταβάλλεται λόγω της κίνησης του σωματιδίου πάνω στον άξονα x, ενώ, σε σταθερό σημείο x, η U μένει χρονικά σταθερή.

Η (1), τώρα, γράφεται:

$$m\ddot{x} + \frac{dU}{dx} = 0 \ .$$

Το αριστερό μέλος δεν είναι τέλεια παράγωγος *ως προς* t. Ας δοκιμάσουμε, όμως, τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu = \dot{x}$:

$$\dot{x}\left(m\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\right) = 0 \ \Rightarrow \ m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dU}{dx} = 0 \ .$$

Αλλά,

$$\dot{x}\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) \qquad \text{και} \qquad \dot{x}\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dU}{dt} \ .$$

Έτσι, έχουμε: $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2+U(x)\right]=0 \quad \Rightarrow$

$$E \equiv \frac{1}{2}m\dot{x}^2+U(x) = \frac{1}{2}mv^2+U(x) = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o} \tag{3}$$

Η (3) εκφράζει την *διατήρηση της μηχανικής ενέργειας* του σωματιδίου, που βλέπουμε ότι είναι άμεση συνέπεια του Νόμου του Νεύτωνα. [Σε περισσότερες διαστάσεις, η αρχή αυτή ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}(\vec{r})$ είναι *συντηρητικό* (βλ. Παρ. 1.5).]

Η σχέση (3), που αποτελεί ένα πρώτο ολοκλήρωμα της ΣΔΕ (1), είναι ΣΔΕ πρώτης τάξεως και ολοκληρώνεται εύκολα. Έχουμε:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}[E-U(x)] \ .$$

Παίρνοντας την περίπτωση όπου $v=dx/dt>0$, γράφουμε:

$$\frac{dx}{dt}=\left\{\frac{2}{m}[E-U(x)]\right\}^{1/2} \Rightarrow \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\{\cdots\}^{1/2}}=\int_{t_0}^{t}dt$$

(όπου λάβαμε υπόψη ότι $x=x_0$ για $t=t_0$). Τελικά,

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\left\{\frac{2}{m}[E-U(x)]\right\}^{1/2}} = t-t_0 \tag{4}$$

Σημείωση: Η σχέση (4) ισχύει, όπως είδαμε, με την υπόθεση ότι $v>0$. Για $v<0$, θα πρέπει να θέσουμε $-dx$ στη θέση τού dx στο αριστερό μέλος. Γενικά, σε περιπτώσεις όπου η ταχύτητα v είναι θετική σε κάποια τμήματα της κίνησης και αρνητική σε κάποια άλλα, μπορεί να είναι αναγκαίο να εκτελέσουμε την ολοκλήρωση *χωριστά* για κάθε τμήμα της κίνησης!

Η (4) αποτελεί ειδική λύση τής (1) για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες. Θέτοντας $x=x_0$ και $v=v_0$ στην (3), και λαμβάνοντας υπόψη ότι το E είναι σταθερό (ίδιο για όλες τις χρονικές στιγμές t), μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της σταθεράς E που εμπεριέχεται στη λύση (4):

$$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2+U(x_0) \tag{5}$$

Παρατήρηση: Όπως φαίνεται από την (2), η συνάρτηση $U(x)$ είναι αυθαίρετη κατά μία προσθετική σταθερά, η οποία θα εξαρτάται από την επιλογή του κάτω ορίου στο ολοκλήρωμα που ορίζει την U. Μέσω της (3), η ίδια αυτή αυθαιρεσία μεταφέρεται και στην τιμή της σταθεράς E, απαλείφεται όμως αν πάρουμε τη διαφορά $E-U(x)$. Έτσι, η αυθαιρεσία αυτή δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης στην (4).

Παράδειγμα: Ευθύγραμμη κίνηση κάτω από *σταθερή* δύναμη F. Παίρνουμε: $t_0=0$, $x_0=x(0)=0$, $v(0)=v_0$, και θεωρούμε ότι $v=dx/dt>0$ (ειδικά, $v_0>0$) για το τμήμα της κίνησης που μας ενδιαφέρει. Από την (2) βρίσκουμε, κάνοντας αυθαίρετα την υπόθεση ότι $U=0$ για $x=0$:

$$\frac{dU}{dx}=-F \;\Rightarrow\; \int_0^U dU=-F\int_0^x dx \;\Rightarrow\; U(x)=-Fx \;.$$

Η (4), τότε, δίνει:

$$\int_0^x \frac{dx}{(E+Fx)^{1/2}}=\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} t \;\Rightarrow\; (E+Fx)^{1/2}=\frac{F}{2}\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2} t + E^{1/2} \,.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, βρίσκουμε:

$$x=\frac{F}{2m}\,t^2+\left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} t \;.$$

Καλούμε: $F/m=a=\sigma\tau\alpha\theta.$ (επιτάχυνση του κινητού). Επίσης, από την (5) έχουμε ότι $E=mv_0^2/2$ [αφού $U(0)=0$]. Έτσι, τελικά (λαμβάνοντας υπόψη ότι $v_0>0$),

$$x=\frac{1}{2}a\,t^2+v_0\,t \;,$$

που είναι ο γνωστός τύπος της ευθύγραμμης, ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

Άσκηση: Δείξτε ότι σε αποτέλεσμα παρόμοιας μορφής θα καταλήξουμε και στην περίπτωση όπου $v<0$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιούμε την (4) με $-dx$ στη θέση τού dx. Θέτουμε $v(0)=v_0$, με $v_0<0$.]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

4.1 Επίλυση με Αναζήτηση Πρώτων Ολοκληρωμάτων

Θεωρούμε σύστημα n συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ) πρώτης τάξεως, για n άγνωστες συναρτήσεις $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\,(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

Αν οι συναρτήσεις f_i δεν περιέχουν *απευθείας* το t (δηλαδή, $\partial f_i / \partial t = 0$ για i=1,2,...,n), το σύστημα καλείται *αυτόνομο*:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

Ένας *νόμος διατήρησης* για το σύστημα (1) είναι μια ΣΔΕ της μορφής:

$$\frac{d}{dt}\,\Phi\,(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = 0 \tag{3}$$

που ισχύει *σαν συνέπεια του συστήματος* (δηλαδή, όχι ταυτοτικά). Η (3) είναι άμεσα ολοκληρώσιμη:

$$\Phi\,(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = C \tag{4}$$

Η συνάρτηση Φ ονομάζεται *πρώτο ολοκλήρωμα* του συστήματος (1) και διατηρεί μια σταθερή τιμή *όταν τα* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ικανοποιούν το σύστημα* (δηλαδή, δεν είναι εκ ταυτότητος σταθερή, αλλά ανάγεται σε σταθερή για τις λύσεις του συστήματος).

Αν γνωρίζουμε ένα ή περισσότερα πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος, μπορούμε τετριμμένα να παράγουμε μια ολόκληρη απειρία παίρνοντας αθροίσματα, πολλαπλάσια, γινόμενα, δυνάμεις, κλπ. Εμάς, όμως, μας ενδιαφέρουν μόνο τα πρώτα ολοκληρώματα που είναι *ανεξάρτητα* μεταξύ τους, διότι αυτά είναι που δίνουν χρήσιμη πληροφορία για την επίλυση του προβλήματος.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι κατορθώσαμε να βρούμε k *ανεξάρτητα* πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος (1) ($k \le n$):

$$\begin{aligned} &\Phi_1\,(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = C_1 \\ &\Phi_2\,(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = C_2 \\ &\vdots \\ &\Phi_k\,(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = C_k \end{aligned} \tag{5}$$

Οι σχέσεις (5) μας επιτρέπουν να εκφράσουμε k εκ των $x_1 , \dots , x_n$ συναρτήσει των υπολοίπων (n–k) μεταβλητών και του t. Έτσι, απαλείφουμε k άγνωστες συναρτήσεις από το πρόβλημα, και το σύστημα (1) ανάγεται σε σύστημα με *μικρότερο αριθμό αγνώστων*, δηλαδή (n–k). Αν $k=n$, τότε *όλες* οι άγνωστες συναρτήσεις $x_1 , \dots , x_n$ προσδιορίζονται αλγεβρικά από το σύστημα (5), χωρίς να χρειάζεται να ολοκληρώσουμε το σύστημα (1).

Το *αυτόνομο* σύστημα (2) γράφεται:

$$\frac{dx_i}{f_i\,(x_1,\cdots,x_n)} = dt \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

Επειδή τα f_i δεν εμπεριέχουν απευθείας το t, η μεταβλητή αυτή μπορεί να απαλειφθεί από το σύστημα. Πράγματι, αφού όλα τα αριστερά μέλη στην (6) είναι ίσα με dt, θα είναι και ίσα μεταξύ τους. Έτσι,

$$\frac{dx_1}{f_1\,(x_1,\cdots,x_n)} = \frac{dx_2}{f_2\,(x_1,\cdots,x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n\,(x_1,\cdots,x_n)} \tag{7}$$

Η (7) παριστά ένα σύστημα (n–1) εξισώσεων με n μεταβλητές $x_1, x_2, \dots , x_n$. Για την επίλυσή του, αναζητούμε (n–1) ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα, της μορφής:

$$\Phi_j\,(x_1,x_2,\cdots,x_n) = C_j \qquad (j=1,2,\cdots,n-1) \tag{8}$$

Αναζητούμε, επίσης, ένα πρώτο ολοκλήρωμα Φ_n του πλήρους συστήματος (6):

$$\Phi_n\,(x_1,x_2,\cdots,x_n,t) = C_n \tag{9}$$

Οι (8) και (9) αποτελούν σύστημα n αλγεβρικών εξισώσεων με (n+1) μεταβλητές. Επιλύοντάς το ως προς τα $x_1, x_2, \dots , x_n$, εκφράζουμε τις μεταβλητές αυτές σαν συναρτήσεις τού t.

Αναλυτικά, ένας τρόπος επίλυσης του συστήματος (6) είναι ο εξής: Με τη βοήθεια των σχέσεων (8), εκφράζουμε (n–1) εκ των n μεταβλητών $x_1, \dots , x_n$ σαν συναρτήσεις της εναπομένουσας μεταβλητής. Έστω, για παράδειγμα, ότι οι $x_1, x_2, \dots , x_{n-1}$ εκφράζονται συναρτήσει της x_n . Παίρνοντας την (6) για $i=n$, έχουμε:

$$\frac{dx_n}{f_n\,(x_1,\cdots,x_n)} = dt \;\Rightarrow\; \int \frac{dx_n}{f_n\,(x_1,\cdots,x_n)} \equiv F(x_n)+c = t+c' \;\Rightarrow$$

$$\Phi_n\,(x_n,t) \equiv F(x_n)-t = C_n \tag{10}$$

Η σχέση (10) μας επιτρέπει να εκφράσουμε τη μεταβλητή x_n σαν συνάρτηση του t. Δοθέντος ότι τα $x_1, x_2, \dots , x_{n-1}$ είναι γνωστές συναρτήσεις τού x_n , οι μεταβλητές αυτές μπορούν, με τη σειρά τους, επίσης να εκφραστούν ως προς t.

Παραδείγματα:

1. Δίνεται το σύστημα:

$$\frac{dx}{dt}=y \quad (a) \qquad \frac{dy}{dt}=x \quad (b)$$

(Εδώ, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$.) Αναζητούμε πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος. Δύο είναι αρκετά για την πλήρη επίλυση του προβλήματος. Προσθέτοντας τις (a) και (b), έχουμε: $d\,(x+y)/dt=x+y$. Θέτοντας $x+y=u$, γράφουμε: $du/dt=u$, με λύση: $u=C_1\, e^{\,t} \Rightarrow (x+y)\, e^{-t} = C_1$. Όμοια, αφαιρώντας την (b) από την (a), και θέτοντας $x–y=u$, βρίσκουμε: $du/dt= - u \;\Rightarrow\; u=C_2\, e^{-t} \Rightarrow$ $(x–y)\, e^{\,t} = C_2$. Βρήκαμε, έτσι, δύο ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος:

$$\Phi_1\,(x, y, t) \equiv (x+y)\, e^{-t} = C_1 \quad , \qquad \Phi_2\,(x, y, t) \equiv (x–y)\, e^{\,t} = C_2 \;.$$

[*Άσκηση:* Επαληθεύστε ότι $d\,\Phi_1/dt=0$ και $d\,\Phi_2/dt=0$ *όταν* τα x και y είναι λύσεις του συστήματος (a), (b). Προσέξτε ότι τα Φ_1 και Φ_2 δεν είναι *εκ ταυτότητος* σταθερά!]

Από τις εκφράσεις των Φ_1 και Φ_2 μπορούμε, τώρα, να λύσουμε ως προς x και y συναρτήσει του t. Θέτοντας C_1 και C_2 στη θέση των $C_1/2$ και $C_2/2$, αντίστοιχα, βρίσκουμε:

$$x = C_1\, e^{\,t} + C_2\, e^{-t} \quad , \qquad y = C_1\, e^{\,t} - C_2\, e^{-t} \;.$$

Σχόλιο: Είναι δυνατό να βρούμε και άλλα πρώτα ολοκληρώματα για το σύστημα (a), (b). Για παράδειγμα, απαλείφοντας το dt, έχουμε: $dx/y=dy/x \;\Rightarrow\; xdx=ydy \;\Rightarrow\; d\,(x^2 - y^2)=0$, έτσι ώστε $\Phi_3(x,y) \equiv x^2 - y^2 = C_3$. Όμως, ας προσέξουμε ότι $\Phi_3=\Phi_1\Phi_2$. Έτσι, η σχέση: Φ_3=*σταθερό*, είναι τετριμμένη συνέπεια των Φ_1=*σταθερό* και Φ_2=*σταθερό*. Με άλλα λόγια, το Φ_3 δεν είναι ένα *ανεξάρτητο*, νέο πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος, και ως εκ τούτου δεν μας δίνει κάποια χρήσιμη πληροφορία για την επίλυση του προβλήματος.

2. Δίνεται το σύστημα:

$$\frac{dx}{dt}=y \quad (a) \qquad \frac{dy}{dt}=-x \quad (b)$$

Αναζητούμε δύο πρώτα ολοκληρώματα. Σε αυτή την περίπτωση, καμία χρήσιμη πληροφορία δεν προκύπτει προσθέτοντας ή αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις του συστήματος. Όμως, επειδή το σύστημα είναι αυτόνομο, μπορούμε να απαλείψουμε το dt :

$$dx/y = - dy/x \;\Rightarrow\; xdx+ydy=0 \;\Rightarrow\; d\,(x^2+y^2)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Phi_1\,(x, y) \equiv x^2+y^2 = C_1^{\,2} \;.$$

Για να επιλύσουμε πλήρως το πρόβλημα, χρειαζόμαστε άλλο ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος. Τούτη τη φορά, μάλιστα, θα πρέπει να εμπεριέχει απευθείας το t. Από τις (a) και (b), έχουμε:

$$x\,(dy/dt) - y\,(dx/dt) = -\,(x^2+y^2) \;\Rightarrow\; d\,(y/x)\,/dt = -\,[1 + (y/x)^2\,] \;.$$

Θέτοντας $y/x=u$, γράφουμε: $du/(1+u^2) = -dt \;\Rightarrow\; d(t+\arctan u) = 0$, απ' όπου βρίσκουμε:

$$\Phi_2(x,y,t) \equiv t + \arctan(y/x) = C_2 \ .$$

Χρησιμοποιούμε, τώρα, τα πρώτα ολοκληρώματα Φ_1 και Φ_2 για να επιλύσουμε το σύστημα (a), (b) αλγεβρικά. Η σχέση $\Phi_2=C_2$ δίνει: $y=-x\tan(t-C_2)$. Τότε, από τη σχέση $\Phi_1=C_1^2$ παίρνουμε: $x^2\,[1+\tan^2(t-C_2)]=C_1^2$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα: $\cos^2 a=1/1+\tan^2 a$, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι:

$$x = C_1\cos(t-C_2) \qquad \text{έτσι ώστε} \qquad y = -C_1\sin(t-C_2) \ .$$

Σχόλιο: Ένας εναλλακτικός τρόπος επίλυσης του προβλήματος είναι με *μετασχηματισμό συντεταγμένων* από *καρτεσιανές* (x,y) σε *πολικές* (r,θ), όπου $r \geq 0$ και $0 \leq \theta < 2\pi$. Οι εξισώσεις μετασχηματισμού είναι:

$$x = r\cos\theta \ , \quad y = r\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad r = (x^2+y^2)^{1/2} \ , \quad \theta = \arctan(y/x) \ .$$

Το σύστημα (a), (b) γράφεται:

$$(dr/dt)\cos\theta - r\,(d\theta/dt)\sin\theta = r\sin\theta \ ,$$

$$(dr/dt)\sin\theta + r\,(d\theta/dt)\cos\theta = -\,r\cos\theta \ .$$

Επιλύοντας ως προς τις παραγώγους, επιτυγχάνουμε να *αποσυμπλέξουμε* τις μεταβλητές, βρίσκοντας μια ξεχωριστή εξίσωση για κάθε μεταβλητή: $dr/dt = 0$, $d\theta/dt = -1$, με λύσεις: $r=C_1$, $\theta=-t+C_2$. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις μετασχηματισμού, έχουμε:

$$x = C_1\cos(t-C_2) \ , \qquad y = -C_1\sin(t-C_2) \ ,$$

όπως πριν. Τα πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος βρίσκονται εύκολα, λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις ως προς τις σταθερές C_1^2 και C_2 .

3. Δίνεται το σύστημα:

$$\frac{dx}{dt} = y - z \quad (a) \qquad \frac{dy}{dt} = z - x \quad (b) \qquad \frac{dz}{dt} = x - y \quad (c)$$

Η αναλυτική επίλυση του συστήματος είναι πολύ δύσκολη. Η λύση μπορεί, όμως, να εκφραστεί έμμεσα με τη βοήθεια τριών πρώτων ολοκληρωμάτων (τόσα απαιτούνται για αλγεβρική επίλυση του προβλήματος), ένα τουλάχιστον εκ των οποίων περιέχει απευθείας τη μεταβλητή t. Παίρνοντας το άθροισμα (a)+(b)+(c), έχουμε:

$$d(x+y+z)/dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1(x,y,z) \equiv x+y+z = C_1 \ .$$

Παίρνοντας τον συνδυασμό: $x.(a) + y.(b) + z.(c)$, έχουμε:

$$d(x^2+y^2+z^2)/dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_2(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2 = C_2 \ .$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις $\Phi_1=C_1$ και $\Phi_2=C_2$, μπορούμε να εκφράσουμε δύο από τις εξαρτημένες μεταβλητές, έστω τις x και y, συναρτήσει της τρίτης μεταβλητής, z. Τότε, η σχέση (c) του συστήματος γράφεται στη μορφή εξίσωσης για μία μοναδική μεταβλητή z:

$$\frac{dz}{x(z)-y(z)}=dt \;\Rightarrow\; \int\frac{dz}{x(z)-y(z)}\equiv F(z)+c=t+c' \;\Rightarrow$$

$$\Phi_3(z,t)\equiv F(z)-t=C_3 \;.$$

Η εξίσωση $\Phi_3=C_3$ μας επιτρέπει να εκφράσουμε το z σαν συνάρτηση του t. Δοθέντος ότι τα x και y είναι ήδη συναρτήσεις του z (άρα, έμμεσα, και του t), το πρόβλημα έχει επιλυθεί.

4. Θεωρούμε το σύστημα:

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz} \qquad (a)$$

Έχουμε ένα σύστημα *δύο* εξισώσεων με τρεις μεταβλητές, x, y, z. Η λύση του συστήματος θα μας επιτρέψει να εκφράσουμε δύο από τις μεταβλητές αυτές σαν συναρτήσεις της τρίτης (η τρίτη μεταβλητή, δηλαδή, παίζει εδώ το ρόλο που έπαιζε το t στα προηγούμενα παραδείγματα). Προς το σκοπό αυτό, αναζητούμε δύο ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος. Από τη δεύτερη ισότητα στη σχέση (a), παίρνουμε:

$$dy/y=dz/z \;\Rightarrow\; d(\ln y-\ln z)\equiv d\ln(y/z)=0 \;\Rightarrow\; \ln(y/z)=c \;\Rightarrow\; y/z=e^c\equiv C_1 \;.$$

Άρα,

$$\Phi_1(y,z)\equiv y/z=C_1 \;.$$

Χρειαζόμαστε, τώρα, ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος (a) που να εμπεριέχει και το x. Προς το σκοπό αυτό, εφαρμόζουμε μια γνωστή ιδιότητα των αναλογιών:

$$\frac{xdx}{x(x^2-y^2-z^2)}=\frac{ydy}{y(2xy)}=\frac{zdz}{z(2xz)}=\frac{xdx+ydy+zdz}{x(x^2+y^2+z^2)} \qquad (b)$$

Εξισώνοντας τον τελευταίο όρο με τον δεύτερο, έχουμε:

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dy}{2y} \;\Rightarrow\; \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; d\ln\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right)=c \;\Rightarrow\; \frac{x^2+y^2+z^2}{y}=e^c\equiv C_2 \;.$$

Άρα,

$$\Phi_2(x,y,z)\equiv(x^2+y^2+z^2)/y=C_2 \;.$$

Οι σχέσεις $\Phi_1=C_1$ και $\Phi_2=C_2$ αντιπροσωπεύουν τη λύση του συστήματος (*a*), αφού, με τη βοήθειά τους, μπορούμε να εκφράσουμε δύο από τις μεταβλητές σαν συναρτήσεις της τρίτης.

Σχόλιο: Αν είχαμε εξισώσει τον τελευταίο όρο στην (*b*) με τον τρίτο όρο, αντί για τον δεύτερο, θα είχαμε βρει, με όμοιο τρόπο:

$$\Phi_3(x,y,z) \equiv (x^2+y^2+z^2)/z = C_3 \ .$$

Αυτό, όμως, δεν είναι ένα νέο, *ανεξάρτητο* πρώτο ολοκλήρωμα, αφού, όπως είναι εύκολο να δείξουμε, $\Phi_3=\Phi_1\Phi_2$. Έτσι, η σταθερότητα των Φ_1 και Φ_2 συνεπάγεται αυτόματα και τη σταθερότητα της Φ_3 , οπότε η σχέση: $\Phi_3=$*σταθ.*, δεν μας δίνει κάποια καινούργια, χρήσιμη πληροφορία για τη λύση του προβλήματος.

4.2 Εφαρμογή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως

Θα δούμε, τώρα, τη σχέση ανάμεσα στα συστήματα διαφορικών εξισώσεων και τις *μερικές διαφορικές εξισώσεις* (ΜΔΕ) πρώτης τάξεως. Περισσότερα για τις ΜΔΕ θα πούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Θα περιοριστούμε εδώ στις ΜΔΕ των οποίων οι λύσεις είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών, x και y. Θα συμβολίζουμε με z τη μεταβλητή που παριστά την άγνωστη συνάρτηση στη ΜΔΕ. Έτσι, η λύση της εξίσωσης θα είναι της μορφής $z= z(x,y)$.

Γενικά, όπως η γενική λύση μιας ΣΔΕ τάξεως p εξαρτάται από p αυθαίρετες σταθερές (παραμέτρους), έτσι και η γενική λύση μιας ΜΔΕ τάξεως p εξαρτάται από p αυθαίρετες *συναρτήσεις*. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x+y \ \Rightarrow \ z = \dfrac{x^2}{2} + xy + \varphi(y)$.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xyz$. Ολοκληρώνουμε θεωρώντας το x σταθερό:

$$\int \frac{dz}{z} = x\int y\,dy \ \Rightarrow \ \ln z = \frac{xy^2}{2} + \ln\varphi(x) \ \Rightarrow \ z = \varphi(x)\,e^{xy^2/2} \ .$$

3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \varphi(y) \ \Rightarrow \ z = \int \varphi(y)dy + \varphi_1(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$.

Μια ΜΔΕ πρώτης τάξεως λέγεται *σχεδόν γραμμική* αν είναι γραμμική ως προς τις μερικές παραγώγους τού z (αλλά όχι απαραίτητα ως προς το ίδιο το z). Η ΜΔΕ αυτή έχει τη γενική μορφή:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \tag{1}$$

Η λύση $z(x,y)$ βρίσκεται με την ακόλουθη διαδικασία, την οποία παραθέτουμε εδώ χωρίς απόδειξη:

1. Διαμορφώνουμε το *χαρακτηριστικό σύστημα* ΣΔΕ:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \tag{2}$$

Η σχέση (2) παριστά σύστημα δύο εξισώσεων με τρεις μεταβλητές, x, y, z. Επιλύοντάς το, δύο από τις μεταβλητές εκφράζονται σαν συναρτήσεις της τρίτης. Η λύση μπορεί να εκφραστεί σαν αλγεβρικό σύστημα δύο *ανεξάρτητων* πρώτων ολοκληρωμάτων, της μορφής:

$$\Psi_1(x, y, z) = C_1 \quad , \qquad \Psi_2(x, y, z) = C_2 \tag{3}$$

2. Θεωρούμε μια *αυθαίρετη* συνάρτηση Φ των C_1 , C_2 . Διαμορφώνουμε την εξίσωση: $\Phi(C_1,C_2)=0$, ή, λόγω της (3),

$$\Phi\,[\,\Psi_1(x, y, z)\,,\,\Psi_2(x, y, z)] = 0 \tag{4}$$

Η (4) προσδιορίζει μια σχέση της μορφής: $z= z(x,y)$, εξαρτώμενη από μία αυθαίρετη συνάρτηση. Η σχέση αυτή είναι η επιθυμητή λύση της ΜΔΕ (1).

Παρατήρηση: Κάνοντας τις ειδικές επιλογές:

$$\Phi\,(\Psi_1,\Psi_2) = \Psi_1(x, y, z) - C_1 \quad \text{και} \quad \Phi\,(\Psi_1,\Psi_2) = \Psi_2(x, y, z) - C_2 \ ,$$

και απαιτώντας, σε κάθε περίπτωση, ότι $\Phi\,(\Psi_1,\Psi_2)=0$, οδηγούμαστε στις σχέσεις (3). Δηλαδή, *τα πρώτα ολοκληρώματα του χαρακτηριστικού συστήματος* (2) *αποτελούν ειδικές λύσεις της ΜΔΕ* (1).

Ειδική περίπτωση: Αν $R(x,y,z)=0$, και αν οι συναρτήσεις P και Q δεν εμπεριέχουν το z, τότε η ΜΔΕ (1) ονομάζεται *γραμμική ομογενής*:

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

Το χαρακτηριστικό σύστημα (2) γράφεται:

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} = \frac{dz}{0} \tag{6}$$

Για να είναι τα dx/P και dy/Q πεπερασμένα, θα πρέπει: $dz=0 \Leftrightarrow z=C_1$. Έχουμε, λοιπόν, ένα πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\Psi_1(z) \equiv z = C_1 \tag{7}$$

Επιλύουμε, τώρα, ξεχωριστά τη ΣΔΕ: $dx/P(x,y)=dy/Q(x,y)$, και εκφράζουμε τη λύση στη μορφή ενός πρώτου ολοκληρώματος:

$$\Psi_2(x, y) = C_2 \tag{8}$$

Τέλος, παίρνουμε μια *αυθαίρετη* συνάρτηση Φ των C_1 , C_2 , και απαιτούμε ότι $\Phi(C_1,C_2)=0$. Κάνοντας χρήση των (7) και (8), και θέτοντας $\Psi_2(x,y) \equiv \Psi(x,y)$, έχουμε:

$$\Phi[\, z \,, \Psi(x, y)] = 0 \tag{9}$$

Η σχέση (9) μας επιτρέπει να εκφράσουμε το z σαν συνάρτηση των x και y, πράγμα που συνιστά τη λύση της ΜΔΕ (5). Η αυθαιρεσία στην εκλογή της συνάρτησης Φ σημαίνει ότι η λύση αυτή θα εμπεριέχει μια αυθαίρετη συνάρτηση.

Παραδείγματα:

1. Θεωρούμε τη ΜΔΕ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \qquad (a)$$

Εδώ, $P=Q=R=1$. Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό σύστημα (2):

$$dx/P = dy/Q = dz/R \;\Rightarrow\; dx = dy = dz \;.$$

Βρίσκουμε δύο πρώτα ολοκληρώματα:

$$dx=dy \;\Rightarrow\; d(x-y)=0 \;\Rightarrow\; \Psi_1(x, y) \equiv x-y = C_1 \;,$$

$$dx=dz \;\Rightarrow\; d(z-x)=0 \;\Rightarrow\; \Psi_2(x, z) \equiv z-x = C_2 \;.$$

Η γενική λύση της ΜΔΕ (a) είναι:

$$\Phi(C_1,C_2) = 0 \;\Rightarrow\; \Phi(x-y, z-x) = 0 \;\Rightarrow\; z-x = F(x-y) \;\Rightarrow\; z = x + F(x-y) \,,$$

όπου η συνάρτηση Φ είναι αυθαίρετα επιλεγμένη, ενώ η F εξαρτάται από την επιλογή τής Φ. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να είχαμε πάρει:

$$dx=dy \;\Rightarrow\; \Psi_1(x,y) \equiv x-y = C_1 \;,$$

$$dy=dz \;\Rightarrow\; \Psi_3(y,z) \equiv z-y = C_3 \,,$$

με αντίστοιχη γενική λύση: $z= y+G(x-y)$. Οι δύο λύσεις που βρήκαμε, όμως, δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Πράγματι, αν θέσουμε: $G(x-y)=x-y+F(x-y)$, η δεύτερη λύση ανάγεται στην πρώτη.

Άσκηση: Επαληθεύστε ότι η έκφραση: $z=x+F(x-y)$, πράγματι ικανοποιεί τη ΜΔΕ (a). [*Υπόδειξη:* Θέσετε $x-y=u$, και προσέξτε ότι $\partial F/\partial x=F'(u)(\partial u/\partial x)=F'(u)$, $\partial F/\partial y= - F'(u)$.]

2. Θεωρούμε τη ΜΔΕ:

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (a)$$

Εδώ, $P= -y$, $Q=x$, $R=0$ (γραμμική ομογενής). Το χαρακτηριστικό σύστημα (6) γράφεται:

$$dx/(-y) = dy/x = dz/0 \;.$$

Έχουμε:

$$dz=0 \;\Rightarrow\; \Psi_1(z) \equiv z = C_1 \;,$$

$$-\,dx/y = dy/x \;\Rightarrow\; xdx+ydy = 0 \;\Rightarrow\; d(x^2+y^2) = 0 \;\Rightarrow\; \Psi_2(x,y) \equiv x^2+y^2 = C_2 \;.$$

Η γενική λύση τής (a) είναι (με αυθαίρετο Φ):

$$\Phi(C_1,C_2) = 0 \;\Rightarrow\; \Phi(z,\, x^2+y^2) = 0 \;\Rightarrow\; z = F(x^2+y^2) \qquad (\text{αυθαίρετο } F)\;.$$

Άσκηση: Επαληθεύστε ότι η παραπάνω έκφραση ικανοποιεί τη ΜΔΕ (a). [*Υπόδειξη:* Θέσετε $x^2+y^2=u$, και προσέξτε ότι $\partial F/\partial x=F'(u)(\partial u/\partial x)=2xF'(u)$, $\partial F/\partial y=2yF'(u)$.]

3. Έστω η ΜΔΕ:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z \qquad (a)$$

Το χαρακτηριστικό σύστημα γράφεται: $dx/x = dy/y = dz/z$. Έχουμε:

$$dx/x = dy/y \;\Rightarrow\; d(\ln x - \ln y) = 0 \;\Rightarrow\; \ln(x/y) = c \;\Rightarrow\; \Psi_1(x,y) \equiv x/y = C_1 \;,$$

$$dx/x = dz/z \;\Rightarrow\; d(\ln z - \ln x) = 0 \;\Rightarrow\; \ln(z/x) = c' \;\Rightarrow\; \Psi_2(x,z) \equiv z/x = C_2 \;.$$

Η γενική λύση τής (a) είναι:

$$\Phi(C_1,C_2) = 0 \;\Rightarrow\; \Phi(x/y,\, z/x) = 0 \;\Rightarrow\; z/x = F(x/y) \;\Rightarrow\; z = x\,F(x/y)\;,$$

όπου η συνάρτηση Φ είναι αυθαίρετη, ενώ η F εξαρτάται από την επιλογή τής Φ. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να είχαμε πάρει:

$$dx/x = dy/y \;\Rightarrow\; \Psi_1(x,y) \equiv x/y = C_1 \;,$$

$$dy/y = dz/z \;\Rightarrow\; \Psi_3(y,z) \equiv z/y = C_3\;,$$

με αντίστοιχη γενική λύση: $z= y\,G(x/y)$. Όμως, οι δύο λύσεις που βρήκαμε δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Πράγματι, αν θέσουμε: $G(x/y)=(x/y)F(x/y)$, η δεύτερη λύση ανάγεται στην πρώτη.

4.3 Σύστημα Γραμμικών Εξισώσεων

Θεωρούμε το *γραμμικό* και *ομογενές* σύστημα ΣΔΕ, με σταθερούς συντελεστές:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

(όπου a_{ij} σταθερές). Αναλυτικά,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n \end{aligned} \tag{2}$$

Αναζητούμε λύση της μορφής:

$$x_1 = \psi_1 e^{kt} \;, \quad x_2 = \psi_2 e^{kt} \;, \; \cdots \;, \quad x_n = \psi_n e^{kt} \tag{3}$$

όπου $\psi_1, ..., \psi_n$ σταθερές. Αντικαθιστώντας την (3) στην (2), και απαλείφοντας τον κοινό παράγοντα e^{kt}, βρίσκουμε ένα σύστημα n αλγεβρικών εξισώσεων για τα $\psi_1, ..., \psi_n$:

$$\begin{aligned} (a_{11} - k)\psi_1 + a_{12}\psi_2 + \cdots + a_{1n}\psi_n &= 0 \\ a_{21}\psi_1 + (a_{22} - k)\psi_2 + \cdots + a_{2n}\psi_n &= 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\psi_1 + a_{n2}\psi_2 + \cdots + (a_{nn} - k)\psi_n &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Για να έχει το ομογενές γραμμικό σύστημα (4) μη-τετριμμένη λύση ($\psi_1, ..., \psi_n$) [διάφορη, δηλαδή, της μηδενικής λύσης (0,...,0)] θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι μηδέν:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

(*χαρακτηριστική εξίσωση* του συστήματος). Η (5) είναι εξίσωση βαθμού n για το k. Επιλύοντάς την, βρίσκουμε τις τιμές της σταθεράς k για τις οποίες το σύστημα (4) έχει μη-τετριμμένες λύσεις για τα ψ_i (i=1,...,n).

Είναι ευκολότερο (και κομψότερο!) να γράψουμε τις εξισώσεις μας στη μορφή πινάκων. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε τον ($n \times n$) πίνακα A, και τους ($n \times 1$) πίνακες X και Ψ, ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad \Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} \quad .$$

Το σύστημα (2) γράφεται:

$$\frac{dX}{dt} = AX \tag{6}$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι $(dX/dt)_i = dx_i\,/dt$ (βλ. Παράρτημα) και $(AX)_i = \sum_j a_{ij}\, x_j$. Η ζητούμενη λύση (3) έχει τη μορφή:

$$X = \Psi\, e^{kt} \tag{7}$$

Αντικαθιστώντας την (7) στην (6), παίρνουμε μια εξίσωση πινάκων που αντιστοιχεί στο σύστημα (4):

$$A\Psi = k\Psi \quad \Leftrightarrow \quad (A - k \cdot 1_n)\,\Psi = 0 \tag{8}$$

όπου 1_n ο $(n \times n)$ μοναδιαίος πίνακας (τα διαγώνια στοιχεία του είναι ίσα με 1, ενώ τα μη-διαγώνια είναι 0). Η σχέση (8) έχει τη μορφή μιας *εξίσωσης ιδιοτιμών* (eigenvalue equation). Για να έχει μη-τετριμμένη λύση

$$\Psi \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

θα πρέπει να ισχύει:

$$\det(A - k \cdot 1_n) = 0 \tag{9}$$

που είναι ακριβώς η σχέση (5). Οι τιμές τού k, οι οποίες επαληθεύουν την εξίσωση (9), καλούνται *ιδιοτιμές* (eigenvalues) του πίνακα A, ενώ οι αντίστοιχες, μη-τετριμμένες λύσεις Ψ της (8), ονομάζονται *ιδιοδιανύσματα* (eigenvectors).

Για κάθε ρίζα k_i της χαρακτηριστικής εξίσωσης (9), η επίλυση της εξίσωσης ιδιοτιμών (8) δίνει ένα μη-τετριμμένο ιδιοδιάνυσμα $\Psi^{(i)}$. Αν *όλες* οι ρίζες k_i της (9) είναι *διάφορες μεταξύ τους*, παίρνουμε n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\Psi^{(i)}$ και ισάριθμες γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις (7) της ΣΔΕ (6):

$$X^{(i)} = \Psi^{(i)}\, e^{k_i t} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{10}$$

Η γενική λύση της γραμμικής εξίσωσης (6), τότε, είναι:

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i X^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \Psi^{(i)} e^{k_i t} \tag{11}$$

όπου $c_1, \ldots, c_n$ αυθαίρετες σταθερές.

Η περίπτωση *πολλαπλών ριζών* της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι πιο σύνθετη. Έστω ότι η k_i είναι ρίζα πολλαπλότητας λ_i της (9). Τότε, η λύση $X^{(i)}$ της ΣΔΕ (6) δεν δίνεται από τη σχέση (10), αλλά είναι της γενικότερης μορφής:

$$X^{(i)} = \left(\Psi_0^{(i)} + \Psi_1^{(i)} t + \cdots + \Psi_{\lambda_i - 1}^{(i)} t^{\lambda_i - 1} \right) e^{k_i t} \tag{12}$$

Η γενική λύση τής (6) είναι, και πάλι, $X = \sum_i c_i X^{(i)}$.

Παραδείγματα:

1. Θεωρούμε το σύστημα:

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y \ , \quad \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \qquad (a)$$

Σε μορφή πινάκων,

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad \text{όπου} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} .$$

Ζητούμε τις ιδιοτιμές k και τα ιδιοδιανύσματα Ψ του πίνακα A, σύμφωνα με την (8): $A\Psi = k\Psi$. Η σχέση (5) για τις ιδιοτιμές, γράφεται:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ k^2 - 4k - 5 = 0 \ \Rightarrow \ k_1 = 5, \ k_2 = -1 .$$

Έστω

$$\Psi^{(1)} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} , \quad \Psi^{(2)} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές k_1, k_2. Η σχέση: $A\Psi^{(1)} = k_1 \Psi^{(1)}$ οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων ως προς α και β. Επειδή το σύστημα είναι και ομογενές, οι εξισώσεις αυτές δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά οδηγούν στο ίδιο συμπέρασμα: $\beta = 2\alpha$. Έτσι,

$$\Psi^{(1)} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad \text{με } \ \alpha \ \text{ αυθαίρετο.}$$

Όμοια, η σχέση: $A\Psi^{(2)}=k_2\Psi^{(2)}$ δίνει: $\delta=-\gamma$, έτσι ώστε:

$$\Psi^{(2)} = \begin{bmatrix} \gamma \\ -\gamma \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{με } \gamma \text{ αυθαίρετο.}$$

Η γενική λύση (11) του αρχικού συστήματος (a), γράφεται:

$$X = c_1 \Psi^{(1)} e^{k_1 t} + c_2 \Psi^{(2)} e^{k_2 t} .$$

Κάνοντας αντικαταστάσεις και θέτοντας, απλά, c_1 και c_2 στη θέση των $c_1\alpha$ και $c_2\gamma$, αντίστοιχα, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad \Rightarrow \quad x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} , \quad y = 2c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t} .$$

2. Δίνεται το σύστημα:

$$\frac{dx}{dt} = x - y \ , \quad \frac{dy}{dt} = x + 3y \qquad (a)$$

Σε μορφή πινάκων,

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad \text{όπου} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} .$$

Οι ιδιοτιμές k του πίνακα A δίνονται από τη σχέση (5):

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ k^2 - 4k + 4 = 0 \ \Rightarrow \ k_1 = k_2 = 2 \ .$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει, εδώ, *διπλή* ρίζα. Έτσι, ζητούμε μια λύση X της μορφής (12), με λ_i=2:

$$X = (\Psi_0 + \Psi_1 t) e^{2t} \qquad (b)$$

Η σχέση $dX/dt=AX$, τότε, δίνει:

$$(\Psi_1 + 2\Psi_0) + (2\Psi_1)\, t = A\Psi_0 + (A\Psi_1)\, t \ .$$

Για να ισχύει η σχέση αυτή για κάθε t, θα πρέπει οι συντελεστές ίδιων δυνάμεων του t στα δύο μέλη να είναι ίσοι μεταξύ τους. Δηλαδή,

$$A\Psi_1 = 2\Psi_1 \ , \quad A\Psi_0 = \Psi_1 + 2\Psi_0 \qquad (c)$$

Έστω

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} , \quad \Psi_1 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} .$$

Η πρώτη από τις σχέσεις (c), τότε, οδηγεί σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα για τα γ και δ. Οι δύο εξισώσεις του συστήματος δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά οδηγούν στο ίδιο συμπέρασμα: $\delta = -\gamma$. Έτσι,

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \gamma \\ -\gamma \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \quad \text{με } \gamma \text{ } \textit{αυθαίρετο.}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση (c), τότε, παίρνουμε: $\beta = -(\alpha+\gamma)$, έτσι ώστε:

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -(\alpha+\gamma) \end{bmatrix} , \quad \text{με } \alpha \text{ } \textit{αυθαίρετο.}$$

Η λύση (b), τώρα, του συστήματος (a), γράφεται:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\gamma t \\ -(\alpha+\gamma+\gamma t) \end{bmatrix} e^{2t} \Rightarrow \quad (\text{θέτοντας } \alpha = c_1 , \gamma = c_2)$$

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{2t} , \quad y = -(c_1 + c_2 + c_2 t) e^{2t} .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ

5.1 Δυναμικά Συστήματα

Θεωρούμε το σύστημα ΣΔΕ πρώτης τάξεως:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\,(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος εκφράζονται με σχέσεις της μορφής: $x_i\,(t_0) = x_{0i}$.

Ορίζοντας τα διανύσματα: $X \equiv (x_1\,,\, x_2\,,\, \ldots\,,\, x_n\,)$, $F \equiv (\,f_1\,,\, f_2\,,\, \ldots\,,\, f_n\,)$, γράφουμε το σύστημα (1) και τις αρχικές συνθήκες σε συμπαγή διανυσματική μορφή:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \ , \quad X(t_0) = X_0 \tag{2}$$

όπου $X_0 \equiv (x_{01}\,,\, x_{02}\,,\, \ldots\,,\, x_{0n}\,)$. Το σύστημα (2) καλείται *αυτόνομο* αν $F{=}F(X)$, δηλαδή, αν η διανυσματική συνάρτηση F δεν εμπεριέχει απευθείας το t :

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \ , \quad X(t_0) = X_0 \tag{3}$$

Έστω $X(t) \equiv \big(x_1(t)\,,\, x_2(t)\,,\, \ldots\,,\, x_n(t)\big)$ η λύση του συστήματος (2). Η λύση αυτή θα εμπεριέχει n παραμέτρους που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή, εκφράζονται συναρτήσει των x_{0i} . Η λύση ορίζει μια *ολοκληρωτική καμπύλη* στον $(n{+}1)$-διάστατο Ευκλείδειο χώρο $R^n{\times}R$ με συντεταγμένες $(x_1\,,\, x_2\,,\ldots,\, x_n\,,\, t)$. Η *προβολή* της καμπύλης αυτής στο χώρο R^n: $(x_1\,,\, x_2\,,\ldots,\, x_n)$, δηλαδή, η εικόνα της απεικόνισης: $(t{\in}R){\to}X(t){\in}R^n$, ορίζει μια *τροχιά* στον R^n.

Κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις για τη διανυσματική συνάρτηση F, η λύση του συστήματος (2), για δοσμένες αρχικές συνθήκες, είναι *μοναδική* (δηλαδή, προσδιορίζεται μονοσήμαντα). Αυτό σημαίνει ότι *μία μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη διέρχεται από κάθε σημείο του χώρου* $R^n{\times}R$, πράγμα που δηλώνει ότι *οι ολοκληρωτικές καμπύλες στον* $R^n{\times}R$ *δεν τέμνονται*.

Δανειζόμενοι την ορολογία της Κλασικής Μηχανικής, καλούμε το σύστημα (2) *δυναμικό σύστημα*, και τον χώρο R^n: $(x_1\,,\ldots,\, x_n)$ *φασικό χώρο*. Η μεταβλητή t παριστά το *χρόνο*, και η τροχιά $X(t)$ στον φασικό χώρο αντιπροσωπεύει μια *φασική καμπύλη* στον R^n. Το διάνυσμα:

$$\frac{dX}{dt} \equiv \left(\frac{dx_1}{dt}\,,\, \frac{dx_2}{dt}\,,\cdots,\, \frac{dx_n}{dt} \right) \tag{4}$$

ονομάζεται *φασική ταχύτητα* και παριστά την ταχύτητα κίνησης στο σημείο $X(t)$ της φασικής καμπύλης. Η διεύθυνση της φασικής ταχύτητας είναι πάντα *εφαπτόμενη στη φασική καμπύλη* στο σημείο $X(t)$. Τέλος, για κάθε χρονική στιγμή t, η διανυσματική συνάρτηση $F(X,t)$ ορίζει ένα *διανυσματικό πεδίο* στον R^n, το οποίο, λόγω του δυναμικού συστήματος (2), είναι ένα *πεδίο ταχυτήτων*. Στην περίπτωση ενός *αυτόνομου* δυναμικού συστήματος της μορφής (3), το πεδίο ταχυτήτων $F(X)$ είναι *στατικό* (χρονικά ανεξάρτητο).

Ένα φυσικό ανάλογο θα διευκόλυνε την κατανόηση του προβλήματος: Φανταστείτε ότι ολόκληρος ο φασικός χώρος R^n καταλαμβάνεται από ένα «ρευστό» αποτελούμενο από ένα άπειρο πλήθος σημειακών «σωματιδίων». Σε κάθε χρονική στιγμή t_0 , ένα σωματίδιο του ρευστού διέρχεται από οποιοδήποτε σημείο $X_0 \equiv (x_{01}\ , x_{02}\ , \ldots\ , x_{0n}\ )$ του χώρου, με ταχύτητα $(dX/dt)_0=F(X_0,t_0)$. Για $t>t_0$, το σωματίδιο διαγράφει μια φασική καμπύλη στον R^n. Δύο σωματίδια που διέρχονται από το ίδιο σημείο X_0 σε διαφορετικές χρονικές στιγμές t_0 και t_0', θα κινούνται στο σημείο αυτό με διαφορετικές ταχύτητες, εκτός εάν $\partial F/\partial t=0 \Leftrightarrow F=F(X)$, δηλαδή, αν το δυναμικό σύστημα είναι *αυτόνομο* (άρα το πεδίο ταχυτήτων είναι *στατικό*). Σε μια τέτοια περίπτωση, *κάθε* σωματίδιο που διέρχεται οποιαδήποτε στιγμή από δεδομένο σημείο X_0 , θα κινείται στο σημείο αυτό *με την ίδια ταχύτητα* και θα διαγράφει, στη συνέχεια, *την ίδια φασική καμπύλη* στο φασικό χώρο. Τούτο σημαίνει, ειδικά, ότι, στην περίπτωση ενός *στατικού* πεδίου ταχυτήτων, *μία μοναδική φασική καμπύλη διέρχεται από κάθε σημείο του φασικού χώρου* R^n. Δηλαδή, *οι φασικές καμπύλες ενός αυτόνομου δυναμικού συστήματος δεν τέμνονται*. (Να σημειώσουμε, όμως, ότι, ακόμα και στη μη-αυτόνομη περίπτωση, όπου οι *φασικές* καμπύλες στον R^n είναι δυνατόν να τέμνονται, οι *ολοκληρωτικές* καμπύλες στον $R^n \times R$ εξακολουθούν να *μην* τέμνονται, αφού αντιπροσωπεύουν μοναδικές λύσεις του δυναμικού συστήματος.)

Θα επικεντρώσουμε, τώρα, την προσοχή μας στο αυτόνομο σύστημα (3), όπου το πεδίο ταχυτήτων είναι στατικό. Στην περίπτωση αυτή, οι (χρονικά σταθερές) φασικές καμπύλες αποτελούν τις *δυναμικές γραμμές* του πεδίου $F(X)$. Σε κάθε σημείο μιας δυναμικής γραμμής, η φασική ταχύτητα dX/dt είναι χρονικά σταθερή και εφαπτόμενη στη γραμμή αυτή. Επί πλέον, *μία μοναδική* δυναμική γραμμή διέρχεται από κάθε σημείο του φασικού χώρου, δηλαδή, *οι δυναμικές γραμμές του πεδίου $F(X)$ δεν τέμνονται*.

Αναλυτικά, οι δυναμικές γραμμές του πεδίου $F(X)$ βρίσκονται ως εξής: Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\,(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{5}$$

Τούτο γράφεται: $dx_i \,/\, f_i\,(x_k) = dt$ $(i=1, 2,..., n)$, όπου με x_k συμβολίζουμε το σύνολο των μεταβλητών $x_1,..., x_n$. Απαλείφοντας το dt, έχουμε ένα σύστημα $(n–1)$ εξισώσεων με n μεταβλητές $x_1,..., x_n$:

$$\frac{dx_1}{f_1\,(x_k)} = \frac{dx_2}{f_2\,(x_k)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n\,(x_k)} \tag{6}$$

Επιλύοντας το σύστημα (6), μπορούμε να εκφράσουμε $(n–1)$ εκ των μεταβλητών συναρτήσει της εναπομένουσας μεταβλητής. Η λύση του συστήματος μπορεί να εκφραστεί και στη μορφή ενός συνόλου $(n–1)$ ανεξάρτητων πρώτων ολοκληρωμάτων:

$$\Phi_j\,(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n\,) = C_j \quad (\,j=1, 2,..., n–1)\ .$$

Η λύση αυτή προσδιορίζει τις δυναμικές γραμμές του πεδίου $F(X)$. Τούτες είναι καμπύλες στον φασικό χώρο R^n: $(x_1,..., x_n)$, και παρατηρούμε ότι είναι *στατικές* (χρονικά σταθερές) στην περίπτωση ενός αυτόνομου συστήματος. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι δυναμικές γραμμές του πεδίου $F(X)$ δεν τέμνονται πουθενά στον R^n.

Τέλος, για την πλήρη επίλυση του αυτόνομου συστήματος (5), απαιτείται και ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος αυτού, το οποίο να εμπεριέχει απευθείας τη μεταβλητή t :

$$\Phi_n (x_1 , x_2 , ... , x_n , t) = C_n \ .$$

Ο συνδυασμός των n πρώτων ολοκληρωμάτων Φ_1 , Φ_2 , ... , Φ_n , μας επιτρέπει να βρούμε τις συναρτήσεις $x_i (t)$ $(i=1, 2,..., n)$ που επαληθεύουν το σύστημα (5).

Παράδειγμα: Θεωρούμε μια απλουστευμένη γραφή της εξίσωσης που περιγράφει αρμονική ταλάντωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \ .$$

Αυτή γράφεται στη μορφή αυτόνομου συστήματος ΣΔΕ πρώτης τάξεως:

$$\frac{dx}{dt} = y \ , \quad \frac{dy}{dt} = -x \qquad (a)$$

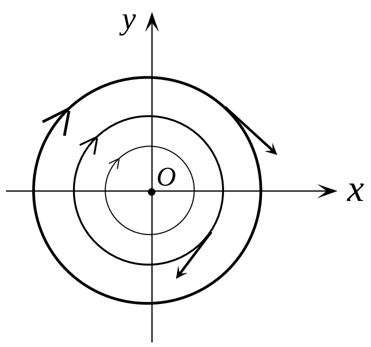
(Εδώ, $x_1 = x$, $x_2 = y$.) Απαλείφοντας το dt, έχουμε:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \qquad (b)$$

Η λύση της εξίσωσης (b) μπορεί να εκφραστεί στη μορφή ενός πρώτου ολοκληρώματος, ως εξής:

$$xdx + ydy = 0 \ \Rightarrow \ d\,(x^2+y^2) = 0 \ \Rightarrow \ \Phi_1 (x, y) \equiv x^2+y^2 = C_1^2 \ .$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα Φ_1 προσδιορίζει τις δυναμικές γραμμές του πεδίου ταχυτήτων $(dx/dt,\ dy/dt) \equiv (y, -x)$. Τούτες είναι κύκλοι με κέντρο το σημείο O : (0,0), και προφανώς δεν τέμνονται μεταξύ τους.



Για C_1=0, η δυναμική γραμμή είναι απλά ένα μοναδικό σημείο O : (0,0), το οποίο καλείται *σημείο ισορροπίας* του συστήματος. Ο λόγος είναι ότι, σε κάθε χρονική στιγμή t, η φασική ταχύτητα στο σημείο αυτό είναι μηδέν: $(dx/dt,\ dy/dt) \equiv (y, -x) \equiv (0,0)$.

Τώρα, για την πλήρη επίλυση του αυτόνομου συστήματος (a), χρειαζόμαστε και ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος αυτού, το οποίο να εξαρτάται απευθείας από το t. Όπως έχουμε δείξει (βλ. Παράδειγμα 2 στην Παρ. 4.1), το πρώτο ολοκλήρωμα αυτό είναι:

$$\Phi_2(x, y, t) \equiv t + \arctan(y/x) = C_2 \ .$$

Από τα Φ_1 και Φ_2 βρίσκουμε τη λύση του συστήματος (a):

$$x = C_1 \cos(t - C_2) \ , \qquad y = -\, C_1 \sin(t - C_2) \ .$$

Οι σχέσεις αυτές περιγράφουν τις *ολοκληρωτικές καμπύλες* του συστήματος (a) στο χώρο $R^2 \times R$: (x, y, t). Απαλείφοντας το χρόνο t, βρίσκουμε τις *φασικές καμπύλες* του συστήματος, οι οποίες αποτελούν τις δυναμικές γραμμές του πεδίου ταχυτήτων $F(x, y) \equiv (y, -x)$ και είναι οι προβολές των ολοκληρωτικών καμπύλων στον φασικό χώρο R^2: (x, y). Οι καμπύλες αυτές είναι ακριβώς οι κύκλοι $x^2 + y^2 = C_1^2$, και αντιστοιχούν στις λύσεις της εξίσωσης (b).

Προσέξτε ότι το πεδίο ταχυτήτων $(dx/dt, dy/dt) \equiv (y, -x)$, που ορίζεται από το δυναμικό σύστημα, προσδίδει μια έννοια κατεύθυνσης στις φασικές καμπύλες για αυξανόμενο t. Αναλυτικά: Έστω $dt > 0$. Τότε, $dx > 0$ για $y > 0$ και $dx < 0$ για $y < 0$, ενώ $dy > 0$ για $x < 0$ και $dy < 0$ για $x > 0$. Δηλαδή, το x αυξάνει (ελαττώνεται) όταν το y είναι θετικό (αρνητικό), ενώ το y αυξάνει (ελαττώνεται) όταν το x είναι αρνητικό (θετικό). Τούτο σημαίνει ότι οι καμπύλες διαγράφονται *δεξιόστροφα* για αυξανόμενο t.

5.2 Γεωμετρική Σημασία του Πρώτου Ολοκληρώματος

Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα n εξισώσεων:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

Απαλείφοντας το dt, καταλήγουμε σε σύστημα (n–1) εξισώσεων:

$$\frac{dx_1}{f_1(x_k)} = \frac{dx_2}{f_2(x_k)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x_k)} \tag{2}$$

Κάθε πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος (2) είναι αυτόματα και πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος (1) (γιατί;). Έστω ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος (2), της μορφής:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = C \tag{3}$$

Η σχέση (3) ορίζει μια *επιφάνεια* (n–1) *διαστάσεων* στον φασικό χώρο R^n. Για την ακρίβεια, έχουμε μια άπειρη οικογένεια από τέτοιες επιφάνειες, κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχεί σε μια δεδομένη τιμή της σταθεράς C. Για δοσμένες αρχικές συνθήκες $x_i(t_0) = x_{0i}$, και λαμβάνοντας υπόψη ότι η τιμή της συνάρτησης Φ είναι σταθερή (ίδια για όλες τις τιμές τού t), υπολογίζουμε την αντίστοιχη τιμή της σταθεράς C ως εξής:

$$\Phi\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) = C\,, \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad (\text{θέτοντας } t=t_0)$$

$$\Phi\big(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\big) = C \quad \Rightarrow \quad C = \Phi(x_{01}, \ldots, x_{0n})\,.$$

Έστω, τώρα, μια λύση $x_i=x_i(t)$ $(i=1,...,n)$ [σε διανυσματική μορφή, $X=X(t)$] του συστήματος (1), για δοσμένες αρχικές συνθήκες $x_i(t_0)=x_{0i}$ [διανυσματικά, $X(t_0)=X_0$]. Τα σημεία $X(t)\in R^n$ αποτελούν μια φασική καμπύλη στον φασικό χώρο R^n.

Πρόταση: Αν η φασική καμπύλη $X(t)$ έχει ένα κοινό σημείο με την $(n-1)$-διάστατη επιφάνεια (3): $\Phi(X)=C$, τότε η καμπύλη αυτή κείται εξ ολοκλήρου πάνω στην επιφάνεια.

Απόδειξη: Έστω μια φασική καμπύλη που αντιστοιχεί στη λύση $X=X(t)$ του συστήματος (1), με αρχική συνθήκη $X(t_0)=X_0$. Επί πλέον, έστω ότι $\Phi(X_0)=C$. Δηλαδή, το X_0 είναι κοινό σημείο της φασικής καμπύλης και της επιφάνειας. Δοθέντος ότι η συνάρτηση $\Phi(X)$ διατηρεί σταθερή τιμή για όλα τα σημεία $X(t)$ μιας φασικής καμπύλης, έχουμε ότι: $\Phi\big(X(t)\big)=\Phi\big(X(t_0)\big)=\Phi(X_0)=C$, πράγμα που σημαίνει ότι όλα τα σημεία της φασικής καμπύλης $X(t)$ κείνται πάνω στην επιφάνεια $\Phi(X)=C$. Η μοναδικότητα της λύσης του συστήματος, για δοσμένη αρχική συνθήκη, μας εξασφαλίζει ότι είναι αδύνατο να υπάρχει άλλη φασική καμπύλη που επίσης να διέρχεται από το σημείο X_0 της επιφάνειας. Γιατί, μια τέτοια καμπύλη θα τεμνόταν με την $X(t)$ στο σημείο X_0 , πράγμα που δεν μπορεί να συμβεί στην περίπτωση ενός *αυτόνομου* συστήματος. Συμπέρασμα: Μία μοναδική φασική καμπύλη διέρχεται από το σημείο X_0 της επιφάνειας $\Phi(X)=C$, και κείται εξ ολοκλήρου πάνω στην επιφάνεια αυτή.

Τώρα, αν έχουμε $(n-1)$ ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος (2), της μορφής: $\Phi_i(X)=C_i$ $(i=1, 2,..., n-1)$, τούτα ορίζουν (για δοσμένα C_i) ένα σύνολο από επιφάνειες $(n-1)$ διαστάσεων στον R^n. Η *τομή* αυτών των επιφανειών αποτελεί ακριβώς τη φασική καμπύλη του συστήματος, η οποία αντιστοιχεί στις δεδομένες αρχικές συνθήκες. [Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, οι συνθήκες αυτές καθορίζουν και τις τιμές των σταθερών C_i : $C_i = \Phi_i(X_0)$.] Τούτο είναι λογικό, δεδομένου ότι η φασική καμπύλη θα πρέπει να ανήκει από κοινού σε όλες τις επιφάνειες, άρα και στην τομή τους. Η τομή αυτή (που είναι μονοδιάστατος γεωμετρικός τόπος σημείων) είναι ακριβώς η ζητούμενη φασική καμπύλη του συστήματος.

5.3 Διανυσματικά Πεδία

Πριν προχωρήσουμε, εισάγουμε μερικούς νέους συμβολισμούς:

1. Τόσο για τις συντεταγμένες στο χώρο R^n, όσο και για τις συνιστώσες διανυσμάτων στον R^n, θα χρησιμοποιούμε *άνω δείκτες* (superscripts). Έτσι, θα συμβολίζουμε με $(x^1, x^2,..., x^n) \equiv (x^k)$ τις συντεταγμένες ενός σημείου του χώρου, και με $(V^1, V^2,..., V^n)$ τις συνιστώσες ενός διανύσματος $\vec{V}$.

2. Θα χρησιμοποιούμε την *αθροιστική σύμβαση*, σύμφωνα με την οποία, αν μία έκφραση περιέχει το ίδιο σύμβολο, έστω i, ταυτόχρονα ως άνω (superscript) *και* ως κάτω (subscript) δείκτη, τότε η έκφραση αυτή *αθροίζεται* για $i=1$ έως n. Για παράδειγμα,

$$A^i B_i \equiv \sum_{i=1}^{n} A^i B_i = A^1 B_1 + A^2 B_2 + \cdots + A^n B_n \ .$$

3. Ειδικά, η μερική παράγωγος ως προς το x^i,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \partial_i$$

θεωρείται ως *κάτω* δείκτης. Έτσι, για παράδειγμα,

$$\sum_{i=1}^{n} V^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} V^i \partial_i \Phi \equiv V^i \partial_i \Phi = V^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \ .$$

Σημειώνουμε ότι το *όνομα* του επαναλαμβανόμενου (άνω και κάτω) δείκτη δεν έχει σημασία και μπορεί να αλλάξει χωρίς να επηρεαστεί η έκφραση. Π.χ.,

$$A^i B_i = A^j B_j = A^k B_k = \cdots \ , \quad V^i \, \partial\Phi/\partial x^i = V^j \, \partial\Phi/\partial x^j = \cdots \ , \quad \text{κλπ.}$$

Έστω, τώρα, $\{\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_n\} \equiv \{\hat{e}_k\}$ μια βάση μοναδιαίων διανυσμάτων στον R^n. Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{V}$ στο χώρο αυτό:

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} V^i (x^1, \cdots, x^n) \, \hat{e}_i \equiv V^i (x^k) \, \hat{e}_i \tag{1}$$

Σε μορφή συνιστωσών, $\vec{V} \equiv \left(V^1(x^k), \cdots, V^n(x^k) \right)$.

Θεωρούμε, παράλληλα, και το αυτόνομο σύστημα ΣΔΕ:

$$\frac{d}{dt} x^i(t) = V^i(x^k) \ , \quad x^i(0) = x_0^{\,i} \tag{2}$$

(Στην αρχική συνθήκη, θέσαμε t_0=0.) Παρατηρούμε ότι οι φασικές καμπύλες $x^i(t)$ (i=1,..., n) που προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος (2), αποτελούν τις *δυναμικές γραμμές* του πεδίου $\vec{V}$ (το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως πεδίο ταχυτήτων, αν η μεταβλητή t παριστά το χρόνο). Σε κάθε σημείο μιας δυναμικής γραμμής, το πεδίο $\vec{V}$ είναι *εφαπτόμενο* στη γραμμή. Με άλλα λόγια, σε κάθε σημείο του φασικού χώρου R^n, το πεδίο $\vec{V}$ είναι εφαπτόμενο στη (μία και μοναδική) δυναμική γραμμή που διέρχεται από το σημείο αυτό.

Αναζητούμε, τώρα, συναρτήσεις $\Phi(x^k)$ που *διατηρούν σταθερές τιμές κατά μήκος των δυναμικών γραμμών του πεδίου* $\vec{V}$. Δηλαδή, $\Phi(x^k)=C$ για λύσεις $x^i=x^i(t)$ του συστήματος (2). Προφανώς, κάθε τέτοια συνάρτηση είναι ένα *πρώτο ολοκλήρωμα* του συστήματος (2). Έστω $\Phi(x^k)$ μια τέτοια συνάρτηση. Τότε, $\Phi(x^k)=C \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\Phi(x^k)=0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial\Phi(x^k)}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}=0 \quad (\textit{άθροισμα ως προς } i\,!\,)\,.$$

Αντικαθιστώντας τα dx^i/dt από το σύστημα (2), έχουμε:

$$V^i(x^k)\,\frac{\partial\Phi(x^k)}{\partial x^i}=0 \tag{3}$$

(*Προσοχή:* Το x^k συμβολίζει το *σύνολο* των μεταβλητών $x^1,\ldots,x^n$ και *δεν* λογίζεται ως μεμονωμένος δείκτης. Έτσι, *δεν* αθροίζουμε ως προς k, παρά μόνο ως προς i, αφού αυτό μόνο εμφανίζεται ταυτόχρονα ως άνω και ως κάτω δείκτης!) Με άλλα λόγια, αν $\Phi(x^k)=C$ είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος (2), τότε η συνάρτηση $z=\Phi(x^k)$ είναι λύση της γραμμικής ομογενούς ΜΔΕ:

$$V^i(x^k)\,\frac{\partial z}{\partial x^i}=0 \tag{4}$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε το πεδίο $\vec{V}\equiv(y,-x)$ στον R^2: $(x,\ y)$. Εδώ, $(x^1,\ x^2)\equiv(x,\ y)$ και $(V^1,\ V^2)\equiv(y,\ -x)$. Οι δυναμικές γραμμές προσδιορίζονται από το σύστημα:

$$dx/dt=y\,,\quad dy/dt=-x \qquad (a)$$

Αναζητούμε ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος, της μορφής: $\Phi(x,\ y)=C$. Η συνάρτηση $z=\Phi(x,y)$ θα είναι λύση της ΜΔΕ (4):

$$V^1\frac{\partial z}{\partial x^1}+V^2\frac{\partial z}{\partial x^2}\equiv y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (b)$$

Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό σύστημα:

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{0} \qquad (c)$$

Αναζητούμε δύο ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος (c):

$$dz=0 \;\Rightarrow\; z=C_1\;,$$

$$xdx+ydy=0 \;\Rightarrow\; d\,(x^2+y^2)=0 \;\Rightarrow\; x^2+y^2=C_2\;.$$

Η γενική λύση τής ΜΔΕ (b), είναι:

$$F(C_1\,,C_2)=0 \quad (\textit{αυθαίρετο } F) \;\Rightarrow\; F(z\,,x^2+y^2)=0 \;\Rightarrow\; z=G(x^2+y^2) \quad (\textit{αυθαίρετο } G)\,.$$

Παίρνοντας, ειδικά, $z=x^2+y^2$, και θέτοντας $z=\Phi(x,y)$, βρίσκουμε το ζητούμενο πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος (a) που προσδιορίζει τις δυναμικές γραμμές του πεδίου $\vec{V}\equiv(y,-x)$:

$$\Phi\,(x, y) \equiv x^2+y^2 = C \quad .$$

Παρατηρούμε ότι $d\Phi/dt=0$ όταν οι συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ είναι λύσεις του συστήματος (a) (δείξτε το!). Τούτο σημαίνει ότι η συνάρτηση $\Phi(x, y)$ διατηρεί σταθερή τιμή κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής του πεδίου $\vec{V}$.

5.4 Διαφορικοί Τελεστές και Παράγωγος Lie

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{V}$ στον R^n :

$$\vec{V} = V^{\,i}(x^k)\,\hat{e}_i \equiv \left(V^1(x^k), \cdots, V^n(x^k)\right) \tag{1}$$

Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου προσδιορίζονται από το σύστημα:

$$\frac{dx^i}{dt} = V^{\,i}(x^k) \ , \quad x^i(0) = x_0{}^i \tag{2}$$

Δοθείσης μιας συνάρτησης $f\,(x^1,..., x^n) \equiv f\,(x^k)$ στον R^n, τίθεται το εξής ερώτημα: Πώς μεταβάλλεται η τιμή τής f κατά μήκος των δυναμικών γραμμών του πεδίου (1); Με άλλα λόγια, πώς μεταβάλλεται το $f(x^k)$ όταν τα $x^i\,(t)$ είναι λύσεις του συστήματος (2);

Έστω μια λύση $x^i\,(t)$ (i=1,..., n) του συστήματος (2). Η λύση αυτή αντιστοιχεί σε μια δυναμική γραμμή του πεδίου $\vec{V}$. Κατά μήκος της γραμμής αυτής, η συνάρτηση f παίρνει τις τιμές $f\big(x^k(t)\big)$. Ο ρυθμός μεταβολής τής $f(x^k)$ κατά μήκος της γραμμής, δίνεται από την παράγωγο:

$$\frac{d}{dt}\,f\,(x^k) = \frac{\partial f\,(x^k)}{\partial x^i}\,\frac{dx^i}{dt} \quad .$$

Αντικαθιστώντας τα dx^i/dt από το σύστημα (2), έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\,f\,(x^k) = V^{\,i}(x^k)\,\frac{\partial f\,(x^k)}{\partial x^i} \tag{3}$$

(άθροισμα *μόνο* ως προς i !). Η σχέση (3) γράφεται:

$$\frac{d}{dt}\,f\,(x^k) = \left(V^{\,i}(x^k)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\right) f\,(x^k) = \left(V^{\,i}(x^k)\,\partial_i\right) f\,(x^k) \tag{3΄}$$

Σύμφωνα με την (3΄), ο ρυθμός μεταβολής τής $f\,(x^k)$ κατά μήκος των δυναμικών γραμμών του πεδίου (1), προκύπτει από τη δράση του *διαφορικού τελεστή*:

$$V^{\,i}(x^k)\,\frac{\partial}{\partial x^i} = V^{\,i}(x^k)\,\partial_i$$

πάνω στη συνάρτηση $f(x^k)$.

Παρατηρούμε μια αμφιμονοσήμαντη σχέση ανάμεσα σε διανυσματικά πεδία και διαφορικούς τελεστές:

$$\vec{V} = V^i(x^k)\,\hat{e}_i \quad \leftrightarrow \quad V^i(x^k)\,\frac{\partial}{\partial x^i} = V^i(x^k)\,\partial_i \;.$$

Επί πλέον, τα διανύσματα βάσης $\hat{e}_i$ και οι μερικές παράγωγοι ∂_i υπακούουν σε παρόμοιους νόμους μετασχηματισμού κάτω από αλλαγές του συστήματος συντεταγμένων: $\{x^k\}\to\{y^k\}$, $\{\hat{e}_k\}\to\{\hat{h}_k\}$. Αναλυτικά:

$$\hat{h}_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\,\hat{e}_i \;, \qquad \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\,\frac{\partial}{\partial x^i} \;.$$

Οι παρατηρήσεις αυτές μας οδηγούν σε μια νέα αντίληψη της έννοιας ενός διανύσματος στον R^n: Δεν κάνουμε διάκριση ανάμεσα στο πεδίο $\vec{V}$ και τον αντίστοιχο διαφορικό τελεστή $V^i(x^k)\partial_i$, αλλά θεωρούμε τις δύο έννοιες «ταυτόσημες»! Έτσι, *ορίζουμε* το διάνυσμα $\vec{V}$ ως τον διαφορικό τελεστή:

$$\vec{V} \equiv V^i(x^k)\,\frac{\partial}{\partial x^i} = V^i(x^k)\,\partial_i \tag{4}$$

Η σχέση (3΄), τότε, παίρνει τη νέα μορφή:

$$\frac{d}{dt}\,f(x^k) = \vec{V} f(x^k) \tag{5}$$

Στην περίπτωση, τώρα, που μια συνάρτηση $\Phi(x^k)$ είναι ένα *πρώτο ολοκλήρωμα* του συστήματος (2), η τιμή της μένει σταθερή κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής του πεδίου $\vec{V}$, οπότε:

$$\Phi(x^k) = C \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\Phi(x^k) = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{V}\,\Phi(x^k) = V^i(x^k)\,\frac{\partial \Phi(x^k)}{\partial x^i} = 0 \tag{6}$$

Καταλήξαμε, έτσι, και πάλι στη γραμμική ομογενή ΜΔΕ που βρήκαμε στην Παρ. 5.3.

Ορισμός: Η παράγωγος μιας συνάρτησης $f(x^k)$ κατά μήκος των δυναμικών γραμμών ενός πεδίου $\vec{V}$ στον R^n, ονομάζεται *παράγωγος Lie* της $f(x^k)$ ως προς το $\vec{V}$, και συμβολίζεται: $L_{\vec{V}}\, f(x^k)$.

Σύμφωνα με τις (4) και (5), μπορούμε τώρα να γράψουμε:

$$\frac{d}{dt}\,f(x^k) \equiv L_{\vec{V}}\, f(x^k) = \vec{V} f(x^k) = V^i(x^k)\,\partial_i\, f(x^k) \tag{7}$$

Ειδικά, σύμφωνα με την (6), η παράγωγος Lie ως προς $\vec{V}$, ενός πρώτου ολοκληρώματος $\Phi(x^k)$ του συστήματος (2), είναι μηδέν: $L_{\vec{V}}\, \Phi(x^k) = 0$.

Σχόλιο: Μπορεί να φαίνεται πλεονασμός το ότι εισάγαμε το σύμβολο $L_{\vec{V}}$, αφού μοιάζει να κάνει την ίδια δουλειά με τον τελεστή (4). Όμως, αυτή η σύμπτωση ισχύει μόνο για την απλή περίπτωση των βαθμωτών συναρτήσεων της μορφής $f(x^k)$! Η παράγωγος Lie είναι μια πολύ γενικότερη έννοια της Διαφορικής Γεωμετρίας, και η έκφρασή της ποικίλλει ανάλογα με το είδος της συνάρτησης πάνω στην οποία δρα (βαθμωτή, διανυσματική ή, γενικά, τανυστική). Ο γενικός ορισμός της παραγώγου Lie είναι αντικείμενο πολύ πιο προχωρημένων μαθηματικών συγγραμμάτων από το παρόν, και ως εκ τούτου δεν θα δοθεί εδώ.

Άσκηση: Παίρνοντας την ειδική περίπτωση: $f(x^k)=x^j$ (για δοσμένο j), δείξτε ότι:

$$L_{\vec{V}}\, x^j = V^j(x^k) \ .$$

[*Υπόδειξη:* Προσέξτε ότι $\partial x^j/\partial x^i = 1$ (για $i=j$) ή 0 (για $i\neq j$).]

5.5 Εκθετική Λύση Αυτόνομου Συστήματος

Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα:

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = V^i\left(x^1(t), \cdots, x^n(t)\right) \equiv V^i\left(x^k(t)\right) \ , \quad x^i(0) = x_0^{\,i} \tag{1}$$

($i=1,\dots, n$). Η λύση $x^i(t)$ του συστήματος θα εξαρτάται από n παραμέτρους οι οποίες, με τη σειρά τους, εκφράζονται συναρτήσει των αρχικών τιμών $x_0^{\,i}$. Η λύση αυτή, λοιπόν, θα δίνεται από συναρτήσεις της μορφής:

$$x^i = \Phi^i(t, x_0^{\,1}, \dots, x_0^{\,n}) \equiv \Phi^i(t, x_0^{\,k}) \tag{2}$$

όπου, λόγω των αρχικών συνθηκών του προβλήματος,

$$\Phi^i(0, x_0^{\,k}) = x_0^{\,i} \tag{3}$$

Σαν πρώτο βήμα για την αναλυτική έκφραση της λύσης του συστήματος (1), ορίζουμε τώρα τον διαφορικό τελεστή:

$$D_V = V^i(x_0^{\,k})\, \frac{\partial}{\partial x_0^{\,i}} \tag{4}$$

Ο τελεστής αυτός δρα σε συναρτήσεις $f(x_0^{\,k})$, ως εξής:

$$D_V\, f(x_0^{\,k}) = V^i(x_0^{\,k})\, \frac{\partial f(x_0^{\,k})}{\partial x_0^{\,i}}$$

(άθροισμα *μόνο* ως προς i !). Ορίζουμε, επίσης, τον *εκθετικό τελεστή*:

$$e^{tD_V} \equiv \exp(t\,D_V) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}(t\,D_V)^l = 1 + t\,D_V + \frac{t^2}{2!}D_V{}^2 + \frac{t^3}{3!}D_V{}^3 + \cdots \tag{5}$$

όπου $D_V{}^2 f \equiv D_V(D_V f\,)$, κλπ. Ειδικά, για t=0, έχουμε τον μοναδιαίο τελεστή e^0=1.

Μπορούμε, τώρα, να γράψουμε την αναλυτική έκφραση της λύσης (2) του συστήματος (1). Όπως αποδεικνύεται, η λύση αυτή μπορεί να γραφεί στη μορφή δυναμοσειράς, ως εξής:

$$x^i = \Phi^i(t, x_0{}^k) = e^{tD_V}\, x_0{}^i = \left\{ \exp\left(t\,V^j(x_0{}^k) \frac{\partial}{\partial x_0{}^j} \right) \right\} x_0{}^i \tag{6}$$

(εδώ, άθροισμα ως προς j). Αναλυτικά,

$$x^i = \left[1 + t\,D_V + (t^2/2!)\,D_V{}^2 + (t^3/3!)\,D_V{}^3 + \cdots \right] x_0{}^i$$

$$= x_0{}^i + t\,D_V\, x_0{}^i + (t^2/2)\,D_V(D_V\, x_0{}^i) + \cdots$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\partial x_0{}^i / \partial x_0{}^j = 1$ (αν i=j) ή 0 (αν i≠j), έχουμε:

$$D_V\, x_0{}^i = (V^j\, \partial / \partial x_0{}^j)\, x_0{}^i = V^j\, \partial x_0{}^i / \partial x_0{}^j = V^i(x_0{}^k)\,.$$

Έτσι, τελικά,

$$x^i = x_0{}^i + t\,V^i(x_0{}^k) + \frac{t^2}{2} V^j(x_0{}^k) \frac{\partial V^i(x_0{}^k)}{\partial x_0{}^j} + \cdots \tag{7}$$

Ας αλλάξουμε, τώρα, λίγο τους συμβολισμούς μας στο σύστημα (1): Στη θέση των $x_0{}^i$ γράφουμε απλώς x^i, ενώ στη θέση των $x^i(t)$ γράφουμε $\bar{x}^i(t)$. Έχουμε, δηλαδή, ένα σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα $\bar{x}^i(t)$ και αρχικές τιμές τα x^i:

$$\frac{d\bar{x}^i(t)}{dt} = V^i\left(\bar{x}^k(t) \right) \,, \quad \bar{x}^i(0) = x^i \tag{8}$$

Η λύση (6), τότε, γράφεται:

$$\bar{x}^i = \Phi^i(t, x^k) = \left\{ \exp\left(t\,V^j(x^k) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right\} x^i \tag{9}$$

Προσέξτε ότι, τώρα, $\Phi^i(0, x^k) = x^i$, βάσει της αρχικής συνθήκης.

Η σχέση (9) περιγράφει μια παραμετρική καμπύλη στον R^n, η οποία ξεκινάει από το σημείο (x^1,..., x^n) για t=0 και διέρχεται από το σημείο $\left(\bar{x}^1(t), \cdots, \bar{x}^n(t) \right)$ για t >0. Στη σχέση αυτή μπορούμε να δώσουμε την εξής γεωμετρική ερμηνεία: Ο τελεστής $\exp\left(tV^j(x^k)\partial/\partial x^j\right)$ *ωθεί* το σημείο $(x^1,..., x^n)$ της καμπύλης στο σημείο $\left(\bar{x}^1(t),\cdots,\bar{x}^n(t)\right)$.

Τώρα, σύμφωνα με όσα εκτέθηκαν στην Παρ. 5.4 περί της ισοδυναμίας διαφορικών τελεστών και διανυσματικών πεδίων, ο τελεστής $D_V = V^i(x^k)\partial/\partial x^i$ μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα διανυσματικό πεδίο:

$$\vec{V} = V^i(x^k)\,\frac{\partial}{\partial x^i} = V^i(x^k)\,\partial_i \tag{10}$$

Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου (10) περιγράφονται από τις καμπύλες (9), σε κάθε σημείο των οποίων το πεδίο είναι εφαπτόμενο. Οι γραμμές αυτές αποτελούν τις φασικές καμπύλες του αυτόνομου συστήματος (8). Στη διανυσματική «γλώσσα», γράφουμε:

$$\bar{x}^i = \Phi^i(t,x^k) = e^{t\vec{V}}x^i \tag{11}$$

Αν δώσουμε στη μεταβλητή t τη φυσική ερμηνεία του χρόνου, τότε το πεδίο (10) είναι *στατικό*. Πράγματι, τα V^i δεν εξαρτώνται *απευθείας* από το χρόνο, αλλά έμμεσα, μέσω των x^k. Έτσι, για κάθε δοσμένη τιμή των x^k (δηλαδή, σε κάθε σημείο του φασικού χώρου R^n) το πεδίο μένει χρονικά σταθερό (η χρονική μεταβολή του οφείλεται μόνο στη χρονικά συντελούμενη μετατόπιση κατά μήκος μιας φασικής καμπύλης, πράγμα που συνεπάγεται τη μεταβολή των ίδιων των συντεταγμένων x^k στο φασικό χώρο).

Συμπεραίνουμε ότι οι δυναμικές γραμμές του πεδίου (10) είναι στατικές (χρονικά σταθερές) και, επί πλέον, δεν τέμνονται. Πράγματι, αν τεμνόντουσαν, τότε θα είχαμε δύο ή περισσότερα εφαπτόμενα διανύσματα στο ίδιο σημείο του χώρου. Τούτο θα σήμαινε είτε ότι το διανυσματικό πεδίο μεταβάλλει κατεύθυνση μέσα στο χρόνο (δηλαδή, δεν είναι στατικό), είτε ότι το στατικό πεδίο δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο σε κάθε σημείο του χώρου.

5.6 Διανυσματικά Πεδία ως Γεννήτορες Μετασχηματισμών

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο:

$$\vec{V} = V^i(x^1,\cdots,x^n)\,\frac{\partial}{\partial x^i} \equiv V^i(x^k)\,\partial_i \tag{1}$$

Η δυναμική γραμμή $\bar{x}^i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ που ξεκινά από το σημείο $(x^1,..., x^n)$ του R^n για t=0, δίνεται από την έκφραση:

$$\bar{x}^i = \Phi^i(t,x^k) = e^{t\vec{V}}x^i = \left\{\exp\left(t\,V^j(x^k)\,\partial_j\right)\right\}x^i \tag{2}$$

Λέμε ότι ο τελεστής $e^{t\vec{V}}$ ωθεί το σημείο $(x^1,..., x^n)$ του R^n στο σημείο $\left(\bar{x}^1(t),\cdots,\bar{x}^n(t)\right)$, κατά μήκος της (μοναδικής) δυναμικής γραμμής που διέρχεται από το $(x^1,..., x^n)$.

Έστω, τώρα, $F(x^1,..., x^n) \equiv F(x^k)$, μία συνάρτηση στον R^n. Η αντικατάσταση: $x^i \to \bar{x}^i(t)$ (i=1,..., n) οδηγεί σε μια νέα συνάρτηση F_t, τέτοια ώστε:

$$F_t(x^k) = F\left(\bar{x}^k(t)\right), \quad \text{με} \quad F_0(x^k) = F(x^k) \quad \text{για} \quad t=0$$

[όπου λάβαμε υπόψη ότι $\bar{x}^i(0) = x^i$, βάσει της αρχικής συνθήκης του προβλήματος]. Λέμε ότι το πεδίο (1) είναι *γεννήτορας του μετασχηματισμού*:

$$x^i \to \bar{x}^i(t) \;\; (i=1,\cdots,n) \;\; , \quad F(x^k) \to F_t(x^k) = F\left(\bar{x}^k(t)\right) \tag{3}$$

Παράδειγμα: Στο χώρο $R^2 : (x^1, x^2) \equiv (x, y)$, θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο:

$$\vec{V} = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \qquad (\alpha, \beta = \sigma\tau\alpha\theta.) .$$

Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου δίνονται από το σύστημα:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \alpha \bar{x} \;, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \beta \;, \quad \text{με} \quad (\bar{x}, \bar{y}) \equiv (x, y) \quad \text{για} \quad t = 0 \;.$$

Η απευθείας επίλυση του συστήματος είναι εύκολη:

$$\bar{x}(t) = e^{\alpha t} x \;\; , \quad \bar{y}(t) = y + \beta t \;.$$

Εναλλακτικά (αλλά, εν προκειμένω, δυσκολότερα) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον γενικό τύπο (2). Έχουμε:

$$\bar{x}(t) = e^{t\vec{V}} x \;\; , \quad \bar{y}(t) = e^{t\vec{V}} y \quad \text{όπου} \quad e^{t\vec{V}} = 1 + t\vec{V} + \frac{t^2}{2!}\vec{V}\vec{V} + \frac{t^3}{3!}\vec{V}\vec{V}\vec{V} + \cdots$$

Παρατηρώντας ότι

$$\vec{V}x = \alpha x \;, \quad \vec{V}\vec{V}x \equiv \vec{V}(\vec{V}x) = \alpha\vec{V}x = \alpha^2 x \;, \quad \vec{V}\vec{V}\vec{V}x \equiv \vec{V}\left(\vec{V}(\vec{V}x)\right) = \alpha^3 x \;, \cdots ,$$
$$\vec{V}y = \beta \;, \quad \vec{V}\vec{V}y \equiv \vec{V}(\vec{V}y) = 0 \;, \quad \vec{V}\vec{V}\vec{V}y \equiv \vec{V}\left(\vec{V}(\vec{V}y)\right) = 0 \;, \cdots ,$$

έχουμε:

$$\bar{x}(t) = \left[1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!} + \cdots\right] x = e^{\alpha t} x \;, \quad \bar{y}(t) = y + \beta t \;,$$

όπως πριν. Ο μετασχηματισμός (3) μιας συνάρτησης $F(x,y)$ στον R^2, γράφεται:

$$F(x,y) \to F_t(x,y) = F\left(\bar{x}(t),\; \bar{y}(t)\right) = F\left(e^{\alpha t}x,\;\; y + \beta t\right) .$$

Γενικά, η μεταβλητή t στην εξίσωση (2) καλείται *παράμετρος του μετασχηματισμού* (3). Για *απειροστό* t, μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση:

$$e^{t\vec{V}} \simeq 1 + t\vec{V} .$$

Τότε, η σχέση (2) δίνει:

$$\overline{x}^{\,i}(t) \simeq (1+t\vec{V})\,x^i = \left(1 + t\,V^j(x^k)\frac{\partial}{\partial x^j}\right) x^i \;\Rightarrow$$

$$\overline{x}^{\,i}(t) \simeq x^i + t\,V^i(x^k) \qquad (4)$$

Έτσι, στο προηγούμενο παράδειγμα,

$$\overline{x}(t) \simeq x + t\cdot(\alpha x) = (1+\alpha t)\,x \ , \quad \overline{y}(t) \simeq y + t\cdot\beta = y + \beta t .$$

Άσκηση: Δείξτε ότι, σε απειροστή μορφή,

$$F\left(\overline{x}^{\,k}(t)\right) \simeq F(x^k) + t\vec{V}F(x^k) \ .$$

[*Υπόδειξη:* Για απειροστές μεταβολές dx^k των x^k, η μεταβολή της τιμής τής F ισούται, προσεγγιστικά, με το διαφορικό τής F: $dF = (\partial F/\partial x^i)\,dx^i$. Από την (4), $dx^i = tV^i(x^k)$.]

5.7 Γεωμετρική Σημασία των ΜΔΕ Πρώτης Τάξεως

Στο χώρο R^3: $(x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$, θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο (εδώ, εκφρασμένο στη συνήθη διανυσματική μορφή):

$$\vec{V} = P(x,y,z)\,\hat{u}_x + Q(x,y,z)\,\hat{u}_y + R(x,y,z)\,\hat{u}_z \equiv \big(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\big) \qquad (1)$$

(όπου $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$, $\hat{u}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x, y, z, αντίστοιχα). Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου, σε κάθε σημείο των οποίων το $\vec{V}$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα, δίνονται από τις λύσεις του αυτόνομου συστήματος ΣΔΕ πρώτης τάξεως:

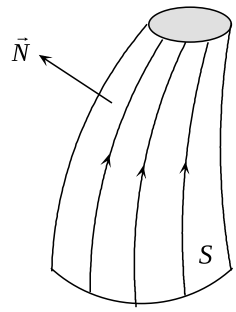
$$\frac{dx}{dt} = P(x,y,z) \ , \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y,z) \ , \quad \frac{dz}{dt} = R(x,y,z) \qquad (2)$$

Απαλείφοντας το dt, παίρνουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων για τις ζητούμενες δυναμικές γραμμές:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \qquad (3)$$

Το σύστημα (2) περιγράφει τις καμπύλες παραμετρικά: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. Το σύστημα (3), από την άλλη μεριά, περιγράφει μια καμπύλη ως γεωμετρικό τόπο σημείων του R^3. Τα σημεία αυτά αποτελούν την εικόνα της απεικόνισης $(t\in R) \to (x, y, z)\in R^3$.

Θεωρούμε, τώρα, μια επιφάνεια S στον R^3, αποτελούμενη από δυναμικές γραμμές του πεδίου (1), όπως αυτές καθορίζονται από το σύστημα (3).



Μια τέτοια επιφάνεια μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά με δύο τρόπους: Εκφράζοντας απευθεί-ας μία μεταβλητή του χώρου, έστω z, συναρτήσει των άλλων δύο: $z=f(x,y)$, ή δια μέσου μιας πιο συμμετρικής εξίσωσης, της μορφής $u(x,y,z)=0$. Η επιφάνεια S χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι, κάθε διάνυσμα $\vec{N}$ κάθετο σε αυτήν σε οποιοδήποτε σημείο της, είναι κάθετο στη δυναμική γραμμή που διέρχεται από το σημείο αυτό, άρα κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{V}$ στη γραμμή, στο θεωρούμενο σημείο. Δηλαδή, $\vec{N}\cdot\vec{V}=0$.

Όπως γνωρίζουμε από τη διανυσματική ανάλυση, ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια $u(x,y,z)=0$, είναι το $\vec{N}=\vec{\nabla}u \equiv (\partial u/\partial x,\ \partial u/\partial y,\ \partial u/\partial z)$. Αν η επιφάνεια S εκφράζεται με τη σχέση: $z=f(x,y) \Rightarrow u(x,y,z)\equiv f(x,y)-z=0$, τότε:

$$\vec{N}=\vec{\nabla}u \equiv (\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y,\ -1) \equiv (\partial z/\partial x,\ \partial z/\partial y,\ -1).$$

Δοθέντος ότι $\vec{V}\equiv(P,Q,R)$, η συνθήκη καθετότητας: $\vec{N}\cdot\vec{V}=0 \Leftrightarrow \vec{V}\cdot\vec{\nabla}u=0$, μπορεί να διατυπωθεί με δύο εναλλακτικούς τρόπους:

1. Με τη γραμμική ομογενή ΜΔΕ:

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad (4)$$

2. Με τη σχεδόν γραμμική ΜΔΕ:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z) \qquad (5)$$

Συμπέρασμα: Οι λύσεις των ΜΔΕ (4) και (5) παριστούν επιφάνειες στον R^3, οι οποίες αποτελούνται από δυναμικές γραμμές του πεδίου (1). Παρατηρούμε ότι το σύστημα (3) είναι το *χαρακτηριστικό σύστημα* για τη σχεδόν γραμμική ΜΔΕ (5), της οποίας τη διαδικασία επίλυσης περιγράψαμε στην Παρ. 4.2.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η συνάρτηση $u(x,y,z)$, λύση της ΜΔΕ (4), είναι ένα *πρώτο ολοκλήρωμα* του αυτόνομου συστήματος (2), αφού $u(x,y,z) = 0 = \sigma\tau\alpha\theta.$, για λύσεις $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ του συστήματος. Πράγματι, οι λύσεις αυτές αντιστοιχούν σε δυναμικές γραμμές του πεδίου (1), κάθε μία από τις οποίες κείται εξ ολοκλήρου σε κάποια επιφάνεια $u(x,y,z)=0$.

Εναλλακτικά, ας προσέξουμε ότι η ΜΔΕ (4) γράφεται: $\vec{V}u(x,y,z)=0$, όπου, τώρα, το $\vec{V}$ παριστά τον διαφορικό τελεστή που αντιστοιχεί στο πεδίο (1): $\vec{V} = P\partial/\partial x + Q\partial/\partial y + R\partial/\partial z$. Όπως δείξαμε στην Παρ. 5.4, η παραπάνω σχέση ικανοποιείται όταν η συνάρτηση $u(x,y,z)$ είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος (2) [η τιμή τής u μένει σταθερή κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής του πεδίου (1)].

Παράδειγμα: Για $P=y$, $Q=-x$, $R=0$, έχουμε το διανυσματικό πεδίο:

$$\vec{V} = y\partial/\partial x - x\partial/\partial y \;\; (+\, 0\cdot\partial/\partial z) \;.$$

Οι επιφάνειες S, αποτελούμενες από δυναμικές γραμμές του πεδίου, δίνονται από τις λύσεις της ΜΔΕ (5), που εδώ γράφεται: $y\partial z/\partial x - x\partial z/\partial y = 0$. Οι λύσεις αυτές είναι (βλ. Παρ. 4.2, Παράδειγμα 2): $z=F(x^2+y^2)$, με αυθαίρετο F.

Έστω, τώρα, ότι ζητάμε μια επιφάνεια S_n η οποία τέμνει *κάθετα* τις δυναμικές γραμμές του πεδίου (1), σε κάθε σημείο της. Αν η S_n περιγράφεται από μια σχέση της μορφής: $U(x,y,z)=0$, τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, σε κάθε σημείο τής S_n , το κάθετο διάνυσμα $\vec{N} = \vec{\nabla}U$ ταυτίζεται με το πεδιακό διάνυσμα $\vec{V}$:

$$\vec{\nabla}U(x,y,z) = \vec{V}(x,y,z) \tag{6}$$

Σε μορφή συνιστωσών, η σχέση (6) αντιστοιχεί στο σύστημα ΜΔΕ:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \;, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q \;, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R \tag{7}$$

Όπως γνωρίζουμε (βλ. Παρ. 1.4), η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας των (6) και (7) ως προς U, γράφεται:

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \;, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \;, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \tag{8}$$

Παρατηρούμε ότι, αν υπάρχει επιφάνεια S_n : $U(x,y,z)=0$, κάθετη στις δυναμικές γραμμές του πεδίου (1), τότε το πεδίο αυτό *προέρχεται από δυναμικό* (Παρ. 1.4). Η συνάρτηση $U(x,y,z)$ αντιπροσωπεύει ακριβώς το δυναμικό αυτό, σύμφωνα με τη σχέση (6).

Εφαρμογή: Το *ηλεκτροστατικό πεδίο* $\vec{E}$ είναι αστρόβιλο: $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$, πράγμα που αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη *ηλεκτρικού δυναμικού* $U(x,y,z)$, τέτοιου ώστε $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$. Μια *ισοδυναμική επιφάνεια* είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου, για τα οποία ισχύει ότι $U(x,y,z)=C$. Μια τέτοια επιφάνεια τέμνει κάθετα τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, αφού, σε κάθε σημείο της, το διάνυσμα $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$ είναι κάθετο στην επιφάνεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΔΕ

6.1 Συμβολισμοί

Έστω $u(x,t)$ συνάρτηση δύο μεταβλητών. Για τις μερικές παραγώγους της, θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\partial_x u=u_x\ ,\ \ \frac{\partial u}{\partial t}=\partial_t u=u_t\ ,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u_{xx}\ ,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=u_{tt}\ ,\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=u_{xt}\ ,$$

κλπ. Γενικά, ένας κάτω δείκτης θα δηλώνει μερική παραγώγιση ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, μια συνάρτηση F των x, t, u και ενός αριθμού μερικών παραγώγων τού u. Για συναρτήσεις τέτοιου τύπου, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{tt},u_{xt},\cdots)\equiv F[u]\ .$$

Τότε,

$$F_x=\partial_x F=\partial F/\partial x\ \ ,\ \ F_t=\partial_t F=\partial F/\partial t\ \ ,\ \ F_u=\partial_u F=\partial F/\partial u\ \ ,$$

κλπ. Προσέξτε ότι, για τον υπολογισμό των F_x και F_t, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη τόσο την *άμεση* εξάρτηση της F από τα x και t, όσο και την *έμμεση* εξάρτησή της από τις μεταβλητές αυτές, μέσω του u και των παραγώγων του.

Παράδειγμα: Για $F[u] = 3xtu^2$, έχουμε:

$$F_x = 3tu^2 + 6xtuu_x\ \ ,\ \ \ F_t = 3xu^2 + 6xtuu_t\ \ .$$

6.2 Μετασχηματισμοί Bäcklund

Η γενική ιδέα των μετασχηματισμών Bäcklund έχει ως εξής: Θεωρούμε δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ), $P[u]=0$ και $Q[v]=0$, όπου οι εκφράσεις $P[u]$ και $Q[v]$ περιέχουν τα u και v, αντίστοιχα, και κάποιες από τις μερικές παραγώγους τους ως προς x και t. Έστω, τώρα, ένα σύστημα δύο πεπλεγμένων ΜΔΕ για τα u και v:

$$\begin{aligned}&B_1(x,t,u,v,u_x,v_x,u_t,v_t,u_{xx},v_{xx},\cdots)=0\\&B_2(x,t,u,v,u_x,v_x,u_t,v_t,u_{xx},v_{xx},\cdots)=0\end{aligned}\qquad(1)$$

Υποθέτουμε τα εξής:

1. Το σύστημα (1) είναι ολοκληρώσιμο ως προς *v* (οι εξισώσεις του συστήματος είναι συμβατές μεταξύ τους για επίλυση ως προς *v*) όταν το *u* επαληθεύει τη ΜΔΕ $P[u]=0$. Η λύση *v*, τότε, του συστήματος επαληθεύει τη ΜΔΕ $Q[v]=0$.

2. Το σύστημα (1) είναι ολοκληρώσιμο ως προς *u* αν το *v* ικανοποιεί τη ΜΔΕ $Q[v]=0$. Η λύση *u*, τότε, του συστήματος ικανοποιεί τη ΜΔΕ $P[u]=0$.

Λέμε ότι το σύστημα (1) αποτελεί ένα *μετασχηματισμό Bäcklund* που συνδέει λύσεις τής $P[u]=0$ με λύσεις τής $Q[v]=0$. Αν συμβεί να είναι $P \equiv Q$, δηλαδή, αν τα *u* και *v* ικανοποιούν *την ίδια* ΜΔΕ $P[u]=0$, τότε ο μετασχηματισμός καλείται *αυτο-Bäcklund*.

Γενική μέθοδος: Υποθέτουμε ότι ενδιαφερόμαστε για λύσεις τής ΜΔΕ $P[u]=0$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι διαθέτουμε ένα μετασχηματισμό Bäcklund που συνδέει τις λύσεις *u* αυτής της εξίσωσης με τις λύσεις *v* της ΜΔΕ $Q[v]=0$ (αν $P \equiv Q$, ο μετασχηματισμός συνδέει λύσεις *u* και *v* της ίδιας ΜΔΕ). Θεωρούμε μια γνωστή λύση $v=v_0(x,t)$ της $Q[v]=0$, και γράφουμε το μετασχηματισμό ως εξής:

$$B_i\left(x,t,u,v_0,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v_0}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v_0}{\partial t},\cdots\right)=0\ , \quad i=1,2 \tag{2}$$

Δοθέντος ότι $Q[v_0]=0$, το σύστημα (2) είναι ολοκληρώσιμο ως προς *u* και η λύση του ικανοποιεί τη ΜΔΕ $P[u]=0$. Έτσι, βρίσκουμε μια λύση $u(x,t)$ της $P[u]=0$ χωρίς να λύσουμε την ίδια την εξίσωση, ολοκληρώνοντας το μετασχηματισμό (2) ως προς *u*. Φυσικά, η χρήση της μεθόδου έχει νόημα όταν (α) γνωρίζουμε εξαρχής μια λύση $v_0(x,t)$ της $Q[v]=0$, και (β) η ολοκλήρωση του συστήματος (2) ως προς *u* είναι απλούστερη από την ολοκλήρωση της ίδιας της ΜΔΕ $P[u]=0$. Αν ο μετασχηματισμός (2) είναι αυτο-Bäcklund, τότε, ξεκινώντας από μια γνωστή λύση $v_0(x,t)$ της $P[u]=0$ και ολοκληρώνοντας το σύστημα (2), βρίσκουμε μια άλλη λύση $u(x,t)$ της ίδιας εξίσωσης.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα. Για συντομία, οι μετασχηματισμοί Bäcklund θα αναφέρονται ως «ΜΒ»:

1. Σχέσεις Cauchy-Riemann

Οι γνωστές από τη Μιγαδική Ανάλυση *σχέσεις Cauchy-Riemann* (Παρ. 2.1):

$$u_x = v_y \quad (\alpha) \qquad u_y = -v_x \quad (\beta) \tag{3}$$

(εδώ η μεταβλητή *t* έχει μετονομαστεί *y*) αποτελούν έναν αυτο-ΜΒ για την *εξίσωση του Laplace*:

$$P[w] \equiv w_{xx} + w_{yy} = 0 \tag{4}$$

Πράγματι: Για να είναι επιλύσιμες οι (3) ως προς *u* για δοσμένο $v(x,y)$, θα πρέπει καταρχήν να είναι συμβατές μεταξύ τους. Η *συνθήκη συμβατότητας* (ή *συνθήκη ολοκληρωσιμότητας*) βρίσκεται από την απαίτηση ότι $(u_x)_y = (u_y)_x$. Παραγωγίζοντας την (*α*) ως προς *y* και τη (*β*) ως προς *x*, και εξισώνοντας τις μεικτές παραγώγους τού *u*, απαλείφουμε τη μεταβλητή *u* και βρίσκουμε τη συνθήκη που πρέπει να υπακούει το $v(x,y)$:

$$P[v] \equiv v_{xx} + v_{yy} = 0 \ .$$

Απαλείφοντας, όμοια, το v από το σύστημα (3), βρίσκουμε την αναγκαία συνθήκη για το u ώστε το σύστημα να είναι ολοκληρώσιμο ως προς v για δοσμένο u:

$$P[u] \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \ .$$

Δηλαδή, η ολοκληρωσιμότητα του συστήματος (3) ως προς μία μεταβλητή, απαιτεί ότι η άλλη μεταβλητή ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace (4).

Έστω, τώρα, $v_0(x,y)$ μια γνωστή λύση της εξίσωσης του Laplace. Αντικαθιστώντας $v=v_0$ στο σύστημα (3), μπορούμε να το ολοκληρώσουμε ως προς u. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε (απαλείφοντας το v_0 από το σύστημα) ότι η συνάρτηση u που θα βρούμε ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace (4). Για παράδειγμα, η επιλογή: $v_0(x,y)=xy$, μας οδηγεί σε μια νέα λύση: $u(x,y)= (x^2-y^2)/2 + C$.

2. Εξίσωση του Liouville

Η εξίσωση αυτή γράφεται:

$$P[u] \equiv u_{xt} - e^u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{xt} = e^u \tag{5}$$

Η απευθείας επίλυσή της είναι πολύ δύσκολη, λόγω της μη-γραμμικότητάς της. Μπορεί, όμως, να επιλυθεί ευκολότερα με χρήση ενός ΜΒ. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε μια βοηθητική συνάρτηση $v(x,t)$, καθώς και τη ΜΔΕ:

$$Q[v] \equiv v_{xt} = 0 \tag{6}$$

Θεωρούμε, επίσης, το σύστημα των ΜΔΕ πρώτης τάξεως:

$$u_x + v_x = \sqrt{2}\ e^{(u-v)/2} \quad (\alpha) \qquad u_t - v_t = \sqrt{2}\ e^{(u+v)/2} \quad (\beta) \tag{7}$$

Παραγωγίζοντας την (α) ως προς t και τη (β) ως προς x, απαλείφοντας τα $(u_t - v_t)$ και (u_x+v_x) στα δεξιά μέλη με τη βοήθεια των (α) και (β), και προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη, βρίσκουμε ότι τα u και v ικανοποιούν, αντίστοιχα, τις ΜΔΕ (5) και (6). Άρα, το σύστημα (7) αποτελεί ένα ΜΒ που συνδέει λύσεις των (5) και (6).

Ξεκινώντας με την τετριμμένη λύση v=0 της (6), και ολοκληρώνοντας το σύστημα:

$$u_x = \sqrt{2}\ e^{u/2} \ , \quad u_t = \sqrt{2}\ e^{u/2} \ ,$$

βρίσκουμε μια λύση τής (5):

$$u(x,t) = -2\ln\left(C - \frac{x+t}{\sqrt{2}} \right) \ .$$

3. Εξίσωση sine-Gordon

Η *εξίσωση sine-Gordon* βρίσκει εφαρμογή σε διάφορες περιοχές της Φυσικής, όπως στη μελέτη των κρυσταλλικών στερεών, στη διάδοση ελαστικών κυμάτων, στο Μαγνητισμό, σε μοντέλα στοιχειωδών σωματίων, κλπ. Η εξίσωση αυτή (που το όνομά της παραπέμπει λογοπαι-κτικά στη γραμμική εξίσωση Klein-Gordon) γράφεται:

$$u_{xt} = \sin u \tag{8}$$

Το παρακάτω σύστημα αποτελεί έναν αυτο-ΜΒ για την (8):

$$\frac{1}{2}(u+v)_x = a \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \;, \qquad \frac{1}{2}(u-v)_t = \frac{1}{a} \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{9}$$

όπου a ($\neq 0$) μια αυθαίρετη πραγματική σταθερά. [Λόγω της παρουσίας τού a, λέμε ότι το σύστημα (9) είναι ένας *παραμετρικός* ΜΒ.] Όταν το u είναι λύση τής (8), τότε ο ΜΒ (9) είναι ολοκληρώσιμος ως προς v, το οποίο επίσης ικανοποιεί την (8): $v_{xt} = \sin v$. Το αντίστροφο ισχύει όμοια, αν εναλλάξουμε τους ρόλους των u και v.

Ξεκινώντας με την τετριμμένη λύση $v=0$ της $v_{xt} = \sin v$, και ολοκληρώνοντας το σύστημα:

$$u_x = 2a \sin\frac{u}{2} \;, \quad u_t = \frac{2}{a} \sin\frac{u}{2} \;,$$

βρίσκουμε μια νέα λύση τής (8):

$$u(x,t) = 4 \arctan\left\{ C \exp\left(ax + \frac{t}{a} \right) \right\} .$$

6.3 Ζεύγος Lax

Έστω μια μη-γραμμική ΜΔΕ: $F[u]=0$, όπου $u=u(x,t)$. Θεωρούμε ένα ζεύγος *γραμμικών* ΜΔΕ ως προς μια νέα μεταβλητή ψ, στις οποίες το u υπεισέρχεται σαν ένα είδος παραμετρικής συνάρτη-σης που καθορίζεται εκ των προτέρων, χωρίς όμως, προς το παρόν, να τη σχετίζουμε με τις λύσεις τής ΜΔΕ $F[u]=0$:

$$L_1(\psi\,; u) = 0 \;, \quad L_2(\psi\,; u) = 0 \tag{1}$$

Για να έχει λύση το σύστημα (1) ως προς ψ, θα πρέπει οι δύο εξισώσεις που το αποτελούν να είναι συμβατές μεταξύ τους. Η συμβατότητα μπορεί να ρυθμιστεί με κατάλληλη επιλογή της παραμετρικής συνάρτησης $u(x,t)$. Έστω, τώρα, ότι ισχύει το εξής: Το γραμμικό σύστημα (1) είναι ολοκληρώσιμο ως προς ψ αν και μόνο αν το u είναι λύση της μη-γραμμικής ΜΔΕ $F[u]=0$. Λέμε τότε ότι το σύστημα (1) αποτελεί ένα *ζεύγος Lax* για τη ΜΔΕ $F[u]=0$. Η κατα-σκευή του ζεύγους Lax αποτελεί το σημείο εκκίνησης σε μια βασική μέθοδο ολοκλήρωσης μη-γραμμικών ΜΔΕ, που ονομάζεται *αντίστροφη σκέδαση* (inverse scattering method).

Ας δούμε δύο παραδείγματα ζευγών Lax για μη-γραμμικές ΜΔΕ:

1. Εξίσωση Korteweg-de Vries

Η *εξίσωση Korteweg-de Vries* (KdV) περιγράφει τη διάδοση μιας μορφής μη-γραμμικών κυμάτων με «σωματιδιακά» χαρακτηριστικά. Τα κύματα αυτά αναφέρονται ως *solitons*. Μια συνήθης γραφή της εξίσωσης είναι:

$$F[u] \equiv u_t - 6u\,u_x + u_{xxx} = 0 \tag{2}$$

Το ζεύγος Lax για την (2) γράφεται:

$$\psi_{xx} = (u-\lambda)\psi \quad (\alpha) \qquad \psi_t = 2(u+2\lambda)\psi_x - u_x\psi \quad (\beta) \tag{3}$$

όπου λ μια αυθαίρετη σταθερή παράμετρος. Για να είναι το σύστημα (3) ολοκληρώσιμο ως προς ψ, οι εξισώσεις (α) και (β) θα πρέπει να είναι συμβατές μεταξύ τους για κάθε τιμή τού λ. Έτσι, το $(\psi_{xx})_t$ από την (α) θα πρέπει να συμφωνεί με το $(\psi_t)_{xx}$ από τη (β). Η συνθήκη συμβατότητας (ολοκληρωσιμότητας), λοιπόν, είναι: $(\psi_{xx})_t=(\psi_t)_{xx}$. Παραγωγίζοντας, αντίστοιχα, τις (α) και (β), και χρησιμοποιώντας τις ίδιες σχέσεις για να απαλείψουμε, όπου χρειάζεται, τα ψ_{xx} και ψ_t , καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$(u_t - 6u\,u_x + u_{xxx})\psi \equiv F[u]\,\psi = 0 \ .$$

Άρα, για να έχει το σύστημα (3) μη-τετριμμένη λύση $\psi \neq 0$, θα πρέπει να ισχύει ότι $F[u]=0$, δηλαδή, το u θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση KdV (2).

2. Μη-γραμμικό μοντέλο σ

Θεωρούμε τη ΜΔΕ:

$$F[g] \equiv \partial_t(g^{-1}g_x) + \partial_x(g^{-1}g_t) = 0 \tag{4}$$

όπου το $g=g(x,t)$ παριστά αντιστρέψιμο τετραγωνικό ($n\times n$) πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι μιγαδικά. Το ζεύγος Lax για την (4) γράφεται:

$$\psi_t = \frac{\lambda}{1-\lambda}\, g^{-1}g_t\psi \quad (\alpha) \qquad \psi_x = -\frac{\lambda}{1+\lambda}\, g^{-1}g_x\psi \quad (\beta) \tag{5}$$

όπου ψ ένας μιγαδικός ($n\times n$) πίνακας, και λ μια αυθαίρετη σταθερή μιγαδική παράμετρος. Η συμβατότητα των (α) και (β) απαιτεί ότι $(\psi_t)_x=(\psi_x)_t$. Παραγωγίζοντας, αντίστοιχα, τις (α) και (β), χρησιμοποιώντας τις ίδιες σχέσεις για να απαλείψουμε, όπου χρειάζεται, τα ψ_x και ψ_t , και απαλείφοντας στο τέλος τον κοινό παράγοντα ψ (για $\psi \neq 0$), καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\partial_t(g^{-1}g_x) + \partial_x(g^{-1}g_t) - \lambda\left\{\partial_t(g^{-1}g_x) - \partial_x(g^{-1}g_t) + [g^{-1}g_t\,,\, g^{-1}g_x]\right\} = 0$$

όπου, γενικά, $[A\,,B] \equiv AB-BA$ είναι ο *μεταθέτης* δύο πινάκων A και B. Όπως αποδεικνύεται, η ποσότητα μέσα στις αγκύλες είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν. Έτσι, για να έχει το σύστημα (5) μη-τετριμμένη λύση ως προς ψ , θα πρέπει το g να ικανοποιεί τη ΜΔΕ (4). (Για την παραγώγιση πινάκων, βλ. Παράρτημα.)

6.4 Εξισώσεις του Maxwell και Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Η πρόβλεψη από τον Maxwell ότι οι ηλεκτρομαγνητικές (Η/Μ) διαταραχές διαδίδονται στο χώρο με τη μορφή κυμάτων που «τρέχουν» με ταχύτητα ίση με αυτή του φωτός, αποτελεί, ιστορικά, έναν από τους μεγαλύτερους θριάμβους της Θεωρητικής Φυσικής. Θα λέγαμε ότι η ανακάλυψη αυτή δεν υστερεί σε σπουδαιότητα από τη Θεωρία της Σχετικότητας! Όπως θα δούμε, οι κυματικές εξισώσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο συνδέονται μέσω των εξισώσεων του Maxwell με τον ίδιο, περίπου, τρόπο που δύο ΜΔΕ συνδέονται μεταξύ τους μέσω ενός μετασχηματισμού Bäcklund.

Στον *κενό χώρο*, όπου δεν υπάρχουν φορτία ή ρεύματα, οι *εξισώσεις του Maxwell* γράφονται:

$$\begin{aligned} &(\alpha) \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad &(\gamma) \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ &(\beta) \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad &(\delta) \quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $\vec{E},\vec{B}$ το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, αντίστοιχα, και όπου ε_0 , μ_0 σταθερές που σχετίζονται με το συγκεκριμένο σύστημα μονάδων (S.I.).

Πριν προχωρήσουμε, παραθέτουμε μια χρήσιμη διανυσματική ταυτότητα που θα τη χρειαστούμε παρακάτω:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A} \tag{2}$$

όπου $\vec{A}=A_x\,\hat{u}_x+A_y\,\hat{u}_y+A_z\,\hat{u}_z$ ένα διανυσματικό πεδίο. Σε *Καρτεσιανές* συντεταγμένες (x,y,z), όπου τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{u}_x$, $\hat{u}_y$, $\hat{u}_z$ είναι σταθερά, ισχύει ότι:

$$\nabla^2\vec{A}=(\nabla^2 A_x)\,\hat{u}_x+(\nabla^2 A_y)\,\hat{u}_y+(\nabla^2 A_z)\,\hat{u}_z \tag{3}$$

Σε *καμπυλόγραμμες* συντεταγμένες, π.χ. σφαιρικές ή κυλινδρικές, μια σχέση της μορφής (3) δεν είναι σωστή. Σε τέτοιες περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε την (2) για να *ορίσουμε* το $\nabla^2\vec{A}$. Εναλλακτικά, εφαρμόζουμε τον τελεστή ∇^2 απευθείας στο $\vec{A}$, παραγωγίζοντας τόσο τις συνιστώσες τού $\vec{A}$, *όσο και τα μοναδιαία διανύσματα* που αντιστοιχούν στο δεδομένο σύστημα συντεταγμένων.

Παίρνοντας το *rot* τής (1)(γ), και χρησιμοποιώντας τις (2) και (1)(α),(δ), έχουμε:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=-\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \;\Rightarrow$$

$$\nabla^2\vec{E}\,-\,\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \tag{4}$$

Όμοια, παίρνοντας το *rot* τής (1)(δ), και χρησιμοποιώντας τις (2) και (1)(β),(γ), βρίσκουμε:

$$\nabla^2\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων Maxwell (1), από το οποίο ξεκινήσαμε, είναι *πρώτης* τάξεως και *πεπλεγμένο* ως προς τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ (δύο από τις εξισώσεις περιέχουν και τα δύο πεδία μαζί). Αυτό που πετύχαμε είναι να *αποσυμπλέξουμε* το σύστημα, παίρνοντας *χωριστές* εξισώσεις για τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$, οι οποίες όμως τώρα είναι *δευτέρας* τάξεως. (Σας θυμίζει κάτι αυτό από τη συζήτηση της Παρ. 6.2 για τους μετασχηματισμούς Bäcklund;)

Παρατηρούμε ότι οι (4) και (5) είναι, στην ουσία, η ίδια εξίσωση γραμμένη δύο φορές, μία για κάθε πεδίο $\vec{E}$ και $\vec{B}$. Η εξίσωση αυτή έχει τη γενική μορφή:

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{όπου} \quad \vec{A} = \vec{E} \text{ ή } \vec{B} \tag{6}$$

Θέτουμε:

$$\varepsilon_0\mu_0 \equiv \frac{1}{c^2} \iff c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{7}$$

και γράφουμε την (6) στη μορφή:

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

όπου $\vec{A} = \vec{E}$ ή $\vec{B}$. Αναλυτικά, η (8) ισχύει *για κάθε συνιστώσα* τού $\vec{E}$ ή του $\vec{B}$ (συνολικά 6 πεδία: $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$). Για παράδειγμα,

$$\nabla^2 E_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \;, \quad \nabla^2 B_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0 \;, \quad \text{κλπ.}$$

Η (8) είναι μια *εξίσωση κύματος* το οποίο διαδίδεται με ταχύτητα *c*. Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές των σταθερών ε_0 και μ_0 στην (7), βρίσκουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $c \simeq 3\times 10^8\, m/s$, που ισούται με την *ταχύτητα του φωτός στο κενό*. Τα ζεύγη λύσεων $(\vec{E},\vec{B})$ της κυματικής εξίσωσης (8), *όταν τα δύο πεδία συνδέονται μεταξύ τους μέσω των εξισώσεων του Maxwell*, ονομάζονται *ηλεκτρομαγνητικά* (Η/Μ) *κύματα*.

Φυσική ερμηνεία: Μια μεταβολή (διαταραχή) του Η/Μ πεδίου σε ένα σημείο του χώρου, διαδίδεται στο χώρο με τη μορφή κύματος που «ταξιδεύει» με την ταχύτητα του φωτός. Ειδικά, το ίδιο το φως είναι μια Η/Μ διαταραχή που διαδίδεται στη μορφή Η/Μ κύματος.

Σημείωση: Η διάδοση Η/Μ διαταραχών μέσα στην ύλη, επίσης εμφανίζει κυματική συμπεριφορά, όπως προκύπτει από τη γενικότερη μορφή των εξισώσεων του Maxwell. Για απλούστευση της μελέτης μας, θα περιοριστούμε εδώ στη διάδοση Η/Μ κύματος στο κενό.

Η κυματική εξίσωση (8) δέχεται λύσεις της μορφής:

$$\vec{A} = \vec{F}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad \text{όπου} \quad \omega / k = c \ \ \text{με} \ \ k = |\vec{k}| \tag{9}$$

Η απλούστερη τέτοια λύση είναι ένα *μονοχρωματικό επίπεδο κύμα* κυκλικής συχνότητας *ω*, το οποίο διαδίδεται στην κατεύθυνση του *κυματοδιανύσματος* $\vec{k}$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0\, e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (\alpha) \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{B}_0\, e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (\beta) \end{aligned} \tag{10}$$

όπου τα $\vec{E}_0, \vec{B}_0$ παριστούν σταθερά *μιγαδικά* πλάτη, και *ω*/*k*=*c*. (Ο όρος *μονοχρωματικό* δηλώνει ότι το Η/Μ κύμα είναι ένα *αρμονικό* κύμα που, εξ ορισμού, περιέχει μόνο μία συχνότητα *ω*.)

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι, αν και κάθε ζεύγος πεδίων $(\vec{E},\vec{B})$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell (1), είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης (8), το αντίστροφο δεν ισχύει. Τούτο σημαίνει, εν προκειμένω, ότι οι λύσεις (10) της κυματικής εξίσωσης *δεν* παριστούν αυτόματα και λύσεις των εξισώσεων του Maxwell. Θα πρέπει, λοιπόν, να αντικαταστήσουμε τις γενικές λύσεις (10) στις εξισώσεις (1), για να βρούμε τις επιπλέον συνθήκες που οι εξισώσεις αυτές επιβάλλουν.

Για το σκοπό αυτό, θα χρειαστούμε δύο ακόμα ταυτότητες: Αν *Φ* είναι ένα βαθμωτό και $\vec{A}$ ένα διανυσματικό πεδίο, τότε ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{A}) &= (\vec{\nabla}\Phi)\cdot\vec{A} + \Phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) \ , \\ \vec{\nabla}\times(\Phi\vec{A}) &= (\vec{\nabla}\Phi)\times\vec{A} + \Phi(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \ . \end{aligned}$$

Στη δική μας περίπτωση, θέτουμε $\Phi = e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = e^{\,i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, e^{-i\omega t}$ και $\vec{A} = \vec{E}_0$ ή $\vec{B}_0$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{B}_0 = 0 \ , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}_0 = \vec{\nabla}\times\vec{B}_0 = 0 \qquad (\text{διότι } \vec{E}_0, \vec{B}_0 \text{ σταθερά}) \ ,$$

$$\vec{\nabla}e^{\,i\vec{k}\cdot\vec{r}} = (\hat{u}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{u}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{u}_z\frac{\partial}{\partial z})\, e^{\,i(k_x x + k_y y + k_z z)} = i\,(k_x\hat{u}_x + k_y\hat{u}_y + k_z\hat{u}_z)\, e^{\,i\vec{k}\cdot\vec{r}} = i\,\vec{k}\, e^{\,i\vec{k}\cdot\vec{r}} \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t} = -i\,\omega\, e^{-i\omega t} \, .$$

Αντικαθιστώντας τις (10)(*α*) και (*β*) στις (1)(*α*) και (*β*), αντίστοιχα, έχουμε:

$$\begin{aligned} (\vec{E}_0\, e^{-i\omega t})\cdot\vec{\nabla}e^{\,i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \ &\Rightarrow\ (\vec{k}\cdot\vec{E}_0)\, e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0 \\ (\vec{B}_0\, e^{-i\omega t})\cdot\vec{\nabla}e^{\,i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \ &\Rightarrow\ (\vec{k}\cdot\vec{B}_0)\, e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0 \end{aligned} \quad =>$$

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0 \ , \quad \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0 \, . \tag{11}$$

Πολλαπλασιάζοντας με το $e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ και χρησιμοποιώντας τις (10), βρίσκουμε:

$$\vec{k}\cdot\vec{E}=0\,,\quad \vec{k}\cdot\vec{B}=0 \tag{12}$$

Αυτό σημαίνει ότι, σε ένα μονοχρωματικό επίπεδο Η/Μ κύμα, τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα στο κυματοδιάνυσμα $\vec{k}$, δηλαδή, κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος. Άρα, το μονοχρωματικό επίπεδο Η/Μ κύμα είναι *εγκάρσιο κύμα* (τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ «ταλαντώνονται» κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως).

Αντικαθιστώντας, τώρα, τις (10)(*α*) και (*β*) στις (1)(*γ*) και (*δ*), έχουμε:

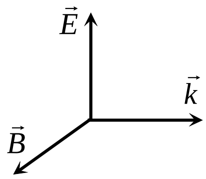
$$e^{-i\omega t}(\vec{\nabla}e^{\,i\vec{k}\cdot\vec{r}})\times\vec{E}_0=i\,\omega\,\vec{B}_0\,e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\Rightarrow(\vec{k}\times\vec{E}_0)\,e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}=\omega\,\vec{B}_0\,e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$
$$e^{-i\omega t}(\vec{\nabla}e^{\,i\vec{k}\cdot\vec{r}})\times\vec{B}_0=-i\,\omega\,\varepsilon_0\mu_0\vec{E}_0\,e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\Rightarrow(\vec{k}\times\vec{B}_0)\,e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}=-\frac{\omega}{c^2}\,\vec{E}_0\,e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\quad =>$$

$$\vec{k}\times\vec{E}_0=\omega\,\vec{B}_0\,,\quad \vec{k}\times\vec{B}_0=-\frac{\omega}{c^2}\,\vec{E}_0 \tag{13}$$

Πολλαπλασιάζοντας με το $e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ και χρησιμοποιώντας τις (10), βρίσκουμε:

$$\vec{k}\times\vec{E}=\omega\,\vec{B}\,,\quad \vec{k}\times\vec{B}=-\frac{\omega}{c^2}\,\vec{E} \tag{14}$$

Παρατηρούμε ότι τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, όπως και κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως $\vec{k}$ του κύματος. Συγκεκριμένα, τα $(\vec{E},\vec{B},\vec{k})$ αποτελούν *δεξιόστροφο τρισορθογώνιο σύστημα*.



Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι τα μιγαδικά πλάτη $\vec{E}_0,\vec{B}_0$ μπορούν να γραφούν:

$$\vec{E}_0=\vec{E}_{0,R}\,e^{\,i\alpha}\,,\quad \vec{B}_0=\vec{B}_{0,R}\,e^{\,i\beta}$$

όπου $\vec{E}_{0,R},\vec{B}_{0,R}$ *πραγματικά* διανύσματα και *α*, *β* πραγματικοί αριθμοί. Όπως μπορούμε να δείξουμε, οι σχέσεις (13), τότε, απαιτούν ότι $\alpha=\beta$ και

$$\vec{k}\times\vec{E}_{0,R}=\omega\,\vec{B}_{0,R}\,,\quad \vec{k}\times\vec{B}_{0,R}=-\frac{\omega}{c^2}\,\vec{E}_{0,R} \tag{15}$$

Τα μονοχρωματικά κύματα (10), τώρα, γράφονται:

$$\vec{E} = \vec{E}_{0,R}\, e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\alpha)} \;, \qquad \vec{B} = \vec{B}_{0,R}\, e^{\,i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\alpha)} \tag{16}$$

Παίρνοντας το πραγματικό μέρος των σχέσεων (16), βρίσκουμε τις εκφράσεις για τα *πραγματικά* πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_{0,R}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t+\alpha) \;, \qquad \vec{B} = \vec{B}_{0,R}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t+\alpha) \tag{17}$$

Παρατηρούμε ότι τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ «ταλαντώνονται» σε φάση, αποκτώντας ταυτόχρονα τις μέγιστες, τις ελάχιστες και τις μηδενικές τιμές τους.

Παίρνοντας τα μέτρα των διανυσματικών σχέσεων (15) και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα $\vec{E}_{0,R}$ και $\vec{B}_{0,R}$ είναι κάθετα στο κυματοδιάνυσμα $\vec{k}$, καθώς και ότι $\omega/k=c$, βρίσκουμε μια σχέση ανάμεσα στα μέτρα των πραγματικών πλατών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου:

$$E_{0,R} = c\,B_{0,R} \tag{18}$$

όπου $E_{0,R}=|\vec{E}_{0,R}|$ και $B_{0,R}=|\vec{B}_{0,R}|$. Αν, τώρα, πάρουμε τα μέτρα των (17) και λάβουμε υπόψη την (18), βρίσκουμε τη σχέση ανάμεσα στις *στιγμιαίες τιμές* του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου:

$$E = c\,B \tag{19}$$

όπου $E=|\vec{E}|$ και $B=|\vec{B}|$.

Συμπέρασμα: Σε ένα μονοχρωματικό επίπεδο Η/Μ κύμα, τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος, ταλαντώνονται σε φάση, και οι στιγμιαίες τιμές τους συνδέονται με τη σχέση (19).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕ ΠΙΝΑΚΕΣ

Έστω $A(t)=[a_{ij}(t)]$ ένας $(m\times n)$ πίνακας, του οποίου τα στοιχεία είναι συναρτήσεις της μεταβλητής t. Η *παράγωγος* dA/dt του A είναι ο $(m\times n)$ πίνακας με στοιχεία:

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{ij}=\frac{d}{dt}\,a_{ij}(t) \tag{1}$$

Αν $B(t)$ είναι ένας άλλος $(m\times n)$ πίνακας, ισχύει η σχέση:

$$\frac{d}{dt}\,(A\pm B)=\frac{dA}{dt}\pm\frac{dB}{dt} \tag{2}$$

Για τετραγωνικούς $(n\times n)$ πίνακες A, B, C, ισχύει ότι:

$$\frac{d}{dt}\,(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}\ ,\quad \frac{d}{dt}\,(ABC)=\frac{dA}{dt}BC+A\frac{dB}{dt}C+AB\frac{dC}{dt}\ ,\quad \text{κλπ.} \tag{3}$$

Όμοια, το *ολοκλήρωμα* του $(m\times n)$ πίνακα A ως προς t ορίζεται με τη σχέση:

$$\left(\int A(t)\,dt\right)_{ij}=\int a_{ij}(t)\;dt \tag{4}$$

Για την παράγωγο του *αντίστροφου* πίνακα A^{-1} [υποθέτοντας ότι ο τετραγωνικός $(n\times n)$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος] ισχύει ότι:

$$\frac{d}{dt}\,(A^{-1})=-A^{-1}\,\frac{dA}{dt}\,A^{-1} \tag{5}$$

Πράγματι, δοθέντος ότι $A^{-1}A=1_n$ [όπου 1_n ο μοναδιαίος $(n\times n)$ πίνακας], έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\,(A^{-1}A)=0\ \Rightarrow\ \frac{d(A^{-1})}{dt}A+A^{-1}\frac{dA}{dt}=0\ \Rightarrow\ \frac{d(A^{-1})}{dt}A=-A^{-1}\frac{dA}{dt}\ .$$

Πολλαπλασιάζοντας από τα δεξιά με A^{-1}, παίρνουμε την (5).

Όπως μπορούμε εύκολα να δείξουμε με τη βοήθεια των (2) και (3), για τετραγωνικούς πίνακες A και B,

$$\frac{d}{dt}\,[A,B]=\left[\frac{dA}{dt}\,,\,B\right]+\left[A\,,\,\frac{dB}{dt}\right] \tag{6}$$

όπου με $[A\,,B]\equiv AB-BA$ συμβολίζουμε τον *μεταθέτη* (commutator) δύο πινάκων.

Έστω, τώρα, ότι A=A(x,y), όπου A τετραγωνικός πίνακας. Καλούμε A_x και A_y τις μερικές παραγώγους τού A ως προς x και y, αντίστοιχα. Ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες:

$$\begin{aligned}&\partial_x (A^{-1}A_y) - \partial_y (A^{-1}A_x) + [A^{-1}A_x\,,\, A^{-1}A_y] = 0\\ &\partial_x (A_y A^{-1}) - \partial_y (A_x A^{-1}) - [A_x A^{-1},\, A_y A^{-1}] = 0\end{aligned} \tag{7}$$

Επί πλέον,

$$A(A^{-1}A_x)_y\, A^{-1} = (A_y\, A^{-1})_x \;\;\Leftrightarrow\;\; A^{-1}\,(A_y\, A^{-1})_x\, A = (A^{-1}A_x)_y \tag{8}$$

Δοθέντος ενός *σταθερού* (n×n) πίνακα A (όπου «σταθερός» σημαίνει: ανεξάρτητος από τη μεταβλητή t), ορίζουμε τον *εκθετικό πίνακα* e^{tA} με τη σχέση:

$$e^{tA} \equiv \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k = 1_n + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}A^4 + \cdots \tag{9}$$

Ο πίνακας e^{tA}, που επίσης έχει διαστάσεις (n×n) (γιατί;), είναι συνάρτηση του t. Η παράγωγός του είναι:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{tA} &= 0 + A + tA^2 + \frac{t^2}{2!}A^3 + \frac{t^3}{3!}A^4 + \cdots = A\left(1_n + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots\right)\\ &= \left(1_n + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots\right)A \;\;\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A \tag{10}$$

Θέτοντας $-A$ στη θέση τού A, έχουμε:

$$\frac{d}{dt}e^{-tA} = -Ae^{-tA} = -e^{-tA}A \tag{11}$$

Άσκηση 1: Με χρήση της ιδιότητας (3) για την παράγωγο γινομένου πινάκων, και λαμβάνοντας υπόψη τις (10) και (11), δείξτε ότι, για *σταθερούς* (n×n) πίνακες A και B, ισχύει η σχέση:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}Be^{tA}\right) = \left[e^{-tA}Be^{tA},\, A\right] \tag{12}$$

όπου το [,] στο δεξί μέλος παριστά τον μεταθέτη: $(e^{-tA}Be^{tA})A - A(e^{-tA}Be^{tA})$.

Άσκηση 2: Δίνεται το σύστημα ΣΔΕ και αρχικής συνθήκης:

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t)\;\;,\quad u(0) = u_0$$

όπου A και u_0 σταθεροί ($n \times n$) πίνακες, και $u(t)$ μεταβλητός πίνακας. Να δειχθεί ότι η λύση της ΣΔΕ είναι: $u(t) = e^{tA} u_0$. Όμοια, η λύση του συστήματος:

$$\frac{d}{dt} u(t) = u(t) A \ , \quad u(0) = u_0$$

είναι: $u(t) = u_0 \, e^{tA}$.

Άσκηση 3: Δείξτε ότι η λύση του συστήματος:

$$\frac{d}{dt} u(t) = [u(t), \ A] \ , \quad u(0) = u_0$$

είναι: $u(t) = e^{-tA} u_0 \, e^{tA}$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Δερμάνης, Α., *Γραμμική Άλγεβρα και Θεωρία Πινάκων* (Εκδόσεις Ζήτη, 1985).

Παπαχρήστου, Κ.Ι., *Εισαγωγή στην Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία και τη Φυσική των Αγώγιμων Στερεών* (Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, 2010).

Τραχανάς, Σ., *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις* (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2005).

Τραχανάς, Σ., *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις* (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2004).

Ablowitz, M.J., Clarkson, P.A., *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge University Press, 1991).

Arnold, V.I., *Ordinary Differential Equations* (The MIT Press, 1973).

Barnett, S., *Matrices: Methods and Applications* (Oxford, 1990).

Bermant, A.F., Aramanovich, I.G., *Mathematical Analysis* (Mir Publishers, 1975).

Borisenko, A.I., Tarapov, I.E., *Vector and Tensor Analysis with Applications* (Dover, 1979).

Churchill, R.V., Brown, J.W., *Complex Variables and Applications*, 5th Edition (McGraw-Hill, 1990).

Drazin, P.G., Johnson, R.S., *Solitons: An Introduction* (Cambridge University Press, 1989).

Edelen, D.G.B., *Applied Exterior Calculus* (Wiley, 1985).

Elsgolts, L., *Differential Equations and the Calculus of Variations* (Mir Publishers, 1977).

Frankel, T., *The Geometry of Physics: An Introduction*, 3rd Edition (Cambridge University Press, 2011).

Greenberg, M.D., *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd Edition (Prentice-Hall, 1998).

Griffiths, D.J., *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Edition (Prentice-Hall, 1999).

Joshi, A.W., *Matrices and Tensors in Physics*, 3rd Edition (Wiley Eastern Ltd, 1995).

Marion, J.B., Thornton, S.T., *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 4th Edition (Saunders College, 1995).

Markushevich, A.I., *The Theory of Analytic Functions: A Brief Course* (Mir Publishers, 1983).

Papachristou, C.J., *Symmetry and Integrability of Classical Field Equations*, arXiv:0803.3688 (http://arxiv.org/abs/0803.3688).

Symon, K.R., *Mechanics*, 3rd Edition (Addison-Wesley, 1971).

Wangsness, R.K., *Electromagnetic Fields*, 2nd Edition (Wiley, 1986).

Zachmanoglou, E.C., Thoe, D.W., *Introduction to Partial Differential Equations with Applications* (Dover, 1986).

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ