Κ. Ι. ΠΑΠΑΧΡΗΣΤΟΥ Α. Ν. ΜΑΓΟΥΛΑΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- **Σχέσεις συμβατότητας**
- **Μέθοδος ολοκλήρωσης**
- **Το πρότυπο των Εξισώσεων του Maxwell**

ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΩΝ

2018

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Προτείνεται μέθοδος για την εύρεση λύσεων γραμμικού συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ). Η μέθοδος συνίσταται στην εύρεση κατάλληλων παραμετρικών λύσεων των υψηλότερης τάξης γραμμικών ΜΔΕ που εκφράζουν τις συνθήκες συμβατότητας του συστήματος. Ως σημαντική εφαρμογή της μεθόδου, περιγράφεται αναλυτικά η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων του Maxwell στον ηλεκτρομαγνητισμό, με χρήση απλών παραμετρικών λύσεων (μονοχρωματικά επίπεδα κύματα) των κυματικών εξισώσεων για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο.

ABSTRACT

A method is proposed for finding solutions of a linear system of partial differential equations (PDEs). The method consists in finding suitable, parameter-dependent solutions of the higher-order linear PDEs that express the consistency conditions of the system. As an important application of the method, the Maxwell system of equations of electromagnetism is solved analytically by using simple, parameter-dependent solutions (monochromatic plane waves) of the wave equations for the electric and the magnetic field.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επίλυση μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) είναι ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα των μαθηματικών. Για την εύρεση λύσεων τέτοιων ΜΔΕ έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές. Μία από αυτές συνίσταται στη χρήση *μετασχηματισμών Bäcklund* (βλ., π.χ., [1,2]). Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην εύρεση ενός συστήματος ΜΔΕ το οποίο συνδέει λύσεις μιας δοσμένης μη-γραμμικής ΜΔΕ με λύσεις μιας άλλης ΜΔΕ, ή με άλλες λύσεις της ίδιας της μη-γραμμικής ΜΔΕ. Έτσι, αν γνωρίζουμε είτε μία λύση της άλλης ΜΔΕ, είτε μία απλούστερη λύση της μη-γραμμικής ΜΔΕ, μπορούμε να βρούμε μια πιο σύνθετη λύση της τελευταίας χωρίς να επιλύσουμε την ίδια την εξίσωση, ολοκληρώνοντας το σύστημα εξισώσεων του μετασχηματισμού Bäcklund (πράγμα που, στις περισσότερες των περιπτώσεων, είναι πιο εύκολο).

Ένας μετασχηματισμός Bäcklund είναι στην ουσία ένα σύστημα ΜΔΕ για δύο άγνωστες συναρτήσεις (ας τις ονομάσουμε u και v). Η *συμβατότητα* των εξισώσεων του συστήματος μεταξύ τους επιβάλλει στα u και v να ικανοποιούν δύο αντίστοιχες ΜΔΕ, έστω $F[u]=0$ και $G[v]=0$. Ας υποθέσουμε ότι η $F[u]=0$ είναι μία μη-γραμμική ΜΔΕ της οποίας ζητούμε λύσεις, ενώ η $G[v]=0$ είναι μια άλλη ΜΔΕ της οποίας κάποιες λύσεις είναι ήδη γνωστές. Εισάγοντας, τότε, μια λύση v της $G[v]=0$ στον μετασχηματισμό Bäcklund, και ολοκληρώνοντας το σύστημα ως προς u, βρίσκουμε μια αντίστοιχη λύση u της $F[u]=0$, χωρίς να χρειαστεί να επιλύσουμε την ίδια την μη-γραμμική ΜΔΕ (πράγμα που, γενικά, είναι πιο δύσκολο).

Συχνά, οι ΜΔΕ $F[u]=0$ και $G[v]=0$ ταυτίζονται. Δηλαδή, η συμβατότητα των εξισώσεων του μετασχηματισμού Bäcklund επιβάλλει στα u και v να ικανοποιούν την ίδια μη-γραμμική ΜΔΕ. Έτσι, αν γνωρίζουμε μία λύση u της εξίσωσης αυτής, βρίσκουμε μια άλλη λύση v της ίδιας εξίσωσης ολοκληρώνοντας το σύστημα Bäcklund.

Θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί αν οι μετασχηματισμοί Bäcklund είναι χρήσιμοι στην περίπτωση *γραμμικών* ΜΔΕ. Πράγματι, για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων υπάρχουν μέθοδοι (π.χ., αναζήτηση λύσης στη μορφή αθροίσματος στοιχειωδών συναρτήσεων, χρήση μετασχηματισμών Laplace και Fourier, κλπ.) οι οποίες κατά βάση αξιοποιούν την ιδιότητα ότι το άθροισμα ενός αυθαίρετου αριθμού λύσεων μιας γραμμικής ΜΔΕ είναι επίσης λύση της ΜΔΕ.

Όμως, αν η επίλυση καθαυτή μιας γραμμικής ΜΔΕ δεν παρουσιάζει, ίσως, ιδιαίτερο ενδιαφέρον, δεν ισχύει το ίδιο για την επίλυση ενός *γραμμικού συστήματος* ΜΔΕ. Για να υπάρχει λύση στο γραμμικό σύστημα θα πρέπει οι εξισώσεις που το αποτελούν να είναι συμβατές μεταξύ τους. Οι *συνθήκες συμβατότητας* του συστήματος επιβάλλουν τότε σε κάθε μία από τις άγνωστες συναρτήσεις που υπεισέρχονται σε αυτό να ικανοποιεί μια αντίστοιχη γραμμική ΜΔΕ υψηλότερης τάξης.

Στην περίπτωση αυτή, το γραμμικό σύστημα αποτελεί μετασχηματισμό Bäcklund που συνδέει μεταξύ τους δύο γραμμικές ΜΔΕ, οι οποίες υποτίθεται ότι έχουν γνωστές λύσεις – ή, σε κάθε περίπτωση, που οι λύσεις τους είναι εύκολο να βρεθούν. Οι λύσεις αυτές εξαρτώνται, γενικά, από ένα σύνολο παραμέτρων. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί ο κατάλληλος συνδυασμός παραμέτρων έτσι ώστε οι αντίστοιχες λύσεις των δύο γραμμικών ΜΔΕ να ικανοποιούν μαζί το δοσμένο γραμμικό σύστημα.

Παρατηρούμε ότι εδώ το πρόβλημα των μετασχηματισμών Bäcklund, έτσι όπως τους περιγράψαμε προηγουμένως σε σχέση με τις μη-γραμμικές ΜΔΕ, έχει κατ' ουσίαν αντιστραφεί, αφού είναι το ίδιο το γραμμικό σύστημα που μας ενδιαφέρει να επιλύσουμε, όχι κάποια από τις υψηλότερης τάξης ΜΔΕ που εκφράζουν τις συνθήκες συμβατότητάς του.

Στο παραπάνω γενικό πλάνο βασίζεται μία μέθοδος ολοκλήρωσης γραμμικών συστημάτων ΜΔΕ που περιγράφηκε πρόσφατα [1,2]. Στην ιδέα αυτή οδήγησε μια προσεκτική εξέταση του συστήματος των εξισώσεων του Maxwell στον ηλεκτρομαγνητισμό. Όπως διαπιστώθηκε, το γραμμικό αυτό σύστημα είναι στην ουσία ένας μετασχηματισμός Bäcklund που συνδέει μεταξύ τους τις λύσεις των κυματικών εξισώσεων για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Έτσι, ξεκινώντας από απλές παραμετρικές λύσεις των κυματικών εξισώσεων (μονοχρωματικά επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα) οδηγούμαστε σε μια λύση του ίδιου του συστήματος Maxwell.

Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζουμε αναλυτικά την μέθοδο ολοκλήρωσης γραμμικών συστημάτων ΜΔΕ, στην οποία αναφερθήκαμε πιο πάνω. Στη συνέχεια, ως σημαντική εφαρμογή της μεθόδου θα μελετήσουμε την εύρεση λύσεων των εξισώσεων του Maxwell, τόσο στον κενό χώρο όσο και στο εσωτερικό ενός ηλεκτρικά αγώγιμου υλικού μέσου.

Σημείωση: Η έκφραση *«γραμμική ΜΔΕ»* θα εννοείται εδώ ως *«γραμμική και ομογενής ΜΔΕ»*. Σε κάθε όρο μιας γραμμικής – με την έννοια αυτή – ΜΔΕ, η άγνωστη συνάρτηση [ας την ονομάσουμε $u(x,y,...)$], ή οι μερικές παράγωγοί της, εμφανίζονται στην πρώτη δύναμη. Δηλαδή, ένας όρος της ΜΔΕ δεν μπορεί να περιέχει δυνάμεις του u ή των παραγώγων του, ούτε γινόμενα ανάμεσα στο u και τις παραγώγους του. Επίσης, επειδή η εξίσωση είναι ομογενής, δεν περιέχει όρους από τους οποίους απουσιάζει το u (όπως, π.χ., σταθερούς όρους ή όρους που εξαρτώνται μόνο από τις ανεξάρτητες μεταβλητές x, y,...).

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ (ΜΔΕ) ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ: ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Συμβολισμός

Έστω συνάρτηση $\Phi(x,y,...)$. Θα συμβολίζουμε τις μερικές παραγώγους της χρησιμοποιώντας κάτω δείκτες, ως εξής:

$$\partial\Phi/\partial x \equiv \Phi_x\,, \quad \partial\Phi/\partial y \equiv \Phi_y\,, \quad \partial^2\Phi/\partial x^2 \equiv \Phi_{xx}\,, \quad \partial^2\Phi/\partial y^2 \equiv \Phi_{yy}\,, \quad \partial^2\Phi/\partial x\partial y \equiv \Phi_{xy} = \Phi_{yx}\,,$$

κλπ.

Αναλυτική μιγαδική συνάρτηση και σχέσεις Cauchy-Riemann

Έστω $z=x+iy \equiv (x,y)$ σημείο του μιγαδικού επιπέδου, και έστω μιγαδική συνάρτηση

$$w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \qquad (1)$$

όπου u, v πραγματικές συναρτήσεις. Καλούμε $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ μία μεταβολή τού z, και θέτουμε $\Delta w=f(z+\Delta z) - f(z)$. Αν υπάρχει το όριο του πηλίκου $\Delta w/\Delta z$ για $\Delta z\to 0$, η συνάρτηση $f(z)$ καλείται *παραγωγίσιμη* στο σημείο z, και η παράγωγός της, $f'(z)$, ισούται με το όριο αυτό. Μία συνάρτηση $f(z)$ παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο μιας περιοχής G του μιγαδικού επιπέδου, λέγεται *αναλυτική* (ή *ολόμορφη*) στην περιοχή G.

Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η $f(z)$ αναλυτική, είναι να ικανοποιούνται οι *σχέσεις Cauchy-Riemann*, που αποτελούν σύστημα δύο μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ) πρώτης τάξεως για τις συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$:

$$u_x = v_y \quad (a) \qquad u_y = -\,v_x \quad (b) \qquad (2)$$

ή, αναλυτικά,

$$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y \quad (a) \qquad \partial u/\partial y = -\,\partial v/\partial x \quad (b) \qquad (2')$$

Εδώ τώρα θα πρέπει να προσέξουμε το εξής (σε αυτή την παρατήρηση βασίζεται η μέθοδος που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια): Αν είχαμε μόνο μία από τις παραπάνω δύο εξισώσεις, π.χ. την ($2a$), τότε για κάθε δοσμένη συνάρτηση v θα βρίσκαμε την αντίστοιχη συνάρτηση u με απλή ολοκλήρωση ως προς x. Όμοια, για κάθε δοσμένο u θα βρίσκαμε το αντίστοιχο v με ολοκλήρωση ως προς y. Το πρόβλημα είναι ότι κάθε μία από τις δύο συναρτήσεις εμφανίζεται σε *δύο* εξισώσεις. Ας πούμε, λοιπόν, ότι διαλέγουμε *τυχαία* μια οποιαδήποτε συνάρτηση $v(x,y)$. Μπορούμε τότε να ολοκληρώσουμε χωριστά τις ($2a$) και ($2b$) ως προς u, για να βρούμε την αντίστοιχη συνάρτηση $u(x,y)$. Εδώ, όμως, ανακύπτει ένα θεμελιώδες ερώτημα: θα *ταιριάζουν* (δηλαδή, θα είναι *συμβατές*) μεταξύ τους οι δύο λύσεις που θα προκύψουν για το u; Η λογική λέει πως, γενικά, όχι, για τυχαία επιλογή τού v!

Ερώτηση: Πώς πρέπει να επιλέξουμε την συνάρτηση $v(x,y)$, έτσι ώστε το σύστημα να έχει λύση ως προς u; Για να απαντήσουμε, θα πρέπει με κάποιον τρόπο να συγκρίνουμε τις δύο εξισώσεις του συστήματος μεταξύ τους. Επειδή ζητούμε μια συνθήκη για την συνάρτηση $v(x,y)$, θα πρέπει κάπως να απαλείψουμε το u από το πρόβλημα. Αυτό θα το πετύχουμε αν παραγωγίσουμε την $(2a)$ ως προς y και την $(2b)$ ως προς x, και στη συνέχεια εξισώσουμε τις μεικτές παραγώγους τού u:

$$(2a)_y \Rightarrow u_{xy} = v_{yy} \quad , \quad (2b)_x \Rightarrow u_{yx} = -v_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{yx} \Rightarrow v_{yy} = -v_{xx} \Rightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0 \, .$$

Αντίστροφα, τώρα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα (2) ως προς v, για δοσμένη συνάρτηση $u(x,y)$. Προφανώς, για να υπάρχει λύση ως προς v, το u δεν μπορεί να επιλεγεί τυχαία. Για να βρούμε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το u, θα πρέπει τώρα να απαλείψουμε το v από το σύστημα. Δουλεύοντας με όμοιο τρόπο όπως πριν, έχουμε:

$$(2a)_x \Rightarrow u_{xx} = v_{yx} \quad , \quad (2b)_y \Rightarrow u_{yy} = -v_{xy}$$

$$v_{yx} = v_{xy} \Rightarrow u_{xx} = -u_{yy} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \, .$$

Ας ανακεφαλαιώσουμε: Για να είναι οι δύο εξισώσεις του συστήματος (2) *συμβατές* μεταξύ τους (ή, όπως λέμε, για να είναι το σύστημα αυτό *ολοκληρώσιμο*), θα πρέπει να ικανοποιούνται ανεξάρτητα οι παρακάτω *συνθήκες συμβατότητας* (ή *συνθήκες ολοκληρωσιμότητας*):

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{3}$$

Με άλλα λόγια, κάθε μία από τις συναρτήσεις u και v θα πρέπει να ικανοποιεί την *εξίσωση του Laplace* (δηλαδή, να είναι *αρμονική συνάρτηση*):

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \tag{4}$$

Έτσι, αν επιλέξουμε οποιαδήποτε *αρμονική* συνάρτηση $v(x,y)$ και ολοκληρώσουμε το σύστημα (2) ως προς u για το δοσμένο αυτό v, θα βρούμε μια *αρμονική* συνάρτηση $u(x,y)$ τέτοια ώστε η μιγαδική συνάρτηση στη σχέση (1) να είναι αναλυτική. Αντίστροφα, αν επιλέξουμε οποιαδήποτε αρμονική συνάρτηση $u(x,y)$ και ολοκληρώσουμε το σύστημα (2) ως προς v για το δοσμένο αυτό u, θα βρούμε μια αρμονική συνάρτηση $v(x,y)$ τέτοια ώστε η μιγαδική συνάρτηση (1) να είναι αναλυτική.

Πιο γενικά, και ανεξάρτητα από τη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων, το σύστημα (2) έχει την εξής ιδιότητα: Αν γνωρίζουμε μία λύση $v(x,y)$ της εξίσωσης του Laplace, τότε μπορούμε να βρούμε μια άλλη λύση $u(x,y)$ χωρίς καν να ολοκληρώσουμε την ίδια την εξίσωση του Laplace: απλά ολοκληρώνουμε το σύστημα (2) ως προς u για το δοσμένο v. Έχουμε εδώ την πιο απλή περίπτωση ενός *μετασχηματισμού Bäcklund*, μιας τεχνικής που χρησιμοποιείται για την εύρεση λύσεων μη-γραμμικών ΜΔΕ. Επειδή εδώ όλες οι εξισώσεις μας είναι *γραμμικές*, θα καλούμε το σύστημα (2) απλά *γραμμικό σύστημα* για την εξίσωση του Laplace.

Παράδειγμα:

Όπως είναι εύκολο να δείξουμε, η συνάρτηση $v(x,y)=xy$ είναι αρμονική, δηλαδή, ικανοποιεί την εξίσωση (4) του Laplace. Με την επιλογή αυτή, το σύστημα (2) γράφεται:

$$\partial u/\partial x = x \quad (a) \qquad \partial u/\partial y = -y \quad (b)$$

Η (a) δίνει:

$$u = x^2/2 + \varphi(y).$$

Αντικαθιστώντας αυτό στην (b), παίρνουμε:

$$\varphi'(y) = -y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -y^2/2 + C\,.$$

Άρα, τελικά,

$$u = (x^2 - y^2)/2 + C\,.$$

που είναι επίσης αρμονική συνάρτηση, αφού ικανοποιεί την εξίσωση (4) του Laplace. Συμπέρασμα: Η συνάρτηση

$$w = u + i\,v = (x^2 - y^2)/2 + i\,xy$$

(όπου θέσαμε C=0) είναι αναλυτική. Θέτοντας $z=x+iy$, βλέπουμε ότι η συνάρτηση αυτή γράφεται: $w = f(z) = z^2/2$.

Μία νέα προσέγγιση στα γραμμικά συστήματα

Όπως είδαμε, το γραμμικό σύστημα (2) συνδέει λύσεις της εξίσωσης του Laplace μεταξύ τους, έτσι ώστε αν γνωρίζουμε μία λύση $v(x,y)$, να βρίσκουμε μια άλλη λύση $u(x,y)$ χωρίς να ολοκληρώσουμε την ίδια την εξίσωση του Laplace (που είναι μια ΜΔΕ δευτέρας τάξεως), ολοκληρώνοντας αντ' αυτής το σύστημα (2) (που είναι πρώτης τάξεως, άρα πιο εύκολα επιλύσιμο). Το ζητούμενο εδώ είναι να βρούμε νέες λύσεις της εξίσωσης του Laplace, και για το σκοπό αυτό το σύστημα (2) είναι ένα βοηθητικό «εργαλείο».

Γενικότερα μιλώντας, ένα γραμμικό σύστημα ΜΔΕ πρώτης τάξεως ως προς u και v συνδέει δύο συναρτήσεις που υπακούουν είτε την ίδια γραμμική ΜΔΕ δευτέρας τάξεως (όπως η εξίσωση του Laplace), είτε δύο ξεχωριστές γραμμικές ΜΔΕ, μία για το u και μία για το v. Έτσι, αν γνωρίζουμε μία από τις δύο συναρτήσεις, έστω την v, μπορούμε να βρούμε την u με ολοκλήρωση του γραμμικού συστήματος, χωρίς να χρειαστεί να επιλύσουμε την ίδια την ΜΔΕ που αφορά το u.

Πρόσφατα [1,2] εξετάστηκε μία αντίστροφη, κατά μία έννοια, θεώρηση του προβλήματος, με βάση την παρατήρηση ότι είναι συχνά το ίδιο το γραμμικό σύστημα που μας ενδιαφέρει να επιλύσουμε. Σημαντικό παράδειγμα είναι οι εξισώσεις του Maxwell στο κενό ή μέσα στην ύλη, ένα γραμμικό σύστημα τεσσάρων ΜΔΕ πρώτης τάξεως για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Πριν μιλήσουμε γι' αυτές, όμως, ας επιστρέψουμε στο απλούστερο παράδειγμα των σχέσεων Cauchy-Riemann (2) και ας υποθέσουμε ότι ζητούμε ένα *ζεύγος* συναρτήσεων (u,v) που ικανοποιούν το σύστημα αυτό. Θέλουμε τώρα, δηλαδή, να επιλύσουμε το ίδιο το σύστημα (2), όχι να βρούμε μία νέα συνάρτηση $u(x,y)$ γνωρίζοντας ήδη μια άλλη συνάρτηση $v(x,y)$.

Καταρχήν, όπως είδαμε νωρίτερα, η *συμβατότητα* των εξισώσεων του συστήματος μεταξύ τους απαιτεί ότι τόσο το u, όσο και το v, ικανοποιούν την εξίσωση του Laplace (4). Βέβαια, αν επιλέξουμε δύο *τυχαίες* λύσεις u και v της ΜΔΕ (4) και τις αντικαταστήσουμε στο σύστημα (2), το πιθανότερο είναι ότι το σύστημα δεν θα ικανοποιείται! Αν, όμως, επιλέξουμε κατάλληλα τις αρμονικές συναρτήσεις u και v, έτσι ώστε να επαληθεύουν μαζί το γραμμικό σύστημα (2), τότε θα λέμε ότι οι συναρτήσεις u και v είναι *συζυγείς* ως προς το σύστημα αυτό.

Ας γενικεύσουμε το πρόβλημα: Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα δύο ΜΔΕ πρώτης τάξεως ως προς τις συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$. Γράφουμε, συμβολικά,

$$B_1[u,v]=0 \quad (a) \qquad B_2[u,v]=0 \quad (b) \tag{5}$$

Κάνουμε επίσης την υπόθεση ότι η συμβατότητα των εξισώσεων (5a) και (5b) του συστήματος απαιτεί τα u και v να επαληθεύουν, χωριστά, τις αντίστοιχες γραμμικές ΜΔΕ δευτέρας τάξεως,

$$P[u]=0 \quad (a) \qquad Q[v]=0 \quad (b) \tag{6}$$

(Στην περίπτωση που οι εκφράσεις για τα P και Q είναι συναρτησιακά όμοιες, τα u και v είναι λύσεις της ίδιας ΜΔΕ.) Καθώς οι ΜΔΕ (6) είναι γραμμικές, είναι (θεωρητικά τουλάχιστον) σχετικά εύκολο να βρούμε κάποιες λύσεις τους. Βέβαια, αν πάρουμε μία τυχαία λύση u της (6a) και μία τυχαία λύση v της (6b) και τις αντικαταστήσουμε στο σύστημα (5), το πιο πιθανό είναι ότι το σύστημα δεν θα επαληθεύεται. Θα πρέπει, λοιπόν, να δώσουμε στα u και v μια τόσο γενική μορφή που να μας επιτρέπει αρκετή ευελιξία ώστε να αναγκάσουμε τις συναρτήσεις αυτές να επαληθεύουν μαζί το γραμμικό σύστημα (5).

Προς το σκοπό αυτό, αναζητούμε *παραμετρικές λύσεις* των ΜΔΕ (6). Υποθέτουμε ότι τέτοιες λύσεις υπάρχουν και είναι της μορφής

$$u=f(x,y\,;\alpha,\beta,\ldots)\ , \qquad v=g(x,y\,;\kappa,\lambda,\ldots) \tag{7}$$

όπου $\alpha, \beta, \kappa, \lambda$, κλπ., είναι (πραγματικές ή μιγαδικές) παράμετροι.

Ορισμός: Αν υπάρχουν τιμές των παραμέτρων, τέτοιες ώστε οι λύσεις u και v των ΜΔΕ (6) να ικανοποιούν μαζί το γραμμικό σύστημα (5), θα λέμε ότι οι συναρτήσεις u και v είναι *συζυγείς ως προς το σύστημα* (5).

Προφανώς, η εύρεση ενός ζεύγους συζυγών συναρτήσεων (u,v) ισοδυναμεί αυτομάτως με επίλυση του γραμμικού συστήματος (5). Το πρόβλημα, λοιπόν, ανάγεται σε μία «έξυπνη» επιλογή των παραμετρικών λύσεων (7) των αντίστοιχων ΜΔΕ (6).

Παράδειγμα:

Ας ξαναγυρίσουμε στις σχέσεις Cauchy-Riemann (2), τις οποίες γράφουμε ως εξής:

$$B_1\,[u,v] \equiv u_x - v_y = 0 \;\;, \qquad B_2\,[u,v] \equiv u_y + v_x = 0 \tag{8}$$

Όπως έχουμε δείξει, η συμβατότητα του συστήματος (8) επιβάλλει τόσο στο u, όσο και στο v, να είναι λύσεις της εξίσωσης του Laplace (4). Γράφουμε τις αντίστοιχες σχέσεις (3) στη μορφή:

$$P\,[u] \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \;\;, \qquad P\,[v] \equiv v_{xx} + v_{yy} = 0 \tag{9}$$

όπου, γενικά, $P\,[w] = w_{xx} + w_{yy}$ (εδώ, οι συναρτήσεις P και Q ταυτίζονται).

Δοκιμάζουμε, τώρα, τις εξής παραμετρικές λύσεις των ΜΔΕ (9):

$$u(x,y) = \alpha\,(x^2 - y^2) + \beta x + \gamma y \;\;,$$
$$v(x,y) = \kappa xy + \lambda x + \mu y \;\;.$$

Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις αυτές στο σύστημα (8), βρίσκουμε ότι θα πρέπει να ισχύουν οι εξής σχέσεις ανάμεσα στις παραμέτρους:

$$\kappa=2\alpha \;, \quad \lambda=-\gamma \;, \quad \mu=\beta \;.$$

Έχουμε, έτσι, δύο συναρτήσεις συζυγείς ως προς το γραμμικό σύστημα (8):

$$u(x,y) = \alpha\,(x^2 - y^2) + \beta x + \gamma y \;\;,$$
$$v(x,y) = 2\alpha xy - \gamma x + \beta y \;\;,$$

όπου α, β, γ αυθαίρετες σταθερές. Το ζεύγος (u,v) αποτελεί λύση του συστήματος (8).

Ας υποθέσουμε, όμως, ότι είχαμε κάνει μία διαφορετική επιλογή παραμετρικών λύσεων των ΜΔΕ (9), π.χ.,

$$u(x,y) = \alpha xy \;, \qquad v(x,y) = \beta xy \;.$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στο σύστημα (8) και λαμβάνοντας υπόψη ότι οι μεταβλητές x και y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, βρίσκουμε ότι οι μόνες αποδεκτές τιμές των παραμέτρων α και β είναι οι $\alpha=\beta=0$, πράγμα που οδηγεί στις τετριμμένες λύσεις $u(x,y)=0$ και $v(x,y)=0$. Με άλλα λόγια, η πιο πάνω παραμετροποίηση των λύσεων των ΜΔΕ (9) δεν οδηγεί σε μη-τετριμμένες συζυγείς συναρτήσεις, άρα δεν προσφέρει μη-τετριμμένη λύση στο γραμμικό σύστημα (8).

Συμπέρασμα: Η μέθοδος επίλυσης του γραμμικού συστήματος ΜΔΕ πρώτης τάξεως (5) βασίζεται σε αναζήτηση κατάλληλων παραμετρικών λύσεων των ΜΔΕ δευτέρας τάξεως (6), οι οποίες εκφράζουν τις συνθήκες συμβατότητας του συστήματος. Αναζητούμε μία σχέση ανάμεσα στις παραμέτρους, τέτοια ώστε οι λύσεις (7) των ΜΔΕ (6) να ικανοποιούν μαζί το σύστημα (5).

Οι ΜΔΕ (6) βρίσκονται με παραγώγιση των εξισώσεων του συστήματος (5), έτσι ώστε να απαλείψουμε τη μία συνάρτηση (u ή v) προς όφελος της άλλης (v ή u, αντίστοιχα). Έτσι, π.χ., παραγωγίζοντας τις σχέσεις Cauchy-Riemann με τρόπο ώστε να απαλείψουμε το v, βρήκαμε ότι το u πρέπει να υπακούει την εξίσωση του Laplace, η οποία είναι δευτέρας τάξεως. Όμοια, παραγωγίζοντας το σύστημα και απαλείφοντας το u, βρήκαμε ότι το v θα πρέπει επίσης να ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε το εξής: Το αρχικό σύστημα (5) είναι *πρώτης* τάξεως και *πεπλεγμένο* ως προς τα u και v (δηλαδή, εμπλέκει και τις δύο αυτές συναρτήσεις, σχετίζοντας παραγώγους της μίας με παραγώγους της άλλης). Αντίθετα, οι ΜΔΕ (6) που εκφράζουν τις σχέσεις συμβατότητας του συστήματος είναι *χωριστές* εξισώσεις για τα u και v, αλλά με ένα τίμημα: είναι ΜΔΕ *δευτέρας* τάξεως! Αυτό που κάνει εδώ τα πράγματα πιο εύκολα είναι το γεγονός ότι οι ΜΔΕ αυτές είναι *γραμμικές*, πράγμα που επιτρέπει να βρούμε παραμετρικές λύσεις τους με σχετική ευκολία.

Ας συνοψίσουμε τη μέθοδο:

Έστω ότι μας δίνεται το γραμμικό σύστημα ΜΔΕ πρώτης τάξεως (5), ως προς τις συναρτήσεις u και v.

1. Με κατάλληλη παραγώγιση του συστήματος, απαλείφουμε το v και βρίσκουμε την γραμμική ΜΔΕ δευτέρας τάξεως (6*a*) για το u. Όμοια, παραγωγίζοντας το σύστημα και απαλείφοντας το u, βρίσκουμε την γραμμική ΜΔΕ δευτέρας τάξεως (6*b*) για το v. Οι σχέσεις (6) είναι οι *συνθήκες συμβατότητας* του γραμμικού συστήματος (5).

2. Αναζητούμε παραμετρικές λύσεις (7) των ΜΔΕ (6). Τέτοιες λύσεις δεν προσδιορίζονται μονοσήμαντα, προσπαθούμε όμως οι εκφράσεις μας να είναι κατά το δυνατόν γενικές.

3. Αντικαθιστούμε τις παραμετρικές λύσεις (7) στο σύστημα (5) και εξετάζουμε αν υπάρχουν συσχετισμοί ανάμεσα στις παραμέτρους, τέτοιοι ώστε το σύστημα να ικανοποιείται. Αν συμβαίνει αυτό, οι λύσεις u και v των ΜΔΕ (6) είναι *συζυγείς* ως προς το σύστημα (5), και το ζεύγος (u,v) αποτελεί μία λύση του συστήματος αυτού. Μια διαφορετική επιλογή παραμετρικών λύσεων (7) είτε θα δώσει μια άλλη λύση του συστήματος (5), είτε θα οδηγήσει σε τετριμμένη λύση.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL ΣΤΟ ΚΕΝΟ

Η μέθοδος ολοκλήρωσης γραμμικών συστημάτων ΜΔΕ, την οποία περιγράψαμε, βρίσκει σημαντική εφαρμογή σε ένα από τα σπουδαιότερα συστήματα εξισώσεων στη Φυσική: τις *εξισώσεις του Maxwell* για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Στον κενό χώρο, όπου δεν υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία ή ρεύματα, οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται, στο σύστημα μονάδων S.I. [3]:

$$\begin{aligned} &(a)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad &&(c)\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ &(b)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad &&(d)\quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $\vec{E}$ και $\vec{B}$ το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, αντίστοιχα. Έχουμε εδώ ένα σύστημα τεσσάρων γραμμικών ΜΔΕ πρώτης τάξεως για τα δύο πεδία. Το κάθε πεδίο είναι συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών (x, y, z, t), δηλαδή, των συντεταγμένων του χώρου (x, y, z), και του χρόνου t.

Ερώτηση: Ποιες είναι οι αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να υπακούουν τα πεδία αυτά, έτσι ώστε οι εξισώσεις του συστήματος (1) να είναι συμβατές μεταξύ τους; Με άλλα λόγια, ποιες είναι οι *συνθήκες συμβατότητας* του συστήματος Maxwell;

Με βάση την εμπειρία που έχουμε ήδη αποκτήσει, για να βρούμε τις παραπάνω συνθήκες θα παραγωγίσουμε με διάφορους τρόπους τις εξισώσεις του συστήματος (1) και θα απαιτήσουμε να ικανοποιούνται συγκεκριμένες διαφορικές ταυτότητες. (Στην περίπτωση Cauchy-Riemann, για παράδειγμα, είχαμε απαιτήσει την ισότητα των μεικτών παραγώγων u_{xy} και u_{yx} .) Στόχος μας είναι, βέβαια, να απαλείψουμε το ένα πεδίο (ηλεκτρικό ή μαγνητικό) προς όφελος του άλλου, ώστε να βρούμε την αντίστοιχη ΜΔΕ δευτέρας τάξεως που θα πρέπει να ικανοποιεί το κάθε πεδίο.

Όπως μπορούμε να δείξουμε, ορισμένες διαφορικές ταυτότητες ικανοποιούνται αυτόματα από το σύστημα (1) χωρίς να επιβάλλουν πρόσθετους περιορισμούς:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})=0\ ,\quad \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})=0\ ,$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})_t=\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_t\ ,\quad (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})_t=\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_t\ .$$

Αυτές που όντως επιβάλλουν περιορισμούς είναι οι παρακάτω ταυτότητες:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E} \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B} \tag{3}$$

Παίρνοντας το *rot* της (1*c*) και χρησιμοποιώντας τις (2), (1*a*) και (1*d*), βρίσκουμε:

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

Όμοια, παίρνοντας το *rot* της (1*d*) και χρησιμοποιώντας τις (3), (1*b*) και (1*c*), έχουμε:

$$\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

Καμία πρόσθετη πληροφορία δεν παίρνουμε από τις δύο ταυτότητες που απομένουν:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_t = \vec{\nabla} \times \vec{E}_t \ , \quad (\vec{\nabla} \times \vec{B})_t = \vec{\nabla} \times \vec{B}_t \ .$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε *αποσυμπλέξει* τις εξισώσεις για τα δύο πεδία του συστήματος (1), παίρνοντας ξεχωριστές ΜΔΕ *δευτέρας* τάξεως για κάθε πεδίο.

Θέτοντας

$$\varepsilon_0 \mu_0 \equiv \frac{1}{c^2} \iff c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{6}$$

(όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό) γράφουμε τις (4) και (5) σε μορφή εξισώσεων κύματος:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

Συμπέρασμα: Οι εξισώσεις του Maxwell (1) αποτελούν γραμμικό σύστημα του οποίου οι συνθήκες συμβατότητας εκφράζονται από τις κυματικές εξισώσεις (7) και (8). Τούτο σημαίνει ότι τόσο το ηλεκτρικό, όσο και το μαγνητικό πεδίο, τα οποία υπεισέρχονται στο σύστημα Maxwell, είναι ταυτόχρονα και λύσεις των αντίστοιχων κυματικών εξισώσεων (7) και (8). Λέμε ότι οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν ένα *ηλεκτρομαγνητικό (Η/Μ) κύμα*.

Θα επιχειρήσουμε τώρα να επιλύσουμε το σύστημα (1) εφαρμόζοντας τη γενική μέθοδο ολοκλήρωσης γραμμικών συστημάτων πρώτης τάξεως, την οποία περιγράψαμε νωρίτερα. Αυτή συνίσταται στην αναζήτηση κατάλληλων παραμετρικών λύσεων των ΜΔΕ δευτέρας τάξεως που εκφράζουν τις συνθήκες συμβατότητας του συστήματος. Οι ΜΔΕ αυτές είναι οι κυματικές εξισώσεις (7) και (8). Αυτές επιδέχονται *επίπεδες κυματικές λύσεις* της μορφής $\vec{F}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, όπου

$$\frac{\omega}{k} = c \qquad \left(k = |\vec{k}| \right) \tag{9}$$

(βλ. [3], Κεφ. 10). Οι απλούστερες τέτοιες λύσεις είναι *μονοχρωματικά επίπεδα κύματα* κυκλικής συχνότητας ω, τα οποία διαδίδονται στην κατεύθυνση του *κυματοδιανύσματος* $\vec{k}$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0 \exp\{ i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\} \qquad (a) \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{B}_0 \exp\{ i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\} \qquad (b) \end{aligned} \tag{10}$$

όπου τα $\vec{E}_0$ και $\vec{B}_0$ είναι σταθερά μιγαδικά πλάτη. Οι σταθερές που εμφανίζονται στις εξισώσεις (10), δηλαδή τα πλάτη, η κυκλική συχνότητα, και η κατεύθυνση του κυματοδιανύσματος, μπορούν να επιλέγονται αυθαίρετα. Έτσι, μπορούν να θεωρούνται ως *παράμετροι* των επίπεδων κυματικών λύσεων (10). Οι σχέσεις (10), λοιπόν, είναι οι ζητούμενες παραμετρικές λύσεις των κυματικών εξισώσεων (7) και (8) που εκφράζουν τις συνθήκες συμβατότητας του γραμμικού συστήματος (1).

Θα πρέπει να προσέξουμε το εξής: Παρόλο που κάθε ζεύγος πεδίων $(\vec{E}, \vec{B})$ που ικανοποιεί το σύστημα Maxwell (1) αναγκαία ικανοποιεί και τις κυματικές εξισώσεις (7) και (8) (συνθήκες συμβατότητας του συστήματος), το αντίθετο *δεν* ισχύει. Δηλαδή, αν θέσουμε μία τυχαία λύση της ΜΔΕ (7) και μία τυχαία λύση της ΜΔΕ (8) στο σύστημα (1), το σύστημα αυτό δεν θα ικανοποιείται. Έτσι, οι επίπεδες κυματικές λύσεις (10) δεν είναι *εκ των προτέρων* λύσεις του συστήματος Maxwell.

Μια λύση του συστήματος θα προκύψει με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων στις σχέσεις (10). Προς το σκοπό αυτό, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τις παραμετρικές λύσεις (10) στο γραμμικό σύστημα (1) για να βρούμε τις επιπρόσθετες συνθήκες που το σύστημα αυτό επιβάλλει στις παραμέτρους του προβλήματος. Όταν οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται, οι δύο κυματικές συναρτήσεις της σχέσης (10) καθίστανται *συζυγείς* ως προς το σύστημα Maxwell (1). Όπως είναι φανερό, ακολουθούμε εδώ πιστά τη γενική μέθοδο ολοκλήρωσης γραμμικού συστήματος ΜΔΕ, την οποία αναπτύξαμε στο προηγούμενο μέρος.

Αντικαθιστώντας τις (10a) και (10b) στις (1a) και (1b), αντίστοιχα, και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = i\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (\vec{E}_0\, e^{-i\omega t})\cdot\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \;&\Rightarrow\; (\vec{k}\cdot\vec{E}_0)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0 \,, \\ (\vec{B}_0\, e^{-i\omega t})\cdot\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \;&\Rightarrow\; (\vec{k}\cdot\vec{B}_0)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0 \,, \end{aligned}$$

έτσι ώστε

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0\,, \quad \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0\,. \tag{11}$$

Οι σχέσεις (11) δηλώνουν ότι το μονοχρωματικό επίπεδο Η/Μ κύμα είναι *εγκάρσιο* κύμα. Δηλαδή, τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου «ταλαντώνονται» κάθετα προς τη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος. (Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα *διαμήκη* κύματα του ήχου.)

Επίσης, αντικαθιστώντας τις (10*a*) και (10*b*) στις (1*c*) και (1*d*), αντίστοιχα, βρίσκουμε:

$$e^{-i\omega t}\,(\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}})\times\vec{E}_0 = i\,\omega\,\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \Rightarrow$$
$$(\vec{k}\times\vec{E}_0)\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \omega\,\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \;,$$

$$e^{-i\omega t}\,(\vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}})\times\vec{B}_0 = -i\,\omega\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \Rightarrow$$
$$(\vec{k}\times\vec{B}_0)\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = -\frac{\omega}{c^2}\,\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \;,$$

έτσι ώστε

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\,\vec{B}_0 \;, \quad \vec{k}\times\vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\,\vec{E}_0 \qquad (12)$$

Παρατηρούμε ότι τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, όπως και κάθετα στη διεύθυνση διαδόσεως του κύματος. Σημειώνουμε επίσης ότι οι δύο διανυσματικές εξισώσεις (12) δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Πράγματι, παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο της πρώτης εξίσωσης με το $\vec{k}$, βρίσκουμε τη δεύτερη εξίσωση.

Εισάγοντας το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\tau}$ στην κατεύθυνση του κυματοδιανύσματος $\vec{k}$,

$$\hat{\tau} = \vec{k}/k \quad (k = |\vec{k}| = \omega/c) \;,$$

γράφουμε την πρώτη από τις εξισώσεις (12) ως εξής:

$$\vec{B}_0 = \frac{k}{\omega}(\hat{\tau}\times\vec{E}_0) = \frac{1}{c}(\hat{\tau}\times\vec{E}_0) \;.$$

Οι κυματικές συναρτήσεις (10), συζυγείς ως προς το σύστημα (1), παίρνουν τώρα τη μορφή:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0 \exp\{\, i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\} \;,\\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{1}{c}(\hat{\tau}\times\vec{E}_0)\exp\{\, i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\} = \frac{1}{c}\,\hat{\tau}\times\vec{E}\end{aligned} \qquad (13)$$

Τα μιγαδικά διανυσματικά πεδία (13) ικανοποιούν το σύστημα Maxwell (1). Επειδή το σύστημα αυτό είναι γραμμικό και ομογενές με πραγματικούς συντελεστές, τα πραγματικά μέρη των πεδίων (13) θα είναι επίσης λύσεις του συστήματος. Για να βρούμε τις εκφράσεις των πραγματικών λύσεων (αυτές μόνο έχουν φυσική σημασία!) θεωρούμε την απλούστερη περίπτωση ενός *γραμμικά πολωμένου* Η/Μ κύματος (βλ. [3], Κεφ. 10) και γράφουμε:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0,R}\, e^{i\alpha} \qquad (14)$$

όπου τόσο το διάνυσμα $\vec{E}_{0,R}$, όσο και ο αριθμός α, είναι πραγματικές ποσότητες. Οι *πραγματικές* εκφράσεις των πεδίων (13) γράφονται:

$$\begin{aligned} &\vec{E} = \vec{E}_{0,R} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha) \ , \\ &\vec{B} = \frac{1}{c}(\hat{\tau}\times\vec{E}_{0,R})\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha) = \frac{1}{c}\hat{\tau}\times\vec{E} \end{aligned} \qquad (15)$$

Παρατηρούμε, ειδικά, ότι τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ «ταλαντώνονται» σε φάση.

Τα αποτελέσματά μας για τις εξισώσεις του Maxwell στο κενό μπορούν να επεκταθούν στην περίπτωση ενός *γραμμικού και ομογενούς μη-αγώγιμου μέσου* αν αντικαταστήσουμε τα ε_0 και μ_0 με ε και μ, αντίστοιχα (βλ. [3], Κεφ. 10). Η ταχύτητα διάδοσης του Η/Μ κύματος είναι, στην περίπτωση αυτή,

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad (16)$$

Θα μελετήσουμε στη συνέχεια την πιο σύνθετη περίπτωση των εξισώσεων Maxwell στο εσωτερικό ενός γραμμικού αγώγιμου μέσου.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ MAXWELL ΓΙΑ ΑΓΩΓΙΜΟ ΥΛΙΚΟ ΜΕΣΟ

Θεωρούμε ένα γραμμικό αγώγιμο μέσο, ειδικής αγωγιμότητας *σ*. Μέσα σε ένα τέτοιο μέσο ικανοποιείται ο νόμος του Ohm: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, όπου $\vec{J}$ η πυκνότητα του ρεύματος. Οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται (βλ. [3], Κεφ. 10):

$$\begin{aligned} &(a) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad && (c) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &(b) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad && (d) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \sigma \vec{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

Οι συνθήκες συμβατότητας

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \ , \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \end{aligned}$$

του γραμμικού συστήματος (1) οδηγούν στις *τροποποιημένες κυματικές εξισώσεις*

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

που πρέπει να ικανοποιούνται χωριστά για κάθε πεδίο. Όπως στην περίπτωση του κενού, κανέναν πρόσθετο περιορισμό δεν επιβάλλουν οι υπόλοιπες συνθήκες συμβατότητας του συστήματος.

Το γραμμικό σύστημα (1) συνδέει μεταξύ τους λύσεις των κυματικών εξισώσεων (2). Δηλαδή, η συμβατότητα του συστήματος επιβάλλει στο ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο να ικανοποιούν τις αντίστοιχες τροποποιημένες κυματικές εξισώσεις. Ζητούμε τώρα παραμετρικές λύσεις των εξισώσεων (2), οι οποίες να είναι συζυγείς ως προς το σύστημα (1). Ένα τέτοιο ζεύγος λύσεων $(\vec{E}, \vec{B})$ θα αποτελεί ταυτόχρονα λύση του συστήματος Maxwell.

Όπως μπορούμε να επαληθεύσουμε με απευθείας αντικατάσταση στις σχέσεις (2), οι ΜΔΕ αυτές δέχονται παραμετρικές λύσεις της μορφής

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0 \exp\{-s\,\hat{\tau} \cdot \vec{r} + i\,(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\} \\ &= \vec{E}_0 \exp\left\{ \left(i - \frac{s}{k} \right) \vec{k} \cdot \vec{r} \right\} \exp(-i\omega t) \ , \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \vec{B}_0 \exp\{-s\,\hat{\tau} \cdot \vec{r} + i\,(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\} \\ &= \vec{B}_0 \exp\left\{ \left(i - \frac{s}{k} \right) \vec{k} \cdot \vec{r} \right\} \exp(-i\omega t) \end{aligned} \tag{3}$$

όπου το $\hat{\tau}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του κυματοδιανύσματος $\vec{k}$:

$$\hat{\tau} = \vec{k}/k \quad (k = |\vec{k}| = \omega/\upsilon)$$

(με υ συμβολίζουμε την ταχύτητα διάδοσης του Η/Μ κύματος μέσα στο αγώγιμο υλικό) και όπου, για δοσμένες τιμές των φυσικών σταθερών ε, μ, σ, οι παράμετροι s, k και ω ικανοποιούν το αλγεβρικό σύστημα

$$s^2 - k^2 + \varepsilon\mu\omega^2 = 0 \ , \quad \mu\sigma\omega - 2sk = 0 \tag{4}$$

Για αυθαίρετες επιλογές των πλατών $\vec{E}_0$ και $\vec{B}_0$, τα διανυσματικά πεδία (3) δεν είναι *εκ των προτέρων* λύσεις του συστήματος Maxwell (1), άρα δεν αποτελούν ζεύγος συζυγών συναρτήσεων ως προς το σύστημα αυτό. Για να βρούμε συζυγείς λύσεις, αντικαθιστούμε τις εκφράσεις (3) στο σύστημα (1). Με τη βοήθεια της σχέσης

$$\vec{\nabla} e^{\left(i-\frac{s}{k}\right)\vec{k}\cdot\vec{r}} = \left(i - \frac{s}{k}\right)\vec{k}\, e^{\left(i-\frac{s}{k}\right)\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

μπορεί να δειχθεί ότι οι εξισώσεις (1*a*) και (1*b*) απαιτούν να ισχύει

$$\vec{k}\cdot\vec{E}_0 = 0 \ , \quad \vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0 \tag{5}$$

Όπως στην περίπτωση του κενού, το Η/Μ κύμα στο εσωτερικό αγώγιμου μέσου είναι *εγκάρσιο* κύμα.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (3) στις εξισώσεις (1*c*) και (1*d*), βρίσκουμε δύο ακόμα συνθήκες:

$$(k+is)\,\hat{\tau}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0 \tag{6}$$

$$(k+is)\,\hat{\tau}\times\vec{B}_0 = -(\varepsilon\mu\omega + i\mu\sigma)\vec{E}_0 \tag{7}$$

Παρατηρούμε, όμως, ότι η (7) δεν δίνει ανεξάρτητη πληροφορία, αφού μπορεί να εξαχθεί παίρνοντας το εξωτερικό γινόμενο της (6) με το $\hat{\tau}$ και λαμβάνοντας υπόψη τις αλγεβρικές σχέσεις (4).

Οι συζυγείς λύσεις των κυματικών εξισώσεων (2) γράφονται:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0\, e^{-s\hat{\tau}\cdot\vec{r}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \ , \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= \frac{k+is}{\omega}\,(\hat{\tau}\times\vec{E}_0)\, e^{-s\hat{\tau}\cdot\vec{r}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \end{aligned} \tag{8}$$

Οι λύσεις αυτές είναι μιγαδικές. Για να βρούμε τις αντίστοιχες πραγματικές λύσεις, θεωρούμε όπως στην περίπτωση του κενού ότι το Η/Μ κύμα είναι γραμμικά πολωμένο, και θέτουμε

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0,R}\, e^{\,i\alpha} \,.$$

Θέτουμε επίσης

$$k + i\,s = |\,k + i\,s\,|e^{i\varphi} = \sqrt{k^2 + s^2}\;\, e^{i\varphi} \quad , \quad \tan\varphi = s/k \;.$$

Παίρνοντας τα πραγματικά μέρη των διανυσματικών εξισώσεων (8), βρίσκουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} &\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{0,R}\, e^{-s\,\hat{\tau}\cdot\vec{r}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha) \;, \\ &\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\sqrt{k^2 + s^2}}{\omega}\; (\hat{\tau}\times\vec{E}_{0,R})\, e^{-s\,\hat{\tau}\cdot\vec{r}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha + \varphi) \end{aligned} \tag{9}$$

Όπως μπορούμε να δείξουμε, τα αποτελέσματά μας ανάγονται σε εκείνα για ένα γραμμικό, μη-αγώγιμο μέσο, στο όριο που η ειδική αγωγιμότητα $\sigma \to 0$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παραδοσιακά, η μέθοδος των *μετασχηματισμών Bäcklund* έχει αναπτυχθεί και χρησιμοποιηθεί σαν χρήσιμο «εργαλείο» για την εύρεση λύσεων μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ). Οι εξισώσεις αυτές δεν είναι δυνατό να επιλυθούν με μεθόδους που εφαρμόζονται σε γραμμικά προβλήματα και βασίζονται στην ιδιότητα ότι το άθροισμα ενός αυθαίρετου αριθμού λύσεων μιας γραμμικής ΜΔΕ είναι επίσης λύση της ΜΔΕ.

Πρόσφατα, προτάθηκε [1,2] μία διαφορετική εφαρμογή των μετασχηματισμών Bäcklund, η οποία σχετίζεται με την επίλυση *γραμμικών συστημάτων* ΜΔΕ. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην ύπαρξη (ή, στη δυνατότητα εύρεσης) παραμετρικών λύσεων των γραμμικών ΜΔΕ που εκφράζουν τις συνθήκες συμβατότητας του γραμμικού συστήματος που θέλουμε να επιλύσουμε. Αναζητούμε τότε κατάλληλο συσχετισμό των παραμέτρων, έτσι ώστε ένα ζεύγος λύσεων των αντίστοιχων γραμμικών ΜΔΕ να επαληθεύει και το ίδιο το γραμμικό σύστημα. Αν τέτοιο ζεύγος λύσεων υπάρχει, λέμε ότι οι λύσεις αυτές είναι *συζυγείς* ως προς το γραμμικό σύστημα.

Σαν παράδειγμα εφαρμογής της παραπάνω μεθόδου ολοκλήρωσης γραμμικού συστήματος ΜΔΕ, θεωρήσαμε το σύστημα των εξισώσεων του Maxwell στον ηλεκτρομαγνητισμό. Οι συνθήκες συμβατότητας του συστήματος οδηγούν στις κυματικές εξισώσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Οι εξισώσεις αυτές έχουν παραμετρικές λύσεις (μονοχρωματικά επίπεδα κύματα), όπου ως «παράμετροι» θεωρούνται τα πλάτη, οι συχνότητες και τα κυματοδιανύσματα. Οι εξισώσεις του Maxwell επιβάλλουν συγκεκριμένες σχέσεις ανάμεσα στις παραμέτρους, έτσι ώστε τα ζεύγη λύσεων των αντίστοιχων κυματικών εξισώσεων να είναι και λύσεις του συστήματος Maxwell (να αποτελούν, δηλαδή, ζεύγη συζυγών συναρτήσεων ως προς το σύστημα αυτό). Με τον τρόπο αυτό, χρησιμοποιώντας απλές λύσεις των κυματικών εξισώσεων, βρίσκουμε λύσεις των εξισώσεων του Maxwell.

Το ενδιαφέρον συμπέρασμα είναι ότι η έννοια των μετασχηματισμών Bäcklund, που έχει αποδειχθεί τόσο χρήσιμη για την επίλυση μη-γραμμικών ΜΔΕ, έχει σημαντικές εφαρμογές και σε γραμμικά προβλήματα. (Σημειώνουμε εδώ ότι μία επίσης σημαντική εφαρμογή των μετασχηματισμών αυτών σε γραμμικά προβλήματα, στην οποία δεν έχουμε αναφερθεί στο παρόν άρθρο, είναι η εύρεση *άπειρων μετασχηματισμών συμμετρίας* μιας ΜΔΕ – βλ., π.χ., [2].) Η έρευνα πάνω στα ζητήματα αυτά βρίσκεται σε εξέλιξη...

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] C. J. Papachristou, *The Maxwell equations as a Bäcklund transformation*, Advanced Electromagnetics, Vol. 4, No. 1 (2015), pages 52-58 (http://www.aemjournal.org/index.php/AEM/article/view/311).

[2] C. J. Papachristou, A. N. Magoulas, *Bäcklund transformations: Some old and new perspectives*, Nausivios Chora Vol. 6 (2016) pp. C3-C17 (http://nausivios.snd.edu.gr/docs/2016C.pdf).

[3] C. J. Papachristou, *Introduction to Electromagnetic Theory and the Physics of Conducting Solids*, META Publishing, Nov. 2017 (http://metapublishing.org/index.php/MP/catalog/book/52), και arXiv:1711.09969 (https://arxiv.org/abs/1711.09969).